LA TRANSFORMADA DE FOURIER

PABLO DE NÁPOLI

VERSION PREVIA 0.3.1 - APUNTE en ELABORACIÓN

Advertencia: El siguiente apunte constituye una introducción elemental y muchas veces heurística a la transformada de Fourier. No se intenta dar pruebas rigurosas de los resultados, ya que muchas demostraciones requieren utilizar conocimientos de la teoría de la integración que están fuera del nivel del curso de Matemática 4. Haremos algunas observaciones al respecto en las notas al pié de página.

1. Definición de la Transformada de Fourier

Definición: Definimos el espacio $L^1(\mathbb{R})$ como el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que f es (absolutamente) integrable[1], es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

Definición: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ definimos su **transformada de Fourier** (para $\omega \in \mathbb{R}$**)** mediante la fórmula

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

Obs: Algunos libros utilizan otras definiciones ligeramente diferentes de la transformada (por ejemplo con $e^{ix\omega}$ en lugar de $e^{-ix\omega}$ u otras constantes de normalización).

Como veremos la transformada de Fourier puede considerarse como el concepto análogo de la serie de Fourier para funciones no periódicas.

Ejermplos de cálculo de la transformada de Fourier.

Example 1.1. : Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-a, a] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(esta función se denomina la función cárácterística del intervalo $[-a, a]$). Entonces es muy fácil calcular su transformada de Fourier, aplicando directamente la definición.

[1]No precisaremos en este apunte el significado de la palabra “integrable” contentándonos con decir que la integral de —f(x)— existe en algún sentido. En realidad, para desarollar con toda generalidad y rigor la teoría se requiere la integral de Lebesgue. De ahí el nombre del espacio L^1. Mencionemos que para la teoría de la integral Lebesgue resulta equivalente afirmar que $f(\mathrm{x})$ y $|f(x)|$ son integrables.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-a}^{a} e^{-ix\omega} dx = \frac{1}{(-i\omega)}[e^{-ia\omega} - e^{ia\omega}] = \frac{2\text{sin}(\omega\text{a})}{\omega}$$

Example 1.2. : En muchos casos, las transformadas de Fourier pueden calcularse utilizando las técnicas de variable compleja. Por ejemplo, en el ejercicio 7 de la práctica 7, hemos calculado la transformada de Fourier de una función gaussiana y hemos visto que resulta ser otra función gaussiana: si $f(x) = e^{-bx^2}(b > 0)$ entonces $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\omega^2/b}$

2. La fórmula de Inversión

La propiedad más importante de la transformada de Fourier es que es posible reconstruir f a partir de su transformada, mediante la llamda **fórmula de inversión:**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

Es posible demostrar que dicha fórmula es cierta siempre que f y $\hat{f}$ estén ambas en el espacio L^1[2]. Daremos solamente una justificación heurística de esta fórmula. Advertimos sin embargo al lector, que este argumento **no constituye una justificación rigurosa** de la fórmula de inversión.

Para ello, consideremos para cada $L > 0$ la función $L-$periódica f_L que llamamos la periodizada de f de período L definida especificando que:

$$f_L(x) = f(x) \, \text{si} \, x \in [-L/2, L/2)$$

y extendiéndola en forma L-períodica. Entonces la serie de Fourier de f establece que (bajo ciertas hipótesis sobre f) se tiene que :

$$f_L(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n,L} e^{i \frac{2\pi}{L} nx} \tag{1}$$

donde los **coeficientes de Fourier** vienen dados por:

$$\alpha_{n,L} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{L} xn} dx$$

Queremos hacer que L tienda a infinito en esta expresión. Para ello notamos que los puntos:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{L} n$$

están equiespaciados a distancia $\frac{2\pi}{L}$. Entonces escribamos la serie de de Fourier como:

$$f_L(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{L} \alpha_L(\omega_n) e^{i\omega_n x} \tag{2}$$

[2] En realidad, con dichas hipótesis, la fórmula resulta cierta para casi todo x, es decir salvo quizás para los valores de x en un conjunto de medida nula.

siendo

$$\alpha_L(\omega) = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

Cuando $L \to \infty$,$\alpha_L(\omega)$ converge a la integral impropia

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

mientras que (2) puede pensarse como una suma de de Riemman para la integral impropia:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} \alpha_L(\omega_n)e^{i\omega_n x}d\omega$$

que cuando $L \to \infty$converge (formalmente) a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega_n x}$$

por lo qué cuando $L \to \infty$obtenemos formalmente la fórmula de inversión.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega$$

Como consecuencia de la fórmula de inversión, introducimos la siguiente definición.

Definición: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, definimos su **anti-transformada de Fourier** por

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{ix\omega}d\omega$$

Las propiedades de la transformada y la antitransformada de Fourier son completamente similares. Notemos que

$$\overline{\check{f}(x)} == \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\omega)}e^{-ix\omega}d\omega = \hat{\bar{f}}(x)$$

por lo que el cálculo de una anti-transformada siempre puede reducirse al de una transformada.

3. La identidad de Plancherel

Otra propiedad importante de la transformada de Fourier es la identidad de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2d\omega \tag{3}$$

Podemos nuevamente, dar una justificación heurística de esta fórmula mediante el siguiente argumento: la identidad de Parseval para las series de Fourier aplicada a (1) establece que

$$\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} |f(x)|^2dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_{n.L}|^2$$

De nuevo queremos hacer que $L \to \infty$en esta fórmula. Para ello la reescribimos como

$$\int_{-L/2}^{L/2} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{L} |\alpha(\omega_n)|^2$$

y notamos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{L} |\alpha(\omega_n)|^2$$

es una suma de Riemman para la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha_L(\omega)|^2 d\omega$$

por lo que cuando $L \to \infty$obtenemos formalmente la identidad de Plancherel (3).

4. Relación entre la derivada y la transformada de Fourier

Veremos a continuación dos importantes propiedades que relacionan la derivada con la transformada de Fourier.

Proposition 4.1. *[Transformada de una derivada] Si $f \in L^1(\mathbb{R})$es tal que $f'(x) \in L^1(\mathbb{R})$ y $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$, entonces*

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega \cdot f(\omega)$$

Dem: Integrando por partes, tenemos:

$$\int_{-R}^{R} f'(x) e^{-ix\omega} dx = f(x) e^{ix\omega}\Big|_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f(x)(-i\omega) e^{-ix\omega} dx$$

Como suponemos que $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$, en el límite cuando $R \to \infty$, obtenemos:

$$\hat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\omega} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\omega) e^{-ix\omega} dx = i\omega \cdot \hat{f}(\omega)$$

Proposition 4.2. *[Derivada de una transformada] Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ es tal que $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ entonces, su transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$es derivable y se verifica*

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \widehat{(-ix)f(x)}$$

Dem: *Utilizando la hipóteisis de que $xf(x) \in L^1(R)$ es posible justificar que es lícito derivar la integral*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

respecto del parámetro ω bajo el signo de integral[3], por lo consiguiente

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-ix\omega} dx = \widehat{(-ix)f(x)}$$

[3]De hecho, como $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-ix\omega} dx$ es **uniformemente convergente** respecto al parámetro ω (por un resultado análogo al test de Weierstrass, para integrales impropias). Esto permite justificar la derivación bajo el signo de integral.

5. Convolución. Otras propiedades de la Transformada

Definition 5.1. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ son dos funciones integrables, definimos su convolución (notada $f * g$) mediante la fórmula:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$

Veremos a continuación una propiedad que relaciona la convolución con la transformada de Fourier:

Proposition 5.2. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ entonces:*

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

Demostración: *Por la definición de la transformada,*

$$\widehat{f * g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy\right] e^{-ix\omega}dx$$

En esta integral cambiamos el orden de integración[4]*:*

$$\widehat{f * g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,e^{-ix\omega}dx\right] dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\,e^{-ix\omega}dx\right] dy$$

En la integral interior hacemos el cambio de variable $z = x - y$, obtenemos:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\,e^{-i(z+y)\omega}dx\right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\omega} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\,e^{-iz\omega}d\omega\right] dy$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\omega}dy\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\,e^{-iz\omega}dx\right] = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

6. Aplicación a la resolución de la Ecuación del Calor

La transformada de Fourier es una herramienta muy útil para la resolución de ecuacions diferenciales parciales. Consideramos como ejemplo la ecuación

$$u_t = u_{xx}$$

conocida como la ecuación del calor. Aquí $u = u(x,t)$ es una función de las variables x e y. Buscaremos una solución que satisfaga la condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x)$$

Para determinar la solución utilizando la transformada de Fourier, transformamos u en la variable x (pero no en la variable t):

[4]Esto puede justificarse utilizando el teorema de Fubini, porque la integral doble $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)e^{-ix\omega}\,dydx$ es absolutamente convergente: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)g(x-y)e^{-ix\omega}|\,dydx = \left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)dy\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|dy\right] = \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^1}$.

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\omega}dx$$

Como transformamos en la variable x.

$$\widehat{u_x}(\omega, t) = (-i\omega)\hat{u}(\omega, t)$$
$$\widehat{u_{xx}}(\omega, t) = -\omega^2\hat{u}(\omega, t)$$

mientras que:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-ix\omega}dx = \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\omega, t)$$

por lo que aplicando la transformada de Fourier a ambos miembros de la ecuación, deducimos que:

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\omega, t) = -\omega^2\hat{u}(\omega, t)$$

Esta es una ecuación ordinaria (porque sólo aparece la derivada respecto a la variable t). La solución viene dada por:

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{u}(0, t)e^{-\omega^2 t}$$

y utilizando la condición inicial:

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{u}_0(0)e^{-\omega^2 t}$$

El objetivo es calcular ahora la anti-transformada de $\hat{u_0}$. Para ello notemos que si definimos la función

$$K_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}$$

entonces (por el ejemplo 1.2 con $b = \frac{1}{4t}$) tenemos que $\widehat{K_t}(\omega) = e^{-t\omega^2}$. Utilizando la propiedad que relaciona la transformada de Fourier con la convolución, vemos que podemos escribir a la solución u_0 en la forma:

$$u(x,t) = (u_0 * K_t)(x)$$

La función K_t se conoce como el núcleo del calor. Utilizando la definición de la convolución, podemos escribir u explícitamente en la siguiente forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_o(y)e^{-(x-y)^2/4t}dy$$