Cálculo de la Transformada de Fourier de la función gaussiana utilizando variable compleja

21 de junio de 2006

Ejercicio 3 - Práctica 7

Probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Para calcular el valor de esta integral, utilizamos un truco de análisis II: vamos a relacionar el valor de esta integral con el valor de la integral doble impropia sobre todo el plano

$$I = \int\int_{\mathbb{R}^{\nvDash}} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$$

Por un lado, podemos pensar esta integral como el límite conforme $L \to \infty$ de la integral sobre el cuadrado $C_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\nvDash} : -L \leq x \leq L, -L \leq y \leq L\}$. Entonces

$$I = \lim_{L\to\infty} \int\int_{\mathbb{C}_{\mathbb{L}}} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$$

Y podemos calcular esta integral en coordenadas cartecianas, utilizando el teorema de Fubini

$$I = \lim_{L\to\infty} \left(\int_{-L}^{L} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-L}^{L} e^{-y^2} dx \right)$$

$$= \lim_{L\to\infty} \left(\int_{-L}^{L} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

Por otro lado el valor de I puede obtenerse como el límite de la integral en los círculos $C_R$de radio R centrados en el origen

$$C_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\nvDash} : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

(Como el integrando es positivo, es posible probar que el valor de la integral impropia obtenido por ambos procesos de límite, debe ser el mismo). Entonces:

$$I = \lim_{R\to\infty} \int\int_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$$

y podemos calcular facilmente esta integral utilizando coordenadas polares:

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta$$

Haciendo la sustitución $u = r^2$ tenemos que:

$$\int_0^R e^{-r^2} r\, dr = \int_0^R e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-R})$$

y cuando $R \to \infty$vemos que:

$$I = \pi$$

Como los valores de I calculados por ambos procedimientos deben coincidir, deducimos que:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$$

y tomando raíz cuadrada, obtenemos el resultado buscado.

Obs: Si hacemos el cambio de variable $x = \sqrt{b}u$, podemos deducir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bu^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{du}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

Ejercicio 7 - Práctica 7

Calcular la integral de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2} dx$$

siendo $a, b > 0$ reales, completando cuadrados en el exponente y aplicando el teorema de los residuos en rectángulo con vértices $-R$, R , $R - \frac{\mathrm{b}}{2a}i$, $-R - \frac{b}{2a}i$ (ver figura en la práctica). Llamemos $h = \frac{a}{2b}$a la altura de dicho rectángulo.

Comencemos como dice el enunciado, completando cuadrados en el exponente:

$$ia - bx^2 = b\left[(ix + \frac{a}{2b})^2 - \frac{a^2}{4b^2}\right]$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2/4b}e^{b(ix+\frac{a}{2b})^2}dx = e^{-a^2/4b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x-ih)^2}dx \quad (1)$$

Consideramos la función $f(z) = e^{-bz^2}$. Dicha función es entera (holomorfa en todo el plano complejo). Por lo tanto, por el teorema de Cauchy la integral sobre todo el contorno se anula. Dicha integral se compone de cuatro integrales a lo largo de cada uno de los lados del rectángulo:

$$0 = \int_{R}^{-R} e^{-bz^2}dz + \int_{-R}^{-R-ih} e^{-bz^2}dz + \int_{-R-hi}^{R-hi} e^{-bz^2}dz + \int_{R-hi}^{R} e^{-z^2}dz$$

(Hemos escrito las integrales siguiendo la orientación del contorno que aparece en la práctica)

Entonces, parametrizando cada lado del rectángulo y aplicando la definición de la integral, tenemos que:

$$0 = -\int_{-R}^{R} e^{-bx^2}dx + \int_{0}^{h} e^{-b(-R-yi)^2}(-i)dy + \int_{-R}^{R} e^{-b(x-hi)^2}dx - \int_{0}^{h} e^{-b(R-yi)^2}(-i)\,dy$$

Por lo tanto si podemos probar que la suma de las integrales sobre los lados verticales del rectángulo

$$V(R) = \int_{0}^{h} e^{-b(-R-yi)^2}(-i)dy - \int_{0}^{h} e^{-b(R-yi)^2}(-i)\,dy$$

tiende a cero, obtendremos en el límite cuando $R \to +\infty$, que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x-hi)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

y por consiguiente utilizando (1). concluimos que el valor de la integral Gauss es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-a^2/4b} \quad (2)$$

Resta probar que $V(R) \to 0$ cuando $R \to \infty$: para ello desarrollemos los cuadrados de binomios que aparecen en los exponentes

$$V(R) = \int_{0}^{h} e^{-bR^2-2bRyi+by^2}(-i)dy - \int_{0}^{h} e^{-bR^2+2bRi+by^2}(-i)\,dy$$

$$V(R) = e^{-bR^2}\int_{0}^{h} \left[e^{-2bRyi} - e^{2bRyi}\right](-i)e^{by^2}dy$$

Ahora, recordando la fórmula de Euler:

$$sin\, t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

deducimos que:

$$|V(R)| \leq e^{-Rb^2} \int_0^h |sin\,(2bRy)| e^{by^2} \leq e^{-Rb^2} \int_0^h e^{by^2} dy \to 0$$

cuando $R \to +\infty$, como queríamos ver.

Obs 1: Cambiando a por $-a$, es fácil ver que (2) continúa siendo verdadera en realidad, también para valores negativos de a.

Obs 2: Recordamos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$es una función integrable, se define su **transformada de Fourier** mediante la fórmula:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

Entonces la fórmula (2) establece que la transformada de Fourier de una función gaussiana es una función del mismo tipo: si $f(x) = e^{-bx^2}(b > 0)$ entonces

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\omega^2/4b}$$