Notas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

(en construcción- versión 0.1.1)

Estas son notas de las teóricas del curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (2008). Por ahora están bastante incompletas: no cubren todos los temas vistos en clase, y algunas demostraciones están incompletas.

Capítulo 1

Existencia y Unicidad

1.1. El Teorema de Existencia y Unicidad

Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideramos el problema de valores iniciales: encontrar una función $y : (a, b) \to \Omega$ de clase C^1 siendo (a, b) un intervalo que contiene a t_0, tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Para poder enunciar el teorema de existencia y unicidad de solución para este problema, necesitamos una definición:

Definición 1.1.1 *Diremos que la función $f(t, y)$ satisface una* ***condición de Lipschitz*** *con respecto a la variable y (en el abierto $\mathbb{R} \times \Omega$) si existe una constante L tal que*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \, \forall t, \forall y_1, y_2 \in \Omega$$

Diremos que $f(t, y)$ satisface localmente una condición de Lipschitz en Ω si para cada punto $(t_0, y_0) \in \Omega$ existe un entorno $U \subset \Omega$ del punto (t_0, y_0) y una constante $L = L(U)$ tales que f satisface una condición de Lipschitz cuando la restringimos a U:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \, \forall (t, y_1) \in U, (t, y_2) \in U$$

Notamos que si las derivadas$\frac{\partial f}{\partial y_i}(t, y)$ $(1 \leq i \leq n)$ son acotadas, el teorema del valor medio implica que f satisface una condición de Lipschitz. Deducimos *que si $f \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega)$ entonces f satisface localmente una condición de Lipschitz.*

Podemos entonces enunciar una primera versión del teorema de existencia y unicidad (local):

Teorema 1.1.1 *Supongamos que la función $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es continua, y satisface localmente una condición de Lipschitz en $\mathbb{R} \times \Omega$. Entonces existe un intervalo (a, b) con $a < t_0 < b$ tal que el problema de valores iniciales (1.1) posee una única solución en (a, b).*

1.1.1. El teorema de punto fijo de Banach

La prueba del teorema de existencia y unicidad, se basa un teorema de punto fijo. Para enunciarlo, necesitamos primero una definición

Definición 1.1.2 *Sea (E, d) un espacio métrico y $K : E \to E$ una aplicación. Diremos que K es un operador de contracción si existe una constante α con $0 \leq \alpha < 1$ tal que*

$$d(Ky_1, Ky_2) \leq \alpha d(y_1, y_2) \, \forall y_1, y_2 \in K$$

Teorema 1.1.2 *Sea (E, d) un espacio métrico completo y $K : E \to E$ un operador de contracción. Entonces K tiene un único punto fijo, o sea existe un único $y_0 \in E$ tal que $Ky_0 = y_0$*

1.1.2. Reformulación como un problema de punto fijo

La prueba del teorema de existencia y unicidad se basa en la siguiente observación: en virtud del teorema fundamental del cálculo, son equivalentes las siguientes dos afirmaciones

1. $y \in C[a, b] \cap C^1(a, b)$ y es solución de (1.1).
2. $y \in C[a, b]$ y es solución de la ecuación integral:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \, ds \tag{1.2}$$

Esto nos permite reformular el problema (1.1) como el problema de encontrar un punto fijo del operador:

$$Ky(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \tag{1.3}$$

Vamos a definir con precisión el dominio del operador K. Como f es continua, restringiéndonos si es necesario a un entorno de (t_0, y_0) (esto es, achicando el abierto Ω), podemos suponer sin perder generalidad, que f es acotada por una constante M:

$$|f(t, y)| \leq M \, \forall (y, t) \in \Omega$$

Introduzcamos entonces la región:

$$R_{a,b} = \{(t, y) : a < t < b, |y(t) - y_0| \leq M|t - t_0|\}$$

Entonces notamos que si $y(t)$ es una solución de (1.2) su gráfica está contenida en la región R pues:

$$|y - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s))|ds \right| \leq M|t - t_0|$$

Notamos también que dado que Ω es abierto y $(t_0, y_0) \in \Omega$ podemos encontrar un intervalo $[a, b]$ con $a < t_0 < b$ de modo que $R_{a,b} \subset \Omega$. Suponemos que hemos elegido a, b de manera que esto se cumple.

Podemos entonces considerar el espacio métrico

$$E = \{y \in C([a, b], \mathbb{R}^n) : |y(t) - y_0| \leq M|t_0 - t| \, \forall t \in [a, b]\} \tag{1.4}$$

con la distancia

$$d(y_1, y_2) = \sup_{t \in [a,b]} |y_1(t) - y_2(t)|$$

Notamos que E es un subespacio cerrado del espacio métrico completo $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, y es por lo tanto un espacio métrico completo.

Vamos a considerar el operador K actuando en el espacio E. Para elllo, hemos de demostrar que si $y \in E$ entonces $Ky \in E$.

Veamos primero que Ky es continua: esto se deduce de la acotación

$$|Ky(t_1) - Ky(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s))\, ds \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} M\, ds \right| = M|t_2 - t_1| \quad (1.5)$$

(que dice Ky satisface una condición de Lipschitz)
Veamos ahora que $Ky \in E$. De hecho:

$$|Ky(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \right| \leq M|t - t_0| \quad (1.6)$$

Para concluir la prueba del teorema de existencia y unicidad, es suficiente probar que si el intervalo (a, b) es suficientemente pequeño, K es un operador de contracción. Para ello tomemos $y_1, y_2 \in E$ y acotemos:

$$|Ky_1(t) - Ky_2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y_2(s)) \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|ds \right|$$

Utilizando entonces la hipótesis de que f satisface una condición de Lipschitz, encontramos que:

$$|Ky_1(t) - Ky_2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} L|y_1(s) - y_2(s)|ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} L\, d(y_1, y_2)ds \right| \leq L|t - t_0|\, d(y_1, y_2)$$

Entonces tomando supremo para $y \in [a, b]$ encontramos que:

$$d(Ky_1, Ky_2) \leq L \,\text{máx}\{b - t_0, t_0 - a\}\, d(y_1, y_2)$$

Deducimos que K es una contracción si $\alpha = L \,\text{máx}\, b - t_0, t_0 - a < 1$, lo cual puede lograrse eligiendo a, b suficientemente próximos a t_0.

1.2. Intervalo maximal de existencia

Es importante notar que el anterior teorema de existencia y unicidad, es de naturaleza local: sólo afirma la existencia y unicidad de la solución en un pequeño entono del punto t_0. El siguiente ejemplo muestra que en general no se puede afirmar que la solución vaya a existir para todo tiempo, aún si f es una función suave.

Ejemplo: consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) &= 1 + y^2(t) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Podemos resolverlo utilizando la técnica de separación de variables:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = dt$$

e integrando:

$$t = \int_0^t \frac{1}{1+y^2} dt + C = \tan y + C$$

donde C es una constante de integración. En virtud de la condición inicial $C = 0$. Luego la solución es:

$$y(t) = \arctan x$$

Ahora esta solución está definida en $(-\pi/2, \pi/2)$ y no puede prolongarse más allá de dicho intervalo pues:

$$\lim_{t \to \pi/2^-} y(t) = +\infty \quad \lim_{t \to -\pi/2^+} y(t) = -\infty$$

Este ejemplo motiva la siguiente definición: definimos el **intervalo maximal de existencia** de la solución $I(t_0, y_0)$como el máximo intervalo de la forma $(t_0 - t_*^-, t_0 + t_*^+)$ donde está definida una solución del problema de valores iniciales (1.1) . Llamamos a esta solución la solución maximal del problema de valores iniciales.

Es conveniente observar que si bien la sólo tenemos existencia local de soluciones, la unicidad es una propiedad global:

Lema 1.2.1 *Sean $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ dos soluciones del problema de valores iniciales (1.1) definidas en un intervalo I, con f localmente Lipschitziana. Entonces $y_1(t) = y_2(t)$ para todo $t \in I$.*

Dem.: Sea $J = \{t \in I : y_1(t) = y_2(t)\}$. Por la continuidad de y_1e y_2 es claro que J es cerrado en I. Por otro lado, por la unicidad local, I es abierto, y J es no vacío ya que $t_0 \in J$ (por la condición inicial). Como I es conexo, concluimos que $J = I$.

Corolario 1.2.1 *$I(t_0, y_0)$ es la unión de todos los intervalos de la forma $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_2)$ donde está definida una solución de (1.1).*

Teorema 1.2.1 *(caracterización del intervalo maximal de existencia)*

Si alguno de los extremos $t^*_\pm$ del intervalo maximal es finito, Cuando $t \to t^*_\pm$ la solución maximal $y(t)$ se escapa de cualquier compacto $K \subset \Omega$: es decir dado $K \subset \Omega$ existe un t_0 tal que si $t_0 < t < t^*_+$(respectivamente $t^*_- < t < t_*$) se tiene que $(t, y(t)) \notin K$.

Cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$esto dice que:

$$\lim_{t \to \to t^*_{P\pm}} y(t) = +\infty$$

1.3. Ejemplo de no unicidad

La condición de Lipschitz es necesaria para tener unicidad de la solución como muestra el siguiente ejemplo: consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t)^{1/3} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Entonces mediante el método de separación de variables, es posible encontrar una solución:

$$\frac{dy}{dt} = y^{1/3} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^{1/3}} = \int dt \Rightarrow \frac{3}{2} y^{2/3} = t + C$$

donde la constante de integración C debe anularse en virtud de las condiciones iniciales. Luego $y_0(t) = (\frac{2}{3}t)^{3/2}$da una solución del problema.

Pero una inmediata inspección revela que $y_\infty(t) \equiv 0$ es otra solución del problema. Es más es posible fabricar toda una familia de infinitas soluciones de este problema:

$$y_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ (\frac{2}{3}(t - t_0))^{3/2} & \text{si} \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

Este fenómeno puede suceder dado que la función $f(y) = y^{1/3}$no satisface una condición de Lipschitz (aunque es continua Hölder con exponente 1/3).

1.4. El flujo asociado a una ecuación diferencial

Supongamos que $f : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz. Podemos definir entonces el flujo asociado a la ecuación difernecial

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

del siguiente modo: si $y_0 \in \Omega$ y $t_1 \in \mathbb{R}$ es suficientemente próximo a t_0 , $\phi_{t_0,t_1}(y_0)$ se define como el valor $y(t)$ de la única solución del problema:

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Utilizando la unicidad podemos probar que:

$$\phi_{t_0,t_0} = Id$$

$$\phi_{t_2,t_1} \circ \phi_{t_0,t_1} = \phi_{t_2,t_0}$$

$$\phi^{-1}_{t_1,t_0} = \phi_{t_1,t_0}$$

Observación: Si tenemos un **sistema autónomo** (esto es donde f no depende de la variable t):

$$y'(t) = f(y(t))$$

entonces el flujo verifica que $\phi_{t_0,t_1}(y_0) = \phi_{0,t_1-t_0}(y_0)$. En consecuencia podemos simplificar la notación escribiendo $\phi_t(y_0) = \phi_{0,t}(y_0)$.

Las aplicaciones ϕ_t forman entonces **un grupo** local de difeomorfismos a un parámetro:

$$\varphi_0(x_0) = Id$$

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$$

$$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$$

1.4.1. Lema de Gronwal

Lema 1.4.1 *Sean $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones no negativas tales que para $\alpha \geq 0$ satisfacen:*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(\tau)v(\tau)\, d\tau$$

entonces

$$u(t) \leq \alpha \exp \int_a^t v(\tau)\, d\tau$$

En particular si $\alpha = 0$, entonces $u \equiv 0$.

Dem: Supongamos primero $\alpha > 0$. Llamemos

$$w(t) = \alpha + \int_a^t u(\tau)v(\tau)\, d\tau$$

Entonces por el teorema fundamental del cálculo:

$$w'(t) = u(t)v(t) \leq w(t)v(t)$$

en consecuencia:

$$\log\, w(t) - \log\, w(a) = \int_a^t \frac{w'(\tau)}{w(\tau)} d\tau \leq \int_a^t v(t)\, dt$$

Tomando exponencial obtenemos que:

$$u(t) \leq \alpha \exp \int_a^t v(\tau)\, d\tau$$

(Si $\alpha = 0$ el resultado se obtiene por un proceso de límite).

1.4.2. Dependencia Continua

El siguiente lema dice que la solución depende con continuidad de la condición inicial y_0:

Lema 1.4.2 *Sean y e $\tilde{y}$ soluciones de la ecuación diferencial:*

$$y' = f(t, y(t))$$

con las condiciones iniciales

$$y(t_0) = y_0$$
$$\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$$

respectivamente en el intervalo $[a, b]$*, siendo* f *una función Lipschitz entonces:*

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0|\, e^{L|t-t_0|}\ \forall t \in [a, b]$$

donde L *es la constante de Lipschitz de* f*.*

Dem: Como antes, escribamos la ecuación en forma integral:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$
$$\tilde{y}(t) = \tilde{y} + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$$

Entonces restando, tenemos que:

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| \leq |y_0 - \tilde{y}| + \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))| ds$$
$$\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + L \int_{t_0}^{t} |y(s) - \tilde{y}(s)| dt$$

Aplicamos entonces el lema de Gronwal con $\alpha = |y_0 - \tilde{y}_0|$, $u(t) = |y(t) - \tilde{y}(t)|$ y $v(t) \equiv L$. Deducimos que

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| e^{L|t-t_0|}$$

1.5. El teorema de existencia de Peano

Teorema 1.5.1 *(Peano) Supongamos que* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *y que* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*es continua. Entonces el problema de valores iniciales (1.1) tiene al menos una solución definida en algún intervalo* $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ *(pero dicha solución puede no ser única).*

Existen varias demostraciones de este teorema, todas ellas se basan en el teorema de Arzelá-Ascoli que caracteriza los subconjuntos (relativamente) compactos del espacio $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Una demostración muy sencilla puede conseguirse a partir del siguiente teorema de punto fijo de Schauder. Para enunciar el teorema necesitamos una definición

Definición 1.5.1 *Sea E un espacio de Banach y $K : E \to E$ un operador (no necesariamente lineal). Decimos que K es compacto si para cada sucesión acotada $(x_n) \subset E$ su imagen $K(x_n)$ tiene una subsucesión convergente $K(x_{n_k})$. Equivalentemente: Si para toda bola $B \subset E$, $\overline{K(B)}$ es un conjunto compacto.*

Teorema 1.5.2 *(Schauder) Si E es un espacio de Banach, $K : E \to E$ es un operador continuo y compacto, y $B \subset E$ es una bola cerrada que es invariante por K (esto es $K(B) \subset B$) entonces K admite un punto fijo en B (no necesariamente único). Es decir: existe un $x \in B$ tal que $K(x) = x$.*

Dicho teorema es una generalización para espacios de Banach del teorema de punto fijo de Brower, y tiene muchas aplicaciones en el análisis no lineal.

Para efectuar la demostración del teorema de Peano utilizando el teorema de Schauder, suponemos como antes (achicando el abierto Ω si es necesario) que $|f(t, y)| \leq M \ \forall (t, y) \in \Omega$; consideramos el espacio de Banach E definido en (1.4) y aplicamos dicho teorema al operador Kdefinido por (1.3). Las estimaciones (1.5) y (1.6) demuestran como antes que $K : E \to E$ está bien definido.

Hemos de verificar que Kes un operador compacto. Para este fin consideramos una sucesión acotada $(y_n(t)) \in E$. La estimación (1.6) implica que Ky_n es equiacotada, y (1.5) implica que Ky_nes equicontinua, en consecuencia, en virtud del teorema de Azelá-Ascoli Ky_ntiene una subsucesión (uniformenete) convergente (y es inmediato que su límite es una función en el espacio E). Como hicimos esto para cualquier sucesión acotada (y_n), podemos afirmar que K es un operador compacto.

Finalmente, hemos de probar que K admite una bola invariante. Sea f_{y_0}la función constante con valor y_0, y consideremos una bola cerrada $B = \overline{B}(f_{y_0}, R)$ para algún $R > 0$ elegido arbitrariamente. Sea $y \in B$ Tendremos que:

$$|Ky(t) - f_{y_0}(t)| = |Ky(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(t, y(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq R$$

a condición de que $|t - t_0| \leq |b - a| \leq \frac{R}{M}$. Es decir que:

$$\|Ky - f_{y_0}\| \leq R$$

Esto prueba, que si elegimos el intervalo $[a, b]$ suficientemente pequeño, el operador K tendrá una bola invariante. En virtud del teorema de Schauder, el operador K tendrá entonces un punto fijo, que será una solución de (1.1).

Capítulo 2

Sistemas lineales

2.1. Exponenciales de matrices y sistemas con coeficientes constantes

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz. Definimos la exponencial de la matriz A mediante la serie

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{2.1}$$

Para ver que esta definición tiene sentido procedemos del siguiente modo: notamos que el conjunto $\mathbb{C}^{n\times n}$ de matrices de $n \times n$ se puede convertir en un espacio normado (isomorfo a $\mathbb{C}^{n^2}$) definiendo una norma en las matrices. Por ejemplo, podemos usar la norma de A como operador lineal sobre C^n definida por:

$$\|A\| = \sup_{z\in\mathbb{C}^n, \|z\|=1} \|Az\| \tag{2.2}$$

Es claro que $\mathbb{C}^{n\times n}$ resulta un espacio normado completo (es decir: un espacio de Banach) con esta norma. Dado que se trata de un espacio de dimensión finita, cualquier otra norma que utilizáramos resultará equivalente a esta.

La norma dada por (2.2) tiene la propiedad de que:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

En consecuencia tenemos que:

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$$

y por lo tanto la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$$

es convergente (Se dice entonces que la serie (2.1) es normalmente convergente). En virtud de que $\mathbb{C}^{n\times n}$ es un espacio normado completo, la serie (2.1) resulta convergente. Además se tiene la estimación:

$$\left\| e^A \right\| \leq e^{\|A\|}$$

El siguiente lema, extiende para el caso de matrices una de sus propiedades fundamentales:

Lema 2.1.1 *Si A y B conmutan (o sea: $AB = BA$) entonces*

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

Demostración: La prueba se realiza efectuando el producto de Cauchy entre las series de e^A y e^B

$$e^A e^B = \left(\sum_{j=0} \frac{A^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0} \frac{B^k}{k!} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j,k:j+k=l} \frac{A^j B^k}{j!k!}$$

(Esta operación está justificado porque ambas series son normalmente convergentes) pero

$$\sum_{j,k:j+k=l} \frac{A^j B^l}{j!k!} = \sum_{j=0}^{l} \frac{A^j B^{l-j}}{j!(l-j)!} = \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{l!} \binom{l}{j} A^j B^{l-k} = \frac{1}{l!}(A+B)^l$$

en virtud de la fórmula del binomio (que vale porque A y B conmutan). Luego:

$$e^A e^B = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(A+B)^l}{l!} = e^{A+B}$$

$\square$

Corolario 2.1.1 *Para cualquier matriz A, e^A es una matriz inversible y $(e^A)^{-1} = e^{-A}$*

Demostración: A y $-A$ conmutan, luego $e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = I$. □

La importancia de la exponencial de matrices en la teoría de ecuaciones diferenciales radica en que nos proporciona una expresión explícita para la solución de un sistema lineal con coeficientes constantes:

Proposición 2.1.1 *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces la fórmula $x(t) = e^{tA}x_0$ proporciona la única solución del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ con la condición inicial $x(0) = x_0$.*

Demostración: Si definimos $x(t) = e^{tA}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x_0}{k!}$, y derivamos término a término respecto de la variable t,

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}\frac{A^k x_0}{k!}$$

(Esto puede justificarse de manera análoga a como se demuestra en análisis complejo que una serie de potencias puede derivarse término a término en el interior de su disco de convergencia).

$$x(t) = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}\frac{A^{k-1}x_0}{(k-1)!}\right) = Ax(t)$$

y claramente $x(0) = x_0$. La unicidad puede demostrarse invocando el teorema de existencia y unicidad o directamente, mediante el argumento siguiente: si $y(t)$ es otra soluación de la misma ecuación, que verifique la misma condición inicial $y(0) = x_0$ y definimos $u(t) = e^{-tA}y(t)$ obtenemos que:

$$\frac{du}{dt} = (-A)e^{-tA}y(t) + e^{-tA}y'(t) = (-A)e^{-tA}y(t) + e^{-tA}Ay(t)$$

y como e^{-tA} conmuta con A, resulta que $u(t)$ es constante. Como $u(0) = y(0) = x_0$, tenemos que $e^{-tA}y(t) = x_0$ para todo t, luego $y(t) = e^{tA}x_0$. □

Observación 2.1.1 *Toda las definiciones y resultados anteriores tienen sentido si en lugar de ser A una matriz en $C^{n\times n}$, A es un operador acotado en un espacio de Banach.*

Ejemplo 2: Consideramos el sistema lienal

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x \end{cases}$$

con la condición inicial

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

Para obtener las soluciones, observamos que la matriz de este sistema

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene la propiedad de que $J^2 = -I$ siendo I la matriz identidad, por lo que se comporta algebraicamente como el número complejo i. Sus potencias vienen dadas por:

$$J^0 = I, J^1 = J, J^2 = -I, J^3 = -J, J^4 = I, J^5 = J, J^6 = -I, J^7 = -J, J^8 = J, \ldots$$

(La sucesión se repite con período 4).En consecuencia,

$$e^{tJ} = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \pm \ldots\right) I + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \pm \ldots\right) J$$

$$= \cos t\; I + \text{ sen } tJ = \begin{bmatrix} \cos\ t & -\text{sen}\ t \\ \text{sen}\ t & \cos t \end{bmatrix} = R(t)$$

La matriz $R(t)$ es la matriz de una rotación en un ángulo t. La solución viene dada por

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t)\ x_0 - \text{ sen}(t)\ y_0 \\ \text{sen }(t) x_0 + \cos(t)\ y_0 \end{bmatrix}$$

La cuenta anterior es la misma que la deducción de la fórmula de Euler $e^{it} = \cos(t) + i \text{ sen } t)$. Esto se debe a que la aplicación

$$z = a + bi \mapsto M_z = aI + bJ = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

define un isomorfismo entre los números y ciertas matrices en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (una representación matricial de los números complejos) es decir que se verifica:

$$M_{z+w} = M_z + M_w, \quad M_{z\cdot w} = M_z \cdot M_w$$

También observamos que se deduce ue:

$$e^{M_z} = M_{e^z} = \begin{bmatrix} e^a \cos b & e^a \ - \operatorname{sen} b \\ e^a \operatorname{sen} b & e^a \ \cos b \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

El caso más sencillo de cálculo de la exponencial es cuando la matriz es diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_r} \end{bmatrix}$$

Esto se puede extender al caso en que A es una matriz diagonalizable (esto es: semejante a una matriz diagonal). En efecto, en este caso existirá una matriz inversible P (cuyas columnas están formadas por una base de autovectores de la matriz A) tal que $P^{-1}AP = D$, luego $A = PDP^{-1}$.

Entonces como $A^k = PD^kP^{-1}$, podemos concluir que:

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$$

En el caso general, en que la matriz A no es diagonalizable, debemos acudir a la fórma canónica de Jordan (Esta es la razón por la que preferimos trabajar con matrices en $\mathbb{C}^{n\times n}$ en esta sección). Recordamos de los cursos de álgebra lineal, que toda matriz A en $\mathbb{C}^{n\times n}$ es semejante a una matriz en forma de Jordan, esto es: existe $P \in C^{n\times n}$ inversible, tal que: $P^{-1}AP$ es de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_r} \end{bmatrix}$$

donde $J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2}, \dots, J_{\lambda_r}$ son bloques elementales de Jordan correspondientes a los autovalores de A (puede haber varios correspondientes al mismo autovalor), y tienen la forma:

$$J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Entonces tenemos que $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$, y

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_{t\lambda_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tJ_{\lambda_r}} \end{bmatrix}$$

Por lo que el problema se reduce a poder calcular $e^{tJ_{\lambda_i}}$. Para ello, observemos que la matriz J_{λ_i} se puede descomponer en la forma: $J = \lambda_i I + N$ siendo N la matriz:

$$N = N_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

una matriz nilpontente ($N^k = 0$ donde k es el tamaño de la matriz J_{λ_i} y por lo tanto de N). Notamos que $\lambda_i I$ y N conmutan, luego:

$$e^{tJ_{\lambda_i}} = e^{t\lambda_i} e^{tN}$$

Pero como N es nilpotente, la serie de e^{tN} tiene finitos términos (es un polinomio en tN), por lo que es fácil de calcular.

En efecto, calculando las potencias de la matriz N, tenemos que:

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(A medida que aumenta k, la diagonal con unos en N^k se va desplazando hacia abajo). En consecuencia, tenemos que:

$$e^{tN} = N_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2!} & t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^4}{4!} & \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} & \frac{t^{k-4}}{(k-4)!} & \frac{t^{k-5}}{(k-5)!} & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si N es una matriz de $k \times k$.

Volviendo a la matriz A, supongamos que su polinomio minimal $m_A(\lambda)$ admite la factorización:

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

Entonces los bloques elementales de jordan, en la forma de Jordan de A, correspondientes al autovalor λ_i (que pueden ser uno o varios) tendrán como máximo tamaño $k_i \times k_i$. Teniendo en cuenta la expresión para e^{tJ} y las consideraciones anteriores, se deuce el siguiente teorema:

Teorema 2.1.1 *Las entradas de la matriz e^{tJ} son funciones de la forma*

$$e^{\lambda_1 t}P_1(t) + e^{\lambda_2 t}P_2(t) + \dots e^{\lambda_r t}P_r(t)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ son los distintos autovalores complejos de A, y P_i es un polinomio de grado menor o igual que $k_i - 1$, siendo k_i la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio minimal de A.

Por consiguiente, si $x(t)$ es una solución del sistema $\dot{x} = Ax$, sus componentes tienen esta misma forma.

2.2. Aplicación a ecuaciones de orden n con coeficientes constantes

Consideremos una ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes, esto es de la forma:

$$a_n\, x^{(n)} + a_{(n-1)}\, x^{n-1} + \ldots + a_2\, x'' + a_1\, x' + a_0\, x = 0$$

siendo $x = x(t)$, $a_i \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$. Diviendo por a_n podemos suponer sin pérdida de generalidad (y así lo haremos) que $a_n = 1$.

El polinomio

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{(n-1)}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

recibe el nombre de **polinomio característico** asociado a la ecuación. La ecuación se puede escribir en forma simbólica:

$$P(D)x = 0$$

donde $P(D)$ indica una función polinomial del operador derivada.

Suponiendo que $a_n = 1$, e introduciendo las incógnitas $x_1 = x, x_2 = x', x_3 = x'', x_4 = x^{(3)}, \ldots, x_n = x^{(n-1)}$ podemos reescribir esta ecuación como un sistema de n ecuaciones de primer orden (Este razonamiento se aplica incluso al caso de coeficientes no constantes).

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= x_3 \\ \dot{x_3} &= x_4 \\ \ldots \\ \dot{x_n} &= -a_0 x_1 - a_1 x_1 - \ldots - a_{n-1} x^{n-1} \end{cases}$$

La matriz asociada a este sistema:

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

recibe en la literatura del álgebra lineal el nombre de **matriz compañera** del polinomio P. Es posible probar que tanto el polinomio característico de la matriz C_P como su minimal coinciden con P.

2.3. Formas Canónicas Reales

En algunos casos, resulta necesario trabajar en lugar de con la forma canónica de Jordan, con la denominada forma canónica real. Comenzamos por un lema sobre los autovalore complejos de matrices reales:

Lema 2.3.1 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda = a + ib$ un autovalor complejo de A con $b \neq 0$. Entonces existen vectores $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$Ax_0 = ax_0 - by_0, \quad Ay_0 = bx_0 + ay_0$$

Por lo tanto, x_0 e y_0 generan un subespacio S_λ de $\mathbb{R}^n$ invariante por A de dimensión 2, y la restricción de A (pensada como una transformación lineal[1]) a S tiene como matriz en la base $\{x_0, y_0\}$ a la matriz $M_{\overline{\lambda}}$. (utilizando la notación introducida en (2.3)))

Demostración: Sea z_0 un autovector complejo correspondiente al autovalor λ. Entonces, escribiendo $z_0 = x_0 + y_0 i$, tendremos que:

$$Az_0 = \lambda z_0 = (a + bi)(x_0 + iy_0)$$

luego igualando las partes reales e imaginarias encontramos que:

$$Ax_0 = ax_0 - by_0, \quad Ay_0 = bx_0 + ay_0$$

□

En la situación del lema $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$ también es un autovector complejo, con autovalor $\lambda = a - bi$. Y como

$$x_0 = \frac{z_0 + \overline{z_0}}{2}, \quad y_0 = \frac{z_0 - \overline{z_0}}{2i}$$

Notamos que x_0 e y_0 generan el mismo subespacio de $\mathbb{C}^n$ que z_0 y $\overline{z_0}$.

Deducimos que si la matriz A fuera diagonalizable sobre $\mathbb{C}^n$ con autovalores reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_r$, y autovalores complejos $\mu_1, \overline{\mu_1}, \mu_2, \overline{\mu_2}, \ldots, \mu_d, \overline{\mu_d}$, A será semejante sobre $\mathbb{R}$ a una matriz de la forma:

[1] dada por la matriz A en la base canónica

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & M_{\overline{\mu_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{\overline{\mu_2}} & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & M_{\overline{\mu_d}} & \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

En efecto, existirá una base formada por los autovectores $v_1, v_2, \dots, v_r$ correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_r$ y los autovectores complejos $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \dots, z_d, \overline{z_d}$ (pares de autovectores complejos conjugados). Entonces escribiendo $z_k = x_k + iy_k$ $(1 \leq k \leq d)$ como en el lema (**??**), podemos formar una base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_r, x_1, y_1, \dots, x_d, y_d\}$ de $\mathbb{C}^n$ formada por vectores reales (que será también una base de $\mathbb{R}^n$). En esa base B, la matriz de A (pensada como transformación lineal) será (2.6).

Con un argumento análogo, en el caso general en que A no es diagonalizable, podremos de todos modos probar (partiendo de la base de Jordan, en lugar de la base de autovectores) que A es semejante a una matriz real de la forma:

$$C = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_r} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & J_{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J_{\mu_2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{\mu_r} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

donde los bloques J_{λ_k} vienen dados por (2.5) para los autovalores reales λ_k, y por

$$J_{\mu_k} = \begin{bmatrix} M_{\overline{mu_k}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ I_2 & M_{\overline{mu_k}} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & M_{\overline{mu_k}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & M_{\overline{mu_k}} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & I_2 & M_{\overline{mu_k}} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

para cada par $\{\mu_k, \overline{\mu_k}\}$ de autovalores complejos conjugados, donde

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

denota la matriz identidad de 2×2. Una matriz de la forma (2.7), recibe el nombre de **forma canónica real**.

Finalmente, mediante un reescalamiento de la base de Jordan, podremos probar que dado $\varepsilon > 0$, A es semejante a una matriz de la forma:

$$C_\varepsilon = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{\lambda_r} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & J_{\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & J_{\mu_2} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{\mu_r} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

donde los bloques J_{λ_i} son de la forma:

$$J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda_i & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \lambda_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

en el caso de autovalores reales, y

$$J_{\mu_k} = \begin{bmatrix} M_{\overline{mu_k}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon I_2 & M_{\overline{mu_k}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon I_2 & M_{\overline{mu_k}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon I_2 & M_{\overline{mu_k}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon I_2 & M_{\overline{mu_k}} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Entonces, podremos probar el siguiente resultado:

Proposición 2.3.1 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $\delta > 0$. Entonces existe una matriz $D \in \mathbb{R}^n$ diagonalizable y una matriz R tales que*

i) $A = RD$

ii) $\|R - I\| < \delta$

iii) *R y D conmutan entre sí, y con cualquier matriz que venga dada por un polinomio en A.*

2.4. Comportamiento asintótico de las soluciones de un sistema lineal de coeficientes constantes

Definición 2.4.1 *Diremos que el origen 0 es una fuente (en ingles:* source*) para el sistema $\dot{x} = Ax$ si todos los autovalores de la matriz A tienen parte real positiva. Y que es un sumidero (en inglés:* sink*) si todos los autovalores de la matriz A tienen parte real negativa.*

Definición 2.4.2 *Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base en $\mathbb{R}^n$. A dicha base le asociamos el único producto interno $\langle x, y\rangle_B$ tal que*

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i = j \end{cases}$$

Es decir: tal que B es una base ortonormal respecto a dicho producto interno. Este producto interno induce una norma $\|x\|_B = \sqrt{\langle x, x\rangle_B}$, que llamamos la norma asociada a dicha base.

Teorema 2.4.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) 0 *es un sumidero para el sistema* $\dot{x} = Ax$.

b) *Existen constantes* $C > 0$ *y* $\mu > 0$ *tales que:*

$$\|e^{tA}x_0\| \leq C\|e^{-\mu t}x_0\|$$

c) *Existen una base* B *de* $\mathbb{R}^n$*, y una constante* $C > 0$ *tal que la norma asociada a dicha base verifica*

$$\|e^{tA}x_0\| \leq Ce^{-\mu t}\|x_0\| \; \forall \; t \geq 0$$

La implicación $c) \Rightarrow b)$ es evidente por la equivalentcia de normas.

La prueba de que $b) \Rightarrow a)$ se deduce inmediatamente del lema siguiente:

Lema 2.4.1 *Si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es una matriz que tiene un autovalor complejo* $\lambda = a + bi$ *con parte real* $a \geq 0$*, entonces el sistema* $\dot{x} = Ax$ *admite una solución real* $e^{tA}x_0$ *(con* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*) que no tiende a cero cuando* $t \to +\infty$.

Demostración: Si el autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ (o sea $b = 0$) la prueba es sencilla: tomamos x_0 como un autovector correspondiente a λ, entonces la solución:

$$x(t) = e^{tA}x_0 = e^{t\lambda}x_0$$

no tenderá a cero cuando $t \to +\infty$.

Cuando $\lambda \notin \mathbb{R}$, sean x_0 y y_0 como en el lema 2.3.1. Entonces el subespacio S de $\mathbb{R}^n$ generado por x_0 e y_0 es invariante por A, y por lo tanto por e^{tA}. Entonces, si tomamos un dato inicial

$$v = \alpha x_0 + \beta y_0$$

en el subespacio S tendremos que:

$$e^{tA}v = e^{ta}(\alpha \; \cos b + \beta \; \text{sen}\beta)x_0 + e^{ta}(-\alpha \; \text{sen}\; b + \beta \; \cos\beta)y_0$$

Esto es consecuencia de (2.4), ya que A restringida a S tiene como matriz la matriz $M_{t\overline{\lambda}})$ en la base formada por los vectores x_0 e y_0. Notamos que si $a \geq 0$, nuevamente estas soluciones no tienden a cero cuando $t \to +\infty$ (siempre que α o β no sean cero). $\square$

La demostración de que $a) \Rightarrow c)$ se apoya en el siguiente lema:

Lema 2.4.2 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que*

$$\alpha < Re(\lambda) < \beta \ \forall \lambda \in \sigma(A)$$

entoncees existe una base B de $\mathbb{R}^n$ tal que el producto interno asociado a dicha base verifica que:

$$\alpha \|x\|_B^2 \leq \langle Ax, x\rangle_B \leq \beta \|x\|_B^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Si por un momento, suponemos este lema demostrado, podemos demostrar que $a) \to c)$ del siguiente modo. Elijamos β tal que $\lambda_i < \beta < 0$ para todo $\lambda_i \in \sigma(A)$. Entonces, según el lema, existe una base B de $\mathbb{R}^n$ tal que el producto interno verifica

$$\langle Ax, x\rangle \leq \beta \|x\|_B^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces si $x(t) = e^{tA}x_0$ es una solución de $\dot{x} = Ax$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(t)\|_B^2 = \langle x(t), \dot{x}(t)\rangle = \langle x(t), Ax(t)\rangle_B \leq \beta \|x(t)\|_B^2$$

En consecuencia:

$$\|x(t)\|_B^2 \leq \|x_0\|_B^2 e^{\beta t}$$

y como $\beta < 0$, esto prueba la afirmación $c)$ con $\mu = -\beta/2$.

2.5. Fórmula de variación de las constantes

Proposición 2.5.1 *Consideremos una ecuación de la forma*

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de constantes, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es continua, con la condición inicial $x(t) = x_0$. Entonces la solución viene dada en la forma:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds$$

Demostración: Las soluciones del sistema lineal $\dot{x}(t) = Ax$ son $x(t) = e^{(t-t_0)A}c$, Nos proponemos encontrar una solución en para nuestra ecuación en la forma: $x(t) = e^{(t-t_0)A}c(t)$ donde $c(t)$ es ahora una función. Derivando, encontramos que:

$$\dot{x}(t) = Ae^{(t-t_0)A}c(t) + e^{(t-t_0)A}\dot{c}(t) = Ax(t) + e^{(t-t_0)A}\dot{c}(t)$$

Por lo que buscamos c tal que:

$$e^{(t-t_0)A}\dot{c}(t) = f(t)$$

lo que conduce a

$$\dot{c}(t) = e^{-(t-t_0)A}f(t)$$

o integrando, y teniendo en cuenta que debe ser $c(t_0) = x_0$ para satisfacer la condición inicial

$$c(t) = e^{tA}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A}f(s)\, ds$$

Sustituyendo encontramos que

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}c(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_0^t e^{(t-t_0)A}f(s)\, ds$$

□

2.6. Ecuaciones Lineales no autónomas

2.6.1. Matrices Fundamentales

Consideraremos a continuación un sistema de ecuaciones lineales no autónomo

$$x' = A\,(t)\,x \tag{2.12}$$

donde $A : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es una función continua.

Definición 2.6.1 *Una **solución matricial** de* (2.12) *es una función diferenciable $M : (a, b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $M'(t) = A(t)M(t)$.*

Observación 2.6.1 *Si A es constante entonces e^{tA} es una solución matricial de* (2.12).

Observación 2.6.2 *a) Si $M(t)$ es una solución matricial de (2.12) y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $M(t)x_0$ es solución de (2.12).*

b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$M(t)$ es una solución matrical de (2.12)*
2. *Cada una de las columnas de la matriz M (es decir $M_i(t) = M_i e_i$ siendo e_i los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$) es una solución de (2.12)*

(Estas obsevaciones son una consecuencia inmediata de cómo está definido el producto de matrices)

Corolario 2.6.1 *Dados $t_0 \in (a,b)$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, existe una única solución matricial $M(t)$ de (2.12) tal que $\Phi(t_0) = C$.*

Demostración: Sea $C = [C_1 C_2 \dots C_n]$ siendo C_i las columnas de C. Entonces $M(t)$ será la solución buscada si y sólo si $M = [M_1 M_2 \dots M_n]$ siendo M_i la única solución de (2.12) tal que $M_i(t_0) = c_i$. □

Teorema 2.6.1 (Liouville) *Si $M(t)$ es una solución matricial de (2.12) entonces,*

$$detM(t_2) = detM(t_1) \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} Tr\left(A\left(s\right)\right) ds\right)$$

cualesquiera sean t_1, $t_2 \in (a,b)$. Aquí $Tr\left(A\left(s\right)\right)$ denota la traza de la matriz $A\left(s\right)$.

Demostración: Haremos la demsotración en el caso de matrices de 2×2 para no complicar la notación, pero la demostración puede hacerse en forma completamente análoga para matrices de $n \times n$.

Escribamos

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \quad M(t) = \begin{pmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) \\ m_{21}(t) & m_{22}(t) \end{pmatrix}$$

Entonces, la regla para derivar un determinante (aplicada por filas) nos da que:

$$\frac{d}{dt}\det M(t) = \begin{vmatrix} m'_{11}(t) & m'_{12}(t) \\ m_{21}(t) & m_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) \\ m'_{21}(t) & \dot{m}'_{22}(t) \end{vmatrix}$$

Entonces, utilizando que $M(t)$ es una solución matricial del sistema tenemos que:

$$= \begin{vmatrix} a_{11}m_{11} + a_{12}m_{21} & a_{11}m_{12} + a_{12}m_{22} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ a_{21}m_{11} + a_{22}m_{21} & a_{21}m_{12} + a_{22}m_{22} \end{vmatrix}$$

Utilizando la multilinealidad del determinante (por filas), esto es igual a

$$a_{11} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{21} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{11} & m_{12} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$$

Y como un determinante con dos columnas iguales es nulo, obtenemos que:

$$\frac{d}{dt} \det M(t) = (a_{11} + a_{22}) \det M(t) = \mathrm{Tr}(A(t)) \det M(t)$$

Integrando esta ecuación diferencial, se obtiene el enunciado. □

Observación 2.6.3 *Supongamos que A es constante, entonces $M(t) := e^{tA}$ es solución matricial de* (2.12) *y por el Teorema de Liouville,*

$$det \left(e^{tA}\right) = e^{\int_0^t Tr(A) ds} = e^{tTr(A)}$$

De aquí, $det\left(e^{A}\right) = e^{Tr(A)}$. En particular, $det\left(e^{A}\right) > 0$ si $A\mathbb{R}^{n\times n}$.

Definición 2.6.2 *Una solución matricial $M(t)$ de* (2.12) *es una* ***matriz fundamental*** *de* (2.12) *si $M(t_0)$ es inversible para algún $t_0 \in (a,b)$.*

Y como consecuencia del Teorema de Liouville tenemos que $M(t)$ es una matriz fundamental si y sólo si $\Phi(t)$ es inversible $\forall\, t \in (a,b)$

Observación 2.6.4 *Sea $M(t)$ una matriz fundamental de* (2.12) *y sea u una solución de ese sistema. Entonces $u(t) = M(t)x_0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$. En efecto, fijemos $t_0 \in (a,b)$ y definamos $x_0 = M((t_0)^{-1}u(t_0;$ entonces $u(t)$ y $M(t)x_0$ son ambas soluciones de* (**??**) *y el resultado se sigue del Teorema* **??**. *Por lo tanto, u es solución de* (2.12) *si y sólo si $u(t) = M(t)x$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 2.6.2 *Sean $M_1(t), M_2(t)$ soluciones matriciales de* (2.12) *. Si M_1 es fundamental entonces, existe $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $M_2(t) = M_1(t)\, C$ para $t \in (a,b)$.*

Demostración: Fijemos $t_0 \in (a,b)$ y definamos $C = M_1(t_0)^{-1} M_2(t_0)$, entonces $M_2(t)$ y $M_1(t)\,C$ son soluciones matriciales de (2.12) que coinciden en t_0 y el resultado se sigue del Corolario 2.6.1. □

2.7. Sistemas lineales en que los coeficientes tienen un límite

Teorema 2.7.1 *Consideremos la ecuación lineal*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)x(t)$$

donde $B(t)$ es continua para $t \geq t_0$ con las siguientes propiedades

1. *A es diagonalizable y sus autovalores $\lambda_k (k = 1, \dots, n)$ verifican que $Re(\lambda_k) \leq 0$.*
2. *$\int_{t_0}^{\infty} \|B(s)\|\, ds < +\infty$*

entonces todas las soluciones de la ecuación son acotadas, y la solución trivial $x(t) \equiv 0$ es estable en el sentido de Lyapunov.

Demostración: Utilizamos la fórmula de variación de las constantes, para escribir ecuación en forma integral como sigue:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)x(s)\, ds \tag{2.13}$$

La hipótesis sobre la matriz A implica que:

$$\|e^{(t-t_0)A}\| \leq C\|x_0\| \;\forall t \geq t_0$$

y entonces:

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} C\|B(s)\|\|x(s)\|\, ds$$

Utilizando entonces la desigualdad de Gronwall, obtenemos la estimación

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \|B(s)\| \, ds\right)$$

y utilizando la hipótesis sobre la matriz $B(t)$ vermos que se verifica una estimación de la forma

$$\|x(t)\| \leq C_1 \|x_0\|$$

donde $C_1 = C \exp\left(\int_{t_0}^{t} \|B(s)\| \, ds\right)$, lo que claramente implica las dos afirmaciones del enunciado. □

Teorema 2.7.2 *Consideremos la ecuación lineal*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)x(t)$$

donde $B(t)$ es continua para $t \geq t_0$ con las siguientes propiedades

1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *es tal que sus autovalores $\lambda_k (k = 1, \ldots, n)$ verifican que $Re(\lambda) < 0$.*

2. $\lim_{t \to +\infty} \|B(t)\| = 0$

entonces todas las soluciones de la ecuación verfican que:

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0 \tag{2.14}$$

y en particular la solución trivial $x(t) \equiv 0$ es asintóticamente estable.

Demostración: Procedemos como en el teorema anterior, pero ahora tenemos la estimación:

$$\|e^{(t-t_0)A} x_0\| \leq C_1 e^{-\mu(t-t_0)} \; t \geq t_0$$

siendo $\mu > 0$. En consecuencia, a partir de (2.13) obtenemos la estimación:

$$\|x(t)\| \leq C_1 e^{-\mu(t-t_0)} \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} C_1 e^{-\mu(t-s)} \|B(s)\| \|x(s)\| \, ds$$

Fijamos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon C_1 < \mu$. Teniendo en cuenta la hipótesis (2.14), dado este ε podremos encontrar un $t_1(\varepsilon) \geq t_0$ tal que

$$\|B(t)\| \leq \varepsilon, \; \forall \, t \geq t_1$$

Entonces:

$$\|x(t)\| \leq C_1 e^{-\mu(t-t_0)}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1} C_1 e^{-\mu(t-s)}\|B(s)\|\|x(s)\|\, ds \int_{t_0}^{t_1} C_1 e^{-\mu(t-s)}\varepsilon\|x(s)\|\, ds$$

y sacando factor común $e^{-\mu(t-t_0)}$ tenemos que:

$$\|x(t)\| \leq C_1 e^{-\mu(t-t_0)}\left\{\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mu(s-t_0)}\|B(s)\|\|x(s)\|\, ds + \int_{t_0}^{t_1} C_1 e^{\mu(t_0-s)}\varepsilon\|x(s)\|\, ds\right\}$$

o sea:

$$e^{\mu(t-t_0)}\|x(t)\| \leq C_1\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1} C_1 e^{\mu(s-t_0)}\|B(s)\|\|x(s)\|\, ds + \int_{t_0}^{t_1} C_1 e^{\mu(s-t_0)}\varepsilon\|x(s)\|\, ds$$

Ahora notamos que:

$$\|x_0\| + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mu(s-t_0)}\|B(s)\|\|x(s)\|\, ds \leq C_2 = C_2(\varepsilon)$$

pues siendo la ecuación lineal, la solución debe existir y mantenerse acotada en todo el intervalo $[t_0, t_1]$ (La cota depende de t_1 y por lo tanto de ε]. Luego:

$$e^{\mu(t-t_0)}\|x(t)\| \leq C_1 C_2 + C_1 \int_{t_0}^{t_1} C_1 e^{\mu(s-t_0)}\varepsilon\|x(s)\|\, ds$$

Utilizando la desigualdad de Gronwall, encontramos que:

$$e^{\mu(t-t_0)}\|x(t)\| \leq C_1 C_2 \exp\left(C_1\varepsilon(t-t_0)\right)$$

o sea

$$\|x(t)\| \leq C_1 C_2 \exp\left((C_1\varepsilon - \mu)t + \mu t_0 - C_1\varepsilon t_1\right)$$

Dada la forma en que elegimos $\varepsilon > 0$, concluimos que $|x(t)| \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

2.8. Sistemas Periódicos

Estudiemos ahora el sistema

$$x' = A\,(t)\,x \tag{2.15}$$

donde $A:\ \mathbb{R} \to \mathcal{L}\,(\mathbb{R}^n)$ es continua y T-periódica para algún $T > 0$. Es decir, $A(tt+T) = A(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Se deducen inmediatamente los dos siguientes resultados

Proposición 2.8.1 *Si $u(t)$ es una solución de* (2.15) *entonces,* $u(t+T)$ *también lo es.*

Proposición 2.8.2 *Si u es una solución de* (2.15) *y* $u(0) = u(T)$ *entonces, u es T- periódica.*

Por la Proposición anterior se tiene que $v(t) := u(t+T)$ es solución de (2.15), pero por hipótesis, $v(0) = u(0)$ y por el Teorema **??**, $u \equiv v$. Es decir, $u(t) = u(t+T)$ y u resulta $T-$periódica.

En lo que sigue, $M(t)$ va a denotar la matriz fundamental de (2.15) tal que $M(0) = I$. Por la Proposición anterior sabemos que la solución $M(t)x$; con $x \in \mathbb{R}^n$ de (2.15) es T-periódica sii $M(T)x = M(0)x = x$.

Corolario 2.8.1 *El sistema* (2.15) *posee una solución T-periódica no trivial si y sólo si 1 es un autovalor de* $M(T)$.

El siguiente teorema establece una relación entre las soluciones del sistema homogéneo y no homogéneo.

Teorema 2.8.1 *Si la única solución T-periódica de* (2.15) *es la trivial entonces, la ecuación*

$$x' = A(t)x + p(t) \tag{2.16}$$

posee una única solución T-periódica para cada función T-periódica continua $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

La unicidad se sigue del Teorema **??**. Para probar la existencia, recordemos que, por la Fórmula de la Variación de las Constantes, cada solución ω de (2.16) es de la forma

$$\omega(t) = M(t)\left[x_0 + \int_0^t M(s)^{-1} p(s)\, ds\right]$$

para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ahora, de los argumentos de las Proposiciones 2.8.1 y 2.8.2, se tiene que ω es $T-$periódica si y sólo si $\omega(0) = \omega(T)$. Pero $\omega(0) = x_0$, de modo que ω es $T-$periódica si y sólo si

$$x_0 = M(T)x_0 + M(T)\int_0^T M(s)^{-1} p(s)\, ds$$

lo cual equivale a

$$[I - M(T)]\, x_0 = M(T) \int_0^T M(s)^{-1}\, p(s)\, ds \tag{2.17}$$

$I - M(T)$ es inversible, y en consecuencia, existe un único $x_0 \in \mathbb{R}^n$ que satisface (2.17).

Puede obtenerse una generalización del teorema anterior que se conoce como *Alternativa de Fredholm*. Para comprender este Teorema debemos tener en cuenta lo siguiente:

Proposición 2.8.3 *Si $M(t)$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)\, x$ entonces $\psi(t) = \left(M(t)^{-1}\right)^*$ es una matriz fundamental del sistema adjunto $y' = -A(t)^*\, y$*

Teorema 2.8.2 (Alternativa de Fredholm) Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $T-$periódica y continua. Entonces, (2.16) posee una solución $T-$ periódica si y sólo si

$$\int_0^T \langle p(t), v(t) \rangle\, dt = 0,$$

para cada solución $T-$periódica v del sistema adjunto

$$y' = -A(t)^*\, y \tag{2.18}$$

(donde A^* es la matriz transpuesta de A)

Como corolario de este teorema cuya demostración puede verse en [6] en el Teorema 5.6 se obtiene:

Proposición 2.8.4 *Si* (2.16) *posee una solución acotada entonces posee también una solución T-periódica.*

(Idea) Sea u una solución acotada de (2.16); sea z una solución $T-$periódica de (2.18) y definamos

$$\alpha = \int_0^T \langle p(t), v(t) \rangle\, dt$$

De acuerdo al Teorema 2.8.2 basta ver que $\alpha = 0$.

La pueba completa se puede ver en [6] en el Corolario 5.7

2.8.1. Multiplicadores de Floquet

En la sección anterior vimos la relación existente entre los autovalores de la matriz correspondiente a un sistema lineal autónomo con coeficientes constantes y la estabilidad de los puntos de equilibrio. Lo que haremos ahora es asociarle a (2.15) un sistema de coeficientes constantes que determine el comportamiento asintótico de las soluciones de (2.15).

Utilizaremos el siguiente Lema para cuya demostración puede verse el libro [6] Lema 5.8

Lema 2.8.1 *Dada $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible, existe $A \in C^n$ tal que* $\exp(A) = B$.

Observación 2.8.1 *El resultado anterior no es, en general, válido en el caso real. En efecto, si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B = \exp(A)$ entonces* $\det(B) = \exp(Tr(A)) > 0$.

Lema 2.8.2 *Sea $B \in R^{n\times n}$ inversible, existe $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $e^A = B^2$.*

Teorema 2.8.3 (Descomposición de Floquet-Caso complejo) *Sea $M(t)$ la matriz fundamental de (2.15) con $M(0) = I$. Entonces existe $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una función T-periódica $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $M(t) = P(t)\exp(tB)$.*

Demostración: Igual que en la demostración de la Proposición 2.8.2, tenemos que $M(t+T)$ es una matriz fundamental de (2.15), de modo que por el Teorema 2.6.2, existe $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $M(t+T) = M(t)C$. Para $t = 0$ queda $C = M(T)$, dando lugar a la relación $M(t+T) = M(t)M(T)$.

Por el Lema anterior, existe $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\exp(TB) = M(T)$ y definiendo $P(t) = M(t)\exp(-tB)$ tenemos,

$$P(t+T) = M(t+T)\exp(-TB - tB)$$

$$= M(t)M(T)\exp(-TB)\exp(-tB) = P(t)$$

puesto que $M(T)\exp(-TB) = I$. □

Observación 2.8.2 *Si bien en la descomposición de Floquet la matriz B no es única, a los efectos del análisis de la estabilidad, es suficiente encontrar una posible B.*

Observación 2.8.3 *Supongamos que estamos trabajando en $\mathbb{C}$ y $M(t)$, $P(t)$ y B son como en el Teorema precedente. Si u es una solución de (2.15) podemos escribir*

$$u(t) = M(t)x_0$$

para algún $x_0 \in \mathbb{C}^n$ y así, $u(t) = P(tt)v(t)$, donde $v(t) = \exp\,(tB)x_0$ es una solución del sistema a coeficientes constantes

$$x' = Bx \tag{2.19}$$

Recíprocamente, si v es una solución de (2.19), entonces $u(t) := P(t)v(t)$ es solución de (2.15). En efecto, recordemos que $P(t) = M(t)\exp(-tB)$, donde $M(t)$ es una solución fundamental de (2.15) y por lo tanto verifica que $M'(t) = A(t)\,M(t)$.

Calculemos $P'(t)$,

$$P'(t) = M'(t)\exp(-tB) - M(t)\exp(-tB)\,B = A(t)\,M(t)\exp(-tB) - M(t)\exp(-tB)\,B$$

Entonces,

$$\begin{gathered} u'(t) = P'(t)\,v(t) + P(t)\,v'(t) = \\ = A(t)\,M(t)\exp(-tB)\,v(t) - M(t)\exp(-tB)\,B.v(t) \\ +M(t)\exp(-tB)\,B.v(t) = A(t)\,u(t)\,. \end{gathered}$$

Así, la correspondencia $v \to Pv$ establece un isomorfismo entre el espacio de soluciones de (2.19) y el espacio de soluciones de (2.15). Esta correspondencia permite conocer el comportamiento de las soluciones de este último sistema a través del comportamiento de las soluciones de (2.19).

Observación 2.8.4 *En el caso real, se tiene una descomposición de Floquet $M(t) = P(t)e^{tB}$ para alguna función $2T$−periódica $P(t)$ de clase C^1 y alguna matriz constante B. En efecto, de la relación $M(t+T) = M(t)M(T)$ concluimos que $M(t+2T) = M(t)M(T)^2$ y del Lema 2.8.2, $M(T)^2 = e^{2TB}$ para alguna matriz B. Definimos entonces $P(t) = M(t)e^{-tB}$.*

Definición 2.8.1 *Sea $M(t)$ la matriz fundamental de (2.15) con $M(0) = I$. Los autovalores de $M(T)$ son llamados los **multiplicadores de Floquet** de ese sistema.*

Proposición 2.8.5 *$\lambda \in \mathbb{C}$ es un multiplicador de (2.15) si y sólo si ese sistema posee una solución no trivial u tal que $u(t+T) = \lambda u(t)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.*

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $M(T)$ y fijemos $x_0 \neq 0$ en $\mathbb{C}^n$, tal que $M(T)x_0 = \lambda x_0$. Si definimos $u(t) = M(t)x_0$ tenemos,

$$u(t+T) = M(t+T)x_0 = M(t)Mt(T)x_0 = M(t)\lambda x_0 = \lambda M(tt)x_0 = \lambda u(t).$$

Recíprocamente, si u es una solución no trivial de (2.15), que satisface $u(t+T) = \lambda u(t)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$, entonces, de la relación $u(t) = M(t)x_0$, con $x_0 = u(0) \neq 0$, se tiene $M(T)x_0 = u(T) = \lambda u(0) = \lambda x_0$. Por lo tanto λ es un multiplicador de Floquet de (2.15).

Definición 2.8.2 *Los autovalores de la matriz B, dada por el Teorema de Floquet, son llamados los* ***exponentes característicos****de* (2.15)*.*

Observación 2.8.5 *Ya que $M(T) = e^{TB}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ es un multiplicador de* (2.15) *si y sólo si $\lambda = e^{\nu T}$ para algún $\nu \in \sigma(B)$.*

Teorema 2.8.4 *Dado el sistema*

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{2.20}$$

donde $A : \mathbb{R} \to R^{n \to n}$ es continua y T-periódica para algún $T > 0$, el origen será asintóticamente estable, si todos los exponentes característicos tienen parte real negativa.

Por la observación hecha en 2.8.5 esto equivalente a decir que el origen será asintóticamente estable, si los multiplicadores de Floquet del sistema tienen módulo menor que 1.

Sea $x(t)$ una solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)\,x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

donde $\|x_0\| < \delta$. Entonces, de lo visto anteriormente, será $x(t) = M(t)x_0$ donde $M(t)$ es una solución fundamental del sistema. Además por el Teorema 2.8.3

$$x(t) = M(t)x_0 = P(t)\,e^{tB}x_0$$

donde B es una matriz constante y $P(t)$ es periódica de clase C^1 y por lo tanto es acotada.

Si $\sigma(B) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, sabemos por hipótesis que $Re(\lambda_i) < \mu < 0, \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$

Entonces $\|x(t)\| \leq \|P(t)\| . \left\|e^{tB}\right\| . \|x_0\| \leq C.e^{-\mu t}. \|x_0\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

El análisis de sistemas no autónomos a través de las matrices fundamentales y los multiplicadores de Floquet puede profundizarse en [2], [6] y en [4].

$\square$

Capítulo 3

Estabilidad

Definición 3.0.3 *Consideramos una ecuación difrencial autónoma*

$$\dot{x}(t) = f(x, t)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*,* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$*. Decimos que* x_0 *es un punto de equilibrio si* $f(x_0) = 0$*.*

Ejemplo: Consideremos por ejemplo la ecuación diferencial asociada al péndulo con fricción (rozamiento):

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\theta - k\dot{\theta}$$

siendo $k \geq 0$ una constante (El caso $k = 0$ corresponde a un péndulo “ideal” sin rozamiento, en el que hay conservación de la energía mecánica.)

Dado que se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, para poder analizarla en el marco de esta teoría, debemos escribirla como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orgen, introduciendo la variable $\omega = \dot{theta}$. Obtenemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\theta} & = & \omega \\ \dot{\omega} & = & -\frac{g}{l} - k\omega\ \mathrm{sen}\theta \end{array} \right.$$

Entonces llamando $x = (\theta, \omega)$ al vector de estado del sistema, podemos escribir la ecuación en la forma $\dot{x} = f(x)$ siendo

$$f(\theta, \omega) = \Big(\omega, -\frac{g}{l}\mathrm{sen}\theta - k\omega\Big)$$

Vemos que los puntos de equilibrio son $(0, k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Definición 3.0.4 *Se dice que x_0 es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cualquier solución de la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = f(x)$ que verifique $\|x(t_0) - x_0\| < \delta$ verifica que $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$. En otras palabras, si φ_t es el flujo asociado a la ecuación diferencial, pedimos que si $\|\tilde{x_0} - x_0\| < \delta$, entonces $\|\varphi_t(\tilde{x_0}) - x_0\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.*

Es importante observar que este concepto de estabilidad no es equivalente a la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial, ya que dicha dependencia continua sólo permite afirmar que la condición $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ se cumplirá para un cierto intervalo acotado de tiempo (a condición de exigir que $\|x(t_0) - x_0\| < \delta$) mientras que en la definición de estabilidad se exige que esta condición valga para todo $t \geq t_0$.

Definición 3.0.5 *Se dice que x_0 es asintóticamente estable, si es estable y existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $\|x(t_0) - x_0\| < \delta_1$, entonces la solución $x(t)$ converge a x_0 cuando $t \to +\infty$, es decir:*

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - x_0\| = 0$$

Definición 3.0.6 *Consideramos ahora una función $V = V(x)$. Diremos que V es semidefinida positiva si $V(x) \geq 0$ (semidefinida negativa si $V \leq 0$). Se dice que V es definida positiva si $V(x_0) = 0$ y existe un entorno U de x_0 tal que $V(x) > 0$ en $U - \{x_0\}$. Similarmente, V es definida negativa si en un entorno punteado $U - \{x_0\}$ de x_0 se verifica que $V(x) < 0$.*

Definición 3.0.7 *Si $V(x)$ es de clase C^1, definimos la derivada orbital de V a lo largo de una solución de $\dot{x}(t) = f(x)$ por*

$$\dot{V}(x,t) = \langle \nabla V(x,t), f(x,t) \rangle$$

Notamos que si $x = x(t)$ es una solución, entonces por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} V(x(t), t)) = \dot{V}(x(t), t)$$

Teorema 3.0.5 *Sea x_0 un punto de equilibrio para el sistema $\dot{x} = f(x,t)$. Si en un entorno de x_0 existe una función $V = V(x)$ de clase C^1 tal que $V(x_0) = 0$, V es definida positiva en un entorno de x_0, y su derivada orbital $\dot{V}$ es semidefinida negativa (o sea: $\dot{V} \leq 0$) entonces x_0 es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov.*

Una función con las propiedades requeridas en este enunciado se denomina una **Función de Lyapunov**.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$ consideramos la esfera

$$S = S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = \varepsilon\}$$

y definamos el número:

$$m = \min_S V(x) > 0$$

(que se alcanza en virtud de la compacidad de la esfera S y la continuidad de V).

Como V es continua y $V(x_0) = 0$, deducimos que existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $V(x) < m$ si$\|x - x_0\| < \delta$.

Entonces si $x(t)$ es una solución tal que $\|x(t_0) - x_0\| < \delta$, afirmamos que $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$. En efecto, en caso contrario, por el teorema de Bolzano existiría un $t_1 \geq t_1$ donde la trayectoria $x(t)$ corta a la esfera S, vale decir: $\|x(t_1) - x_0\| = \varepsilon$.

Tenemos que $V(x(t_1)) \leq V(x(t_0))$ ya que V es decreciente a lo largo de las trayectorias, en virtud de la hipótesis de que $\dot{V} \leq 0$. Pero: $V(x(t_1)) \geq m$ por la definición de m, y $V(x(t_0)) < m$ por la elección de $elta$. Luego esto es una contradicción.

Esta contradicción provino de suponer que la trayectoria $x(t)$ se escapaba del interior de la esfera S, luego debe ser $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$, como afirmamos.

Observación: El hecho de que la trayectoria no pueda escaparse del interior de la esfera S implica que la solución $x(t)$ debe existir para todo $t \geq 0$.

□

Ejemplo: Volvamos al ejemplo del péndulo con rozamiento. La energía mecánica:

$$V = 1 - \frac{g}{l}\cos\theta + \frac{1}{2}\omega^2$$

puede ser utilizada como función de Lyapunov. En efecto, calculando la derivada orbital:

$$\nabla V = \left(\frac{g}{l} - \operatorname{sen}\theta, \omega\right)$$

$$\dot{V} = \langle \nabla V, f \rangle = -k\omega^2 \leq 0$$

En consecuencia de acuerdo al teorema, la posición de equilibrio $\theta = 0$, $\omega = 0$ es estable en el sentido de Lyapunov.

En el caso $k = 0$ tenemos $\dot{V} = 0$ pues tenemos conservación de energía mecánica.

Teorema 3.0.6 *Sea x_0 un punto de equilibrio para el sistema $\dot{x} = f(x,t)$. Si en un entorno de x_0 existe una función $V = V(x)$ de clase C^1 tal que $V(x_0) = 0$, V es definida positiva en un entorno de x_0, y su derivada orbital $\dot{V}$ es definida negativa (o sea: $\dot{V} < 0$) entonces x_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*

Demostración: Por el teorema anterior, x_0 es un punto de equilibrio estable. Luego las soluciones se mantienen en la bola cerrada $B = \overline{B}(x_0, \varepsilon)$, a condición de elegir el dato inicial $x(t_0)$ suficientemente próximo a x_0.

Notamos que como $V(x(t))$ es estrictamente decreciente a lo largo de las trayectorias $x(t)$, debe existir

$$\lim_{t \to +\infty} V(x(t)) = \inf_{t \geq} V(x(t)) = l$$

Afirmamos que $l = 0$. Si fuera $l => 0$, tendríamos que $V(x(t)) \geq l$ para todo $t \geq t_0$. Como V es decreciente a lo largo de las trayectorias la órbita $x(t)$ deberá mantenerse dentro de la región

$$C = \{y \in R^n : a \leq V(y) \leq V_0\}$$

siendo $V(0) = V(x(t_0))$. Como $C \subset B$, y C es cerrada por ser V continua, deducimos que C es un compacto. Por lo tanto, existe:

$$-\mu = \inf_{y \in C} \dot{V}(y) < 0$$

Entoces deducimos que:

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} V(x(s))\, ds \leq -\mu t$$

Esto implica que $V(x(t))$ tiene que hacerse negativa para t grande, contra la hipótesis. Esta contradicción provino de suponer que $l > 0$, luego $l = 0$, es decir:

$$\lim_{t \to +\infty} V(x(t)) = 0$$

Sea ahora t_n una sucesión cualquiera de tiempos que tiende a $+\infty$. Podemos extraerle una sub-subsucesión t_{n_k} tal que $x(t_{n_k})$ converge a algún x_1 (por la compacidad de la bola B), y entonces por la continuidad de V tenemos que $V(x_{n_k}) \to V(x_1)$. Pero entonces, $V(x_1)$ y como V es definida positiva, $x_1 = 0$.

Como esto vale para cualquier sucesión de tiempos que tiende a infinito concluimos que $x(t) \to x_0$ cuanto $t \to +\infty$. □

Ejemplo: Consideramos el sistema no lineal

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -2x_2 + x_2x_3 \\ \dot{x_2} &= x_1 - x_1x_3 \\ \dot{x_3} &= x_1x_3 \end{cases}$$

El origen es un punto de equilibrio de este sistema, y

$$Df(0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De modo que $Df(0)$ tiene autovalores 0 y $\pm 2i$ (se trata de un punto de equilibrio no hiperbólico). Y no es posible utilizar el método de linealización para analizar si se trata de un punto de equilibrio estable, de modo que usaremos el método de Lyapunov. ¿Pero como podemos encontrar una función de Lyapunov?

Una función de la forma

$$V(x) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x^2$$

con $c_1, c_2, c_3 > 0$ es con frecuencia conveniente, por lo menos cuando el sistema contiene algunos términos lineales. En este caso encontramos,

$$\frac{1}{2}\dot{V}(x) = (c_1 - c_2 + c_3)(-2c_1 + c_2)x_1x_2$$

De modo que si $c_2 = 2c_1$ y $c_3 = c_1 > 0$ tendremos que $V(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $\dot{V} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. De modo que V será una cantidad conservada (Las trayectorias del sistema viven en el elipsoide $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = c$ y el orgien resulta estable en el sentido de Lyapunov.

Ejemplo: Consideramos la siguiente modificación del ejemplo anterior

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3 \\ \dot{x_2} &= x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x_3} &= x_1x_3 - x_3^3 \end{cases}$$

La función de Lyapunov que encontramos en el ejemplo anterior:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

satisface que:

$$\dot{V}(x) = -2(x_1^4 + x_2^4 + x_2^4) < 0 \text{si} x \neq 0$$

En consecuencia de acuerdo al teorema anterior el origen es asintóticamente estable para el sistema no lineal (aunque no es un sumidero para el sistema linealizado).

Ejemplo: Consideremos un sistema mecánico newtoniano

$$m\ddot{q} = -\nabla U(q)$$

Introduciendo la variable $p = m\dot{q}$ podemos escribir este sistema en la forma de un sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\nabla U(q) \end{cases}$$

siendo

$$H = H(p,q) = \frac{\|p\|^2}{2m} + U(q)$$

la función Hamiltoniana que expresa la energía mecánica en términos de las coordenadas (q,p).

Si la función U (energía potencial) tiene un mínimo estricto en $q = q_0$ entonces la función

$$V(x) = H(p,q) - U(q_0)$$

es una función de Lyapunov en un entorno de x_0, luego x_0 será un punto de equilibrio estable.

3.1. Un teorema de inestabilidad

Teorema 3.1.1 (Chetaev) *Sea x_0 un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$ y sea $V : D \to \mathbb{R}$ una función definida en un entonto de D de x_0 tal que $V(x_0) = 0$ y tal que existan puntos x_n arbitrariamente próximos a x_0 donde $V(x_n) > 0$ (Esto es: una sucesión x_n tal que $x_n \to x_0$ donde valga esto).*

Sea $r > 0$ tal que $B_r = B(x_x 0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x_0\| < r\} \subset D$. Definamos el conjunto

$$U = \{y \in B_r : V(y) > 0\}$$

Si $\dot{V} > 0$ en U, entonces $x = 0$ es inestable.

Demostración: El conjunto U es abierto. Su frontera consistirá en puntos donde $V(y) = 0$ y puntos donde $\|y - x_0\| = r$ (parte de la esfera). Como $V(x_0) = 0$, 0 está en la frontera de U.

Elijamos $x_n \in U$. Y sea $V(x_n) = a > 0$. Entonces la trayectoria $x(t)$ que comienza con $x(t_0) = x_n$ debe dejar U. Si suponemos que por el contrario $x(t) \in U$ para todo $t \geq t_0$, tendremos que $V(x(t)) \geq a$ para todo $t \geq t_0$ (pues $\dot{V} > 0$ en U)

Sea $\mu = \min\{\dot{V}(y) : \|y - x_0\| \leq r, V(y) \geq a\} > 0$ (que existe por ser el mínimo de una función continua en un compacto) Entonces:

$$V(x(t)) - V(x_n) = \int_{t_0}^{t} V(x(s))\, ds \geq \mu(t - t_0)$$

Luego $V(x(t)) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Lo que es una contradicción pues $x(t) \in U$ y V es acotada en $\overline{U}$. (por ser una función continua en un compacto).

Esta contradicción prueba que $x(t)$ debe escapar al conjunto U para algún t. Pero no puede escapar a través de la parte de la frontera donde $V(x) = 0$, pues V es creciente a lo largo de las trayectorias. Luego debe hacerlo por la parte de la frontera de U que es parte de la frontera de B_r.

$\square$

Bibliografía

[1] **V.I. Arnold**, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Second Edition, Springer- Verlag, 1989

[2] **E. A. Coddington**, N. Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations

[3] **D.L.Kreider**, Ecuaciones Diferenciales, Fondo Educativo Interamericano, Bogotá, 1973

[4] **K. Schmitt**, Non linear Analysis and Differential Equations, An Introduction. Department of Mathematics, University of Utah, 2004

[5] **J. Sotomayor**, Liçoes de Equaçoes Diferenciais Ordinarias, Coleçao Projeto Euclides, CNPq, 1979

[6] **A. Tineo y J. Rivero**, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Dpto. de Matemática Universidad de los Andes, Mérida-Venezuela