J. Math. pures et appl.,
60, 1981, p. 375 à 484

SUR LES COEFFICIENTS DE FOURIER DES FORMES MODULAIRES DE POIDS DEMI-ENTIER

Par J.-L. WALDSPURGER

Introduction

Soit f une forme modulaire holomorphe parabolique de poids demi-entier, propre pour les opérateurs de Hecke. On sait depuis Shimura [S] qu'il existe une forme modulaire φ_0, holomorphe de poids entier, propre pour les opérateurs de Hecke, ayant mêmes valeurs propres que f pour ces opérateurs. Soient n et m deux entiers, $a_n(f)$ et $a_m(f)$ les n-ième et m-ième coefficients de Fourier de f. Si m/n est un carré, on sait exprimer $a_m(f)$ en fonction de $a_n(f)$ et des valeurs propres des opérateurs de Hecke. Cela ramène le calcul de $a_n(f)$ au cas où n est sans facteur carré. On se propose de démontrer que dans ce cas, $a_n(f)$ [plus précisément son carré $a_n(f)^2$] s'exprime en fonction de la valeur au centre de symétrie (pour l'équation fonctionnelle) de la fonction L associée à la forme φ_0 tordue par le caractère quadratique associé à n. Comme on le sait, ces valeurs s'expriment elles-mêmes en fonction des « périodes » de la forme φ_0. La possibilité d'exprimer $a_n(f)$ en fonction des périodes de φ_0 avait été conjecturée par Shimura, et démontrée par Shintani [Sh].

Le point crucial de la démonstration apparaît comme une application pratique de [W], et se traite rapidement (prop. 18). La longueur de l'article, et de l'énoncé du théorème, tient à une difficulté secondaire, de nature locale. Il ne semble pas possible de (i.e. l'auteur ne sait pas) définir pour les formes de poids demi-entier, une bonne notion de newforms, c'est-à-dire de telle sorte que l'ensemble des newforms ainsi défini vérifie le théorème de multiplicité un, et permette de reconstruire l'espace des formes modulaires tout entier par des transformations simples. Dans un sous-espace propre pour les opérateurs de Hecke, on ne peut pas choisir raisonnablement une fonction particulière. On est donc conduit à les décrire toutes.

Il y aurait plusieurs façons d'énoncer le théorème. On a choisi ici de mettre en évidence les sous-espaces caractéristiques des opérateurs de Hecke.

I. — Énoncé du théorème

1. Soient k un entier impair, $k \geqq 3$, N un entier positif divisible par 4, $\underline{\chi}$ un caractère de Dirichlet défini modulo N. Si $k \geqq 5$, on note $S_{k/2}(N, \underline{\chi})$ l'espace des formes modulaires paraboliques de poids $k/2$, de caractère $\underline{\chi}$, pour le groupe $\Gamma_0(N)$ [S]. Si $k=3$, on note $S_{3/2}(N, \underline{\chi})$ le sous-espace des formes orthogonales (pour le produit scalaire de Petersson) aux séries thêta provenant d'une forme quadratique à une variable. Si p est un nombre premier ne divisant pas N, on note $T(p^2)$ l'opérateur de Hecke agissant dans $S_{k/2}(N, \underline{\chi})$ [S].

Soient M un entier positif, $\underline{\mu}$ un caractère de Dirichlet défini modulo M. On note $S_{k-1}(M, \underline{\mu})$ l'espace des formes modulaires paraboliques de poids $k-1$, de caractère $\underline{\mu}$, pour le groupe $\Gamma_0(M)$, et $S_{k-1}^{\text{new}}(M, \underline{\mu})$ le sous-ensemble (fini) des newforms [Li]. Si p est un nombre premier ne divisant pas M, on note $T(p)$ l'opérateur de Hecke agissant dans $S_{k-1}(M, \underline{\mu})$. On pose :

$$S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\mu}) = \bigcup_{M>0} S_{k-1}^{\text{new}}(M, \underline{\mu}).$$

Soit $\varphi \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\mu})$. On note $M(\varphi)$ le niveau de φ [i. e. l'entier M tel que $\varphi \in S_{k-1}^{\text{new}}(M, \underline{\mu})$]. Si p est un nombre premier, $p \nmid M(\varphi)$, on note $\underline{\lambda}_p(\varphi)$ le nombre complexe tel que $T(p)\varphi = \underline{\lambda}_p(\varphi)\varphi$. Si $\underline{\nu}$ est un caractère de Dirichlet, on note $\varphi\underline{\nu}$ la newform de caractère $\underline{\mu}\underline{\nu}^2$ telle que $\underline{\lambda}_p(\varphi\underline{\nu})\underline{\nu}(p)\underline{\lambda}_p(\varphi)$ pour presque tout p.

Si $f \in S_{k/2}(N, \underline{\chi})$, ou $\varphi \in S_{k-1}(M, \underline{\mu})$, on note $a_n(f)$ ou $a_n(\varphi)$ les coefficients de Fourier de f ou φ. Pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, on a les égalités :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\, e^{2\pi i n z}, \qquad \varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varphi)\, e^{2\pi i n z}.$$

A une forme modulaire $\varphi \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\mu})$, resp. à un caractère de Dirichlet $\underline{\nu}$, on sait associer une fonction $L(\varphi, s)$, resp. $L(\underline{\nu}, s)$. C'est une fonction d'une variable complexe s définie par la série de Dirichlet ci-dessous pour Re s assez grand et par prolongement analytique en général. Notons $\hat{\underline{\nu}}$ le caractère primitif associé à $\underline{\nu}$, et $S(\underline{\nu})$ l'ensemble des nombres premiers en lesquels ce caractère est ramifié. Pour Re s assez grand, on a :

$$L(\varphi, s) = 2(2\pi)^{1-s-k/2}\,\Gamma(s-1+k/2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varphi)\, n^{1-s-k/2},$$

$$L(\underline{\nu}, s) = L_{\mathbb{R}}(\underline{\nu}, s) \prod_{p \notin S(\underline{\nu})} (1-\hat{\underline{\nu}}(p)\,p^{-s})^{-1},$$

où :

$$L_{\mathbb{R}}(\underline{\nu}, s) = \begin{cases} \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2) & \text{si} \quad \underline{\nu}(-1)=1, \\ \pi^{-(s+1)/2}\,\Gamma((s+1)/2) & \text{si} \quad \underline{\nu}(-1)=-1. \end{cases}$$

Ces fonctions vérifient des équations fonctionnelles « en $s \mapsto 1-s$ ». On note $\varepsilon(\underline{\nu}, s)$ le « facteur ε » tel que :

$$L(\underline{\nu}^{-1}, 1-s)=\varepsilon(\underline{\nu}, s)\, L(\underline{\nu}, s).$$

2. Soient donc k et $\underline{\chi}$ fixés. On se propose de décrire l'espace $S_{k/2}(N, \underline{\chi})$. Il est nul si $\underline{\chi}(-1)=-1$. On suppose donc $\underline{\chi}(-1)=1$. Soit $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\chi}^2)$. Posons :

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)=\{f \in S_{k/2}(N, \underline{\chi});\ T(p^2)f=\underline{\lambda}_p(\varphi_0)f \text{ pour presque tout } p \nmid N\}.$$

PROPOSITION 1 (Shimura). — *On a l'égalité :*

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi})=\oplus S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0),$$

la somme étant prise sur tous les $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\chi}^2)$. □

Fixons désormais $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\chi}^2)$. On sait qu'on peut associer à φ_0 une représentation automorphe ρ_0 [III, A]. Si p est un nombre premier, ρ_0 a une composante locale $\rho_{0,\,p}$ qui est une représentation de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Soit S l'ensemble des p tels que $\rho_{0,\,p}$ ne soit pas de la série principale irréductible [III, A]. Si $p \notin S$, notons $\mu_{1,\,p}$ et $\mu_{2,\,p}$ les deux caractères de $\mathbb{Q}_p^\times$ tels que $\rho_{0,\,p} \sim \pi(\mu_{1,\,p}, \mu_{2,\,p})$. On considère l'hypothèse :

(H 1) *Pour tout* $p \notin S$, *on a l'égalité* $\mu_{1,\,p}(-1)=\mu_{2,\,p}(-1)=1$.

PROPOSITION 2 (Flicker). — *Il existe* N *tel que* $S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0) \neq \{0\}$ *si et seulement si l'hypothèse* (H 1) *est vérifiée.*

3. Soit $\underline{\chi}_0$ le caractère défini par $\underline{\chi}_0(n)=\underline{\chi}(n)(-1/n)^{(k-1)/2}$. Soit p un nombre premier, notons v_p la valuation p-adique de $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}_p$ [II, 1]. On peut définir un entier $\tilde{n}_p$, et pour tout $e \in \mathbb{N}$, un ensemble $U_p(e, \varphi_0)$ de fonctions définies sur $\mathbb{Q}_p^\times$. La définition de ces objets est longue, et nous la reportons au VIII. Donnons simplement quelques indications sur leurs propriétés :

1° $\tilde{n}_p$ et $U_p(e, \varphi_0)$ ne dépendent que des composantes locales en p de la représentation automorphe ρ_0 et du caractère $\underline{\chi}_0$;

2° on a les inégalités :

$$v_p(M(\varphi_0)) \leqq \tilde{n}_p \leqq v_p(M(\varphi_0))+1 \quad \text{si} \quad p \neq 2,$$
$$v_2(M(\varphi_0))+1 \leqq \tilde{n}_2 \leqq v_2(M(\varphi_0))+3;$$

3° pour $e \in \mathbb{N}$, l'ensemble $U_p(e, \varphi_0)$ est fini, à au plus deux éléments si $p \neq 2$, quatre éléments si $p=2$. Il est vide si $e<\tilde{n}_p$, non vide si $e=\tilde{n}_p$;

4° les fonctions appartenant à $U_p(e, \varphi_0)$ sont définies sur $\mathbb{Q}_p^\times$, à support dans $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}_p^\times$, continues (et même invariantes par l'ensemble $\mathbb{Z}_p^{\times 2}$ des unités de $\mathbb{Z}_p$ qui sont des carrés);

5° dans le cas général, i. e. si $p \neq 2$ et si p ne divise ni $M(\varphi_0)$ ni le conducteur de $\underline{\chi}_0$, on a $\tilde{n}_p=0$, et $U_p(0, \varphi_0)=\{c_p^0\}$, où c_p^0 est la fonction définie de la façon suivante : pour $u \in \mathbb{Q}_p^\times$;

si $v_p(u)<0$, $c_p^0(u)=0$;

si $v_p(u)=0$:

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_p^0(up^{2h})X^h=(1-(p,u)_p\underline{\chi}_0(p)p^{-1/2}X)(1-\underline{\lambda}_p(\varphi_0)p^{1-k/2}X+\underline{\chi}_0(p^2)X^2)^{-1},$$

si $v_p(u)=1$:

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_p^0(up^{2h})X^h=(1-\underline{\lambda}_p(\varphi_0)p^{1-k/2}X+\underline{\chi}_0(p^2)X^2)^{-1},$$

où $(\ ,\ )_p$ est le symbole de Hilbert défini sur $\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times$. En particulier $c_p^0(u)=1$ si $v_p(u)=0$ ou 1. Ces formules sont liées à celles exprimant l'effet de l'opérateur $T(p^2)$ sur les coefficients de Fourier d'une forme modulaire de poids demi-entier [S].

On pose $\tilde{N}(\varphi_0)=\prod_p p^{\tilde{n}_p}$.

4. On note $\mathbb{N}^{sc}$ l'ensemble des entiers positifs sans facteur carré, et pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geqq 1$, n^{sc} l'unique élément de $\mathbb{N}^{sc}\cap(n\mathbb{Q}^{\times 2})$. Soient $\underline{A}$ une fonction de $\mathbb{N}^{sc}$ dans $\mathbb{C}$, et E un entier divisible par $\tilde{N}(\varphi_0)$. Posons $e_p=v_p(E)$ pour tout nombre premier p, et soit $\underline{c}_E=(c_p)$ un élément de $\prod_p U_p(e_p,\varphi_0)$, le produit étant pris sur tous les nombres premiers p. Si $n\geqq 1$, $z\in\mathbb{C}$, Im $z>0$, on pose :

$$a_n(\underline{c}_E,\underline{A})=\underline{A}(n^{sc})\,n^{(k-2)/4}\prod_p c_p(n),$$

$$f(\underline{c}_E,\underline{A})(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\underline{c}_E,\underline{A})\,e^{2\pi i n z}.$$

On note $\overline{U}(E,\varphi_0,\underline{A})$ l'espace engendré par les fonctions $f(\underline{c}_E,\underline{A})$ pour $\underline{c}_E\in\prod_p U_p(e_p,\varphi_0)$.

On considère l'hypothèse :

(H 2) *L'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(*a*) *la composante locale* $\rho_{0,2}$ *n'est pas supercuspidale;*

(*b*) *le conducteur de* $\underline{\chi}_0$ *est divisible par* 16;

(*c*) $M(\varphi_0)$ *est divisible par* 16.

Si $t\in\mathbb{Q}^\times$, on note $\underline{\chi}_t$ le caractère de Dirichlet quadratique associé à l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{t})$. En particulier, si $t\in\mathbb{Q}^{\times 2}$, $\underline{\chi}_t(n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\varphi_0\in S_{k-1}^{new}(\underline{\chi}^2)$. *Supposons que* φ_0 *vérifie les hypothèses* (H 1) *et* (H 2). *Il existe une fonction* $\underline{A}^{\varphi_0}:\mathbb{N}^{sc}\to\mathbb{C}$, *telle que :*

(i) *pour* $t\in\mathbb{N}^{sc}$ *:*

$$\underline{A}^{\varphi_0}(t)^2=L(\varphi_0\underline{\chi}_0^{-1}\underline{\chi}_t,1/2)\,\varepsilon(\underline{\chi}_0^{-1}\underline{\chi}_t,1/2),$$

(ii) *pour tout entier* $N\geqq 1$:

$$S_{k/2}(N,\underline{\chi},\varphi_0)=\oplus\overline{U}(E,\varphi_0,\underline{A}^{\varphi_0}),$$

sommé sur les entiers $E \geqq 1$ *tels que* $\tilde{N}(\varphi_0) \mid E \mid N$.

Comme on le voit, la signification essentielle de ce théorème est qu'on peut définir une base de l'espace $S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)$ telle que si f est un élément de cette base et si n est un entier sans facteur carré, le coefficient de Fourier $a_n(f)$ soit le produit de deux termes :

– l'un est un produit de termes locaux, chacun de ces termes ne dépendant que du comportement local de φ_0 et de $\underline{\chi}$;

– l'autre, plus intéressant, est de nature globale. Son carré est la valeur au centre de symétrie de la fonction L de la forme φ_0 tordue par un caractère dépendant de n.

La définition des ensembles $U_p(e, \varphi_0)$ [VIII] met en évidence les sous-espaces caractéristiques des opérateurs $T(p^2)$. En particulier soient $\underline{c}_E = (c_p) \in \prod_p U_p(e_p, \varphi_0)$, et p un nombre premier. Supposons que p soit du cas général [I, 3], $e_p = 0$, $c_p = c_p^0$. Alors $f(\underline{c}_E, \underline{A}^{\varphi_0})$ est fonction propre pour $T(p^2)$, de valeur propre $\underline{\lambda}_p(\varphi_0)$.

Les inégalités 2 du I, 3 confirment le fait que si $f \in S_{k/2}(N, \underline{\chi})$ est propre pour les opérateurs de Hecke, le niveau de son relèvement de Shimura φ_0 divise $N/2$ (mais ne lui est pas toujours égal).

COROLLAIRE 1. – *Soit* $N \geqq 1$. *Si le conducteur de* $\underline{\chi}$ *n'est pas divisible par* 16, *on suppose que* N *n'est pas divisible par* 8. *On a alors la décomposition :*

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}) = \bigoplus_{\varphi_0, E} \overline{U}(E, \varphi_0, \underline{A}^{\varphi_0})$$

sommé sur les $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\chi}^2)$ *vérifiant l'hypothèse* (H 1) *et sur les entiers* $E \geqq 1$ *tels que* $\tilde{N}(\varphi_0) \mid E \mid N$.

Prolongeons $\underline{\chi}$ de façon évidente à l'ensemble des $t \in \mathbb{Q}^\times$ tels que $v_p(t) = 0$ pour tout p divisant le conducteur de $\underline{\chi}$.

COROLLAIRE 2. – *Soient* $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\chi}^2)$, *vérifiant l'hypothèse* (H 1), $N \geqq 1$, $f \in S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^{\text{sc}}$. *Supposons que* $n_1/n_2 \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ *pour tout* $p \mid N$. *Alors on a l'égalité :*

$$a_{n_1}(f)^2 L(\varphi_0 \underline{\chi}_0^{-1} \chi_{n_2}, 1/2) \underline{\chi}(n_2/n_1) n_2^{k/2-1} = a_{n_2}(f)^2 L(\varphi_0 \underline{\chi}_0^{-1} \chi_{n_1}, 1/2) n_1^{k/2-1}.$$

Il est implicite dans ces énoncés que N est divisible par 4 et par le conducteur de $\underline{\chi}$.

II. — Notations, normalisations, formulaire

1. La lettre p désigne toujours un nombre premier. On note v_p la valuation associée, définie sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}_p$. Le symbole $\mathbb{Q}_v$ désigne le complété de $\mathbb{Q}$ en une place v. On définit dans la suite des objets relatifs à une place v de $\mathbb{Q}$. On les indice par la lettre v. Si v est associée à un nombre premier p (resp. est la place réelle), ce qu'on notera parfois $v = p$, on pourra aussi

bien les indicer par p (resp. $\mathbb{R}$). Soient A l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, $A^\times$ le groupe de ses idèles.

2. Si $\underline{\chi}$ est un caractère de Dirichlet défini sur $\mathbb{Z}$, on note χ le caractère de $A^\times/\mathbb{Q}^\times$ associé à $\underline{\chi}$. On a $\chi = \bigotimes_v \chi_v$, produit sur toutes les places v de $\mathbb{Q}$, avec $\chi_{\mathbb{R}}(t)=1$ si $t \in \mathbb{R}_+^\times$, et, pour presque tout p, $\chi_p(p)=\underline{\chi}(p)$. Si $t \in \mathbb{Q}^\times$, on note χ_t le caractère quadratique de $A^\times/\mathbb{Q}^\times$ associé à l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{t})$.

On note ψ le caractère de $A/\mathbb{Q}$, de composantes locales ψ_v, tel que si $t \in \mathbb{R}$, $\psi_{\mathbb{R}}(t)=e^{2\pi i t}$. Si p est premier, $t \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$\psi_p(tp^{-m}) = e^{-2\pi i t p^{-m}}.$$

Soit v une place de $\mathbb{Q}$. Si $\nu \in \mathbb{Q}_v^\times$, on note ψ_v^ν le caractère $\psi_v^\nu(t)=\psi_v(\nu t)$. On note $(\ ,\ )_v$ le symbole de Hilbert, défini sur $\mathbb{Q}_v^\times \times \mathbb{Q}_v^\times$, à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Pour $t \in \mathbb{Q}_v^\times$, on définit le facteur de Weil $\gamma_v(t)$ associé au caractère ψ_v et à la forme quadratique tx^2 [Weil], p. 19, et :

$$\tilde{\gamma}_v(t)=(t,\ t)_v\,\gamma_v(t)\,\gamma_v(1)^{-1}.$$

On a les égalités :

$$\tilde{\gamma}_v(tt')=(t,\ t')_v\,\tilde{\gamma}_v(t)\,\tilde{\gamma}_v(t'),$$
$$\tilde{\gamma}_v(t^2)=1.$$

Si v est réelle, on note $|\ .\ |_v$ la valeur absolue usuelle, $d_v t$ la mesure usuelle, $d_v^\times t = |t|_v^{-1} d_v t$. Soit $K_v = SO_2(\mathbb{R})$. On choisit pour mesure de Haar sur K_v celle de masse totale 1. Si $v=p$, on note $|\ .\ |_v$ la valeur absolue de $\mathbb{Q}_p$ telle que $|p|_v = p^{-1}$, $d_v t$ la mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p$ donnant à $\mathbb{Z}_p$ la mesure 1, $d_v^\times t$ la mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p^\times$ donnant à $\mathbb{Z}_p^\times$ la mesure 1. On pose $K_p = GL_2(\mathbb{Z}_p)$. On choisit pour mesure de Haar sur K_p celle de masse totale 1.

Ces définitions conduisent naturellement à des définitions globales (sur A) de ψ^ν, $\tilde{\gamma}$, etc. En particulier si $t \in \mathbb{Q}^\times$, $\tilde{\gamma}(t)=1$.

3. On note G le groupe algébrique GL_2, Z son centre. Soit v une place de $\mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Q}_v$, a, $t \in \mathbb{Q}_v^\times$. On définit les éléments de G_v :

$$\underline{n}=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad \underline{\underline{a}}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad z(t)=\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},\qquad w=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On choisit pour mesure de Haar sur $Z_v \backslash G_v$ la mesure :

$$d_v g = d_v^\times a\, d_v n\, d_v k \qquad \text{si} \quad g=z(t)\underline{\underline{a}}\underline{n}k \quad \text{avec } k \in K_v.$$

On a ici aussi des définitions globales analogues. Si $v=p$ et $m \in \mathbb{N}$, on note $K_p(m)$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_p$ telles que $v_p(c) \geq m$.

4. Si v est une place de $\mathbb{Q}$, on note $\tilde{S}_v$ le groupe métaplectique, extension de degré 2 de $SL_2(\mathbb{Q}_v)$. De même $\tilde{S}_A$ désigne le groupe métaplectique, extension de degré 2 de $SL_2(A)$. Rappelons qu'on peut identifier $\tilde{S}_v$ (resp. $\tilde{S}_A$) à $SL_2(\mathbb{Q}_v) \times \{\pm 1\}$ [resp. $SL_2(A) \times \{\pm 1\}$], la multiplication étant définie au moyen d'un cocycle β_v (resp. β_A) :

$$(\sigma,\ \varepsilon)(\sigma',\ \varepsilon')=(\sigma\sigma',\ \varepsilon\varepsilon'\beta(\sigma,\ \sigma')),$$

$\beta=\beta_v$ ou β_A. Ces cocycles sont définis de la façon suivante. Soit $\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Q}_v)$. On pose $x(\sigma)=c$ si $c\neq 0$, $x(\sigma)=d$ si $c=0$. Si v est réelle, $s_v(\sigma)=1$. Si $v=p$, $s_v(\sigma)=(c, d)_v$ si $cd\neq 0$ et $v_p(c)$ est impair, $s_v(\sigma)=1$ sinon. Alors :

$$\beta_v(\sigma, \sigma')=(x(\sigma), x(\sigma'))_v(-x(\sigma)x(\sigma'), x(\sigma\sigma'))_v\, s_v(\sigma)s_v(\sigma')s_v(\sigma\sigma').$$

Soit $\sigma=(\sigma_v)\in SL_2(A)$. On pose :

$$s_A(\sigma)=\prod_v s_v(\sigma_v), \qquad \beta_A(\sigma, \sigma')=\prod_v \beta_v(\sigma_v, \sigma'_v).$$

L'application $\sigma\mapsto(\sigma, s_A(\sigma))$ est un homomorphisme de $SL_2(\mathbb{Q})$ dans $\tilde{S}_A$. On note $S_{\mathbb{Q}}$ son image. Si $\sigma\in SL_2(\mathbb{Q}_v)$ [resp. $SL_2(A)$], on note encore σ l'élément $(\sigma, 1)$ de $\tilde{S}_v$ (resp. $\tilde{S}_A$). Si $\sigma\in\tilde{S}_v$, on notera parfois $\sigma|_v$ l'élément de $\tilde{S}_A$ de composantes locales $\sigma_{v'}$, avec $\sigma_v=\sigma$, $\sigma_{v'}=1$ si $v'\neq v$. On pourra aussi le noter simplement σ si cela ne crée pas de confusion.

Si U est un sous-ensemble de $SL_2(\mathbb{Q}_v)$ [resp. $SL_2(A)$], on note $\tilde{U}$ son image réciproque dans $\tilde{S}_v$ (resp. $\tilde{S}_A$).

On pose $\Gamma_{\mathbb{R}}=SO_2(\mathbb{R})$, $\Gamma_p=SL_2(\mathbb{Z}_p)$. Si $n\in\mathbb{N}$, on note $\Gamma_p(n)$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_p$ telles que $v_p(c)\geqq n$. Si $\eta\in\mathbb{Q}_v$, $\alpha\in\mathbb{Q}_v^\times$ (resp. $\eta\in A$, $\alpha\in A^\times$), on définit les éléments de $\tilde{S}_v$ (resp. $\tilde{S}_A$) :

$$\underline{\eta}=\begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d_v(\alpha)=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \qquad w=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

($\underline{\eta}$ et w désignent donc, suivant le contexte, des éléments de G ou $\hat{S}$). On choisit pour mesure de Haar sur Γ_v celle de masse totale 1.

5. On note $\tilde{\mathscr{A}}_0$ l'espace des formes automorphes paraboliques sur $S_{\mathbb{Q}}\backslash\tilde{S}_A$, $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$ le sous-espace des formes orthogonales (pour le produit scalaire de $L^2(S_{\mathbb{Q}}\backslash\tilde{S}_A)$) aux séries thêta provenant d'une forme quadratique à une variable. On note $\tilde{\mathscr{H}}_v$ (resp. $\tilde{\mathscr{H}}_A$) l'algèbre de Hecke du groupe $\tilde{S}_v$ (resp. $\tilde{S}_A$). Ces algèbres agissent dans l'espace $\tilde{\mathscr{A}}_0$. Si $\nu\in\mathbb{Q}^\times$ et $t\in\tilde{\mathscr{A}}_0$, on définit le ν-ième coefficient de Fourier de t. C'est la fonction sur $\tilde{S}_A$:

$$\sigma\mapsto\tilde{W}(\nu, t, \sigma)=\int_{\mathbb{Q}\backslash A} t(\underline{\eta}\sigma)\psi(-\nu\eta)\,d\eta.$$

Soit μ un caractère de $A^\times/\mathbb{Q}^\times$. On note $\mathscr{A}_0(\mu)$ l'espace des formes automorphes paraboliques sur $G_{\mathbb{Q}}\backslash G_A$, de caractère central μ. Si $\mu=1$, on note simplement $\mathscr{A}_0=\mathscr{A}_0(1)$. On note $\mathscr{H}_v$ (resp. $\mathscr{H}_A$) l'algèbre de Hecke du groupe G_v (resp. G_A). Ces algèbres agissent dans l'espace $\mathscr{A}_0(\mu)$. Soit ρ une représentation de $\mathscr{H}_A$ dans un sous-espace irréductible de $\mathscr{A}_0(\mu)$. On note $L(\rho, s)$ la fonction L associée à cette représentation [JL], p. 350. De même, si ρ_v est une représentation admissible irréductible de $\mathscr{H}_v$ de dimension infinie, on note $L(\rho_v, s)$ sa fonction L associée.

6. Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on pose :

$$k(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in\Gamma_{\mathbb{R}}$$

et :

$$\tilde{k}(\theta)=\begin{cases}(k(\theta),\ 1) & \text{si}\quad \theta\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\,]4n\pi-\pi,\ 4n\pi+\pi],\\ (k(\theta),\ -1) & \text{si}\quad \theta\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\,]4n\pi+\pi,\ 4n\pi+3\pi].\end{cases}$$

On vérifie que $\tilde{k}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$ sur $\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}$.

Soit p un nombre premier. Si $p\neq 2$ et $t\in\mathbb{Z}_p^{\times}$, on a l'égalité $\tilde{\gamma}_p(t)=1$. Par contre, si $p=2$:

$$\tilde{\gamma}_2(1)=\tilde{\gamma}_2(5)=1,\qquad \tilde{\gamma}_2(3)=\tilde{\gamma}_2(7)=-i,$$

i.e. pour $t\in\mathbb{Z}_2^{\times}$:

$$\tilde{\gamma}_2(t)=(1/2)[1-i+(1+i)\chi_{-1,2}(t)].$$

Soit $\sigma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_2(2)$. On pose :

$$\tilde{\varepsilon}_2(\sigma)=\begin{cases}\tilde{\gamma}_2(d)^{-1}(c,\ d)_2\, s_2(\sigma) & \text{si}\quad c\neq 0,\\ \tilde{\gamma}_2(d) & \text{si}\quad c=0.\end{cases}$$

On vérifie que $\tilde{\varepsilon}_2$ se prolonge en un caractère impair du groupe $\widetilde{\Gamma_2(2)}$.

Rappelons les formules :

si $p\neq 2$, et $t\in\mathbb{Q}_p^{\times}$:

$$\sum_{u\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}}(p,\ -u)_p\,\psi_p(utp^{-1})=\begin{cases}p^{1/2}\tilde{\gamma}_p(p)(p,\ t)_p & \text{si}\quad v_p(t)=0,\\ 0 & \text{si}\quad v_p(t)\neq 0;\end{cases}$$

$$(-1,\ -1)_2=-1,\qquad (2,\ -1)_2=\tilde{\gamma}_2(2)=1.$$

7. Si B′ est un sous-ensemble d'un ensemble B, on note car (B′) la fonction caractéristique de B′, et car (B′, x) sa valeur en un point x de B.

Soit μ un caractère de $\mathbb{Z}_p^{\times}$. On note $n(\mu)$ le plus petit entier n tel que μ soit trivial sur $1+p^n\mathbb{Z}_p$, si μ est ramifié, et $n(\mu)=0$ si μ est non ramifié. Pour $p=2$, il n'y a pas de caractère μ tel que $n(\mu)=1$. Si $t\in\mathbb{Q}_p^{\times}$, on pose :

$$\eta(\mu,\ t)=\int_{\mathbb{Z}_p^{\times}}\mu(u)\psi_p(tu)\,d^{\times}u.$$

On a les égalités :

– soient $h\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{Z}_p^{\times}$:

si $\mu=1$:

$$\eta(\mu,\ p^h a)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad h\geqq 0,\\ -1/(p-1) & \text{si}\quad h=-1,\\ 0 & \text{si}\quad h<-1;\end{cases}$$

si $\mu \neq 1$;

$$\eta(\mu, p^h a) = \begin{cases} \mu^{-1}(a)\,\eta(\mu, p^h) & \text{si} \quad h = -n(\mu), \\ 0 \quad \text{si} \quad h \neq -n(\mu); \end{cases}$$

— si $p \neq 2$,

$$\eta(\chi_{p,p}, p^{-1}) = (p-1)^{-1} p^{1/2} \tilde{\gamma}_p(p)^{-1};$$

— si $p = 2$:

$$\eta(\chi_{-1,2}, 2^{-2}) = i, \qquad \eta(\chi_{2,2}, 2^{-3}) = 2^{-1/2}, \qquad \eta(\chi_{-2,2}, 2^{-3}) = -i\,2^{-1/2}.$$

LEMME 1. — *Soient μ un caractère ramifié de $\mathbb{Z}_p^\times$, $n = n(\mu)$, m la partie entière de $(n+1)/2$:*
1° *il existe $a(\mu) \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que pour tout $u \in \mathbb{Z}_p$,*

$$\mu(1 + p^m u) = \psi_p(p^{m-n} a(\mu)\, u);$$

2° *soit $a(\mu)$ comme ci-dessus. On a l'égalité :*

$$\eta(\mu, p^{-n}) = p^{1-m}(p-1)^{-1}\,\mu(-a(\mu))\,\psi_p(-p^{-n} a(\mu)) \sum_u \mu(1 + p^{n-m} u)\,\psi_p(-a(\mu)\,p^{-m} u),$$

la somme étant prise sur les $u \in \mathbb{Z}_p / p^{2m-n}\mathbb{Z}_p$ si $n \neq 1$, sur les $u \in \mathbb{Z}_p / p\,\mathbb{Z}_p$ tels que $u \equiv -1 \bmod p$ si $n = 1$;

3° *Soient $a(\mu)$ comme ci-dessus et μ' un caractère de $\mathbb{Z}_p^\times$ tel que $n(\mu') \leqq n - m$. Alors :*

$$\eta(\mu\mu', p^{-n}) = \mu'(-a(\mu))\,\eta(\mu, p^{-n}).$$

Soit maintenant μ un caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$. On pose $n(\mu) = n(\mu|_{\mathbb{Z}_p^\times})$. Pour $s \in \mathbb{C}$, on note $L(\mu, s)$ la fonction L de μ, et $\varepsilon(\mu, s)$ le facteur ε de μ relatif au caractère ψ_p. On a les formules :

$$\varepsilon(\mu^{-1}, 1/2) = \mu(-1)\,\varepsilon(\mu, 1/2)^{-1},$$

si μ est non ramifié, $\varepsilon(\mu, 1/2) = 1$;
si μ est ramifié;

$$\varepsilon(\mu, 1/2) = (p-1)\,p^{n(\mu)/2-1}\,\mu(p^{-n(\mu)})\,\eta(\mu|_{\mathbb{Z}_p^\times}, p^{-n(\mu)}).$$

III. — Le dictionnaire

A. La correspondance entre formes modulaires de poids entier et formes automorphes sur G_A étant bien connue, on se bornera ici à donner un formulaire.

1. Soient k un entier impair, $k \geqq 3$, M un entier positif, $\underline{\mu}$ un caractère de Dirichlet défini modulo M. On a déjà défini les ensembles $S_{k-1}(M, \underline{\mu})$, $S_{k-1}^{\text{new}}(M, \underline{\mu})$ et $S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\mu})$. Si p est un nombre premier, on note $T(p)$ ou $T'(p)$, selon que $p \nmid M$ ou $p \mid M$, l'opérateur de Hecke agissant dans $S_{k-1}(M, \underline{\mu})$. Soit $\varphi \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\mu})$. On note $M(\varphi)$ le niveau de φ, $m_p(\varphi) = v_p(M(\varphi))$, $\underline{\lambda}_p(\varphi)$ ou $\underline{\lambda}'_p(\varphi)$, selon que $p \nmid M(\varphi)$ ou $p \mid M(\varphi)$, le nombre

complexe tel que $T(p)\varphi=\underline{\lambda}_p(\varphi)\varphi$ ou $T'(p)\varphi=\underline{\lambda}'_p(\varphi)\varphi$. On pose $\lambda_p(\varphi)=p^{1-k/2}\underline{\lambda}_p(\varphi)$, ou $\lambda'_p(\varphi)=p^{1-k/2}\underline{\lambda}'_p(\varphi)$. Si $p \nmid M(\varphi)$, on note $\alpha_p(\varphi)$, $\alpha'_p(\varphi)$ les nombres complexes tels que $\alpha_p(\varphi)+\alpha'_p(\varphi)=\lambda_p(\varphi)$, $\alpha_p(\varphi)\alpha'_p(\varphi)=\underline{\mu}(p)$.

2. Soient maintenant $\underline{\chi}$ un caractère de Dirichlet et $\varphi_0\in S^{\text{new}}_{k-1}(\underline{\chi}^2)$. On peut associer à φ_0 une représentation automorphe ρ_0 de $\mathscr{H}_A$, de composantes locales $\rho_{0,v}$. Rappelons la définition de ces représentations. On utilise les notations de [J-L] en ce qui concerne les représentations de $\mathscr{H}_v$:

1° pour la place réelle, $\rho_{0,r}\sim\sigma(|\,.\,|_r^{k/2-1},|\,.\,|_r^{1-k/2})$.

Soit p un nombre premier. On note Ω_p l'ensemble des caractères de Dirichlet primitifs de conducteur une puissance de p (en convenant que le caractère un appartient à Ω_p);

2° $\rho_{0,p}$ est supercuspidale si et seulement si pour tout $\underline{\mu}\in\Omega_p$, $m_p(\varphi_0\underline{\mu})\geqq 1$ et $\underline{\lambda}'_p(\varphi_0\underline{\mu})=0$;

3° $\rho_{0,p}$ est spéciale si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $\underline{\mu}\in\Omega_p$, $m_p(\varphi_0\underline{\mu})\geqq 1$;

(ii) il existe un unique $\underline{\mu}^0\in\Omega_p$ tel que $\underline{\lambda}'_p(\varphi_0\underline{\mu}^0)\neq 0$.

Dans ce cas, $\rho_{0,p}\sim\sigma(\mu_1,\mu_2)$, avec $\mu_1(p)=\lambda'_p(\varphi_0\underline{\mu}^0)$, $\mu_2(p)=p\lambda'_p(\varphi_0\underline{\mu}^0)$, et pour $u\in\mathbb{Z}_p^\times$, $\mu_1(u)=\mu_2(u)=\mu_p^0(u^{-1})$;

4° $\rho_{0,p}$ est de la série principale irréductible si et seulement si l'une des conditions a ou b suivantes est vérifiée :

(a) il existe $\underline{\mu}^0\in\Omega_p$ tel que $m_p(\varphi_0\underline{\mu}^0)=0$;

(b) (i) pour tout $\underline{\mu}\in\Omega_p$, $m_p(\varphi_0\underline{\mu})\geqq 1$, et (ii) il existe deux éléments distincts $\underline{\mu}^1,\underline{\mu}^2\in\Omega_p$ tels que $\underline{\lambda}'_p(\varphi_0\underline{\mu}^1)\neq 0$, $\underline{\lambda}'_p(\varphi_0\underline{\mu}^2)\neq 0$.

Alors $\rho_{0,p}\sim\pi(\mu_1,\mu_2)$, avec :

– dans le cas (a), $\mu_1(p)=\alpha_p(\varphi_0\underline{\mu}^0)$, $\mu_2(p)=\alpha'_p(\varphi_0\underline{\mu}^0)$, et pour $u\in\mathbb{Z}_p^\times$, $\mu_1(u)=\mu_2(u)=\mu_p^0(u^{-1})$;

– dans le cas (b), $\mu_1(p)=\lambda'_p(\varphi_0\underline{\mu}^1)$, $\mu_2(p)=\lambda'_p(\varphi_0\underline{\mu}^2)$, et pour $u\in\mathbb{Z}_p^\times$, $\mu_1(u)=\mu_p^1(u^{-1})$, $\mu_2(u)=\mu_p^2(u^{-1})$.

Avec les notations du I, 1 et du II, 5, on a bien sûr l'égalité des fonctions L : $L(\varphi_0,s)=L(\rho_0,s)$.

3. Avec les mêmes notations, on obtient en sens inverse les formules suivantes :

– si $\rho_{0,p}\sim\pi(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1\mu_2^{-1}\neq|\,.\,|_p$, on a $m_p(\varphi_0)=n(\mu_1)+n(\mu_2)$,
- si $m_p(\varphi_0)=0$, $\lambda_p(\varphi_0)=\mu_1(p)+\mu_2(p)$,
- si $n(\mu_1)>0$, $n(\mu_2)=0$, $\lambda'_p(\varphi_0)=\mu_2(p)$,
- si $n(\mu_1)>0$, $n(\mu_2)>0$, $\lambda'_p(\varphi_0)=0$;

– si $\rho_{0,p}\sim\sigma(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1\mu_2^{-1}=|\,.\,|_p$, on a $m_p(\varphi_0)=\sup(1,n(\mu_1)+n(\mu_2))$,
- si $m_p(\varphi_0)=1$, $\lambda'_p(\varphi_0)=\mu_1(p)$,
- si $m_p(\varphi_0)>1$, $\lambda'_p(\varphi_0)=0$.

4. Plus généralement, on a le lemme suivant. Soient p un nombre premier, π une représentation admissible irréductible de G_p, de dimension infinie, ω_0 son caractère central, $m(\pi)$ son conducteur ([D], 2.2.7).

LEMME 2. — 1° *Soient* μ_1, μ_2 *deux caractères de* $\mathbb{Q}_p^\times$, $\mu_0=\mu_1\mu_2^{-1}$:

(i) *si* $\mu_0\neq|\,.\,|_p$, *et* $\pi\sim\pi(\mu_1,\mu_2)$, *on a l'égalité* $m(\pi)=n(\mu_1)+n(\mu_2)$;

(ii) *si* $\mu_0=|\,.\,|_p$; $n(\mu_1)=n(\mu_2)\geqq 1$, *et* $\pi\sim\sigma(\mu_1,\mu_2)$, *on a l'égalité* $m(\pi)=n(\mu_1)+n(\mu_2)$;

(iii) *si* $\mu_0=|\,.\,|_p$, $n(\mu_1)=n(\mu_2)=0$, *et* $\pi\sim\sigma(\mu_1,\mu_2)$, *on a l'égalité* $m(\pi)=1$.

2° *Si* π *est supercuspidale*, $m(\pi)\geqq\sup(2, n(\omega_0)+1+v_p(2))$.

Démonstration. — Le 1 est facile, on peut utiliser les méthodes qui seront développées au VI, ou dire que $m(\pi)$ est l'entier tel que $\varepsilon(\pi, s, \psi_p)=p^{-m(\pi)s}$, à une constante près [J.L], p. 75, et qu'on connaît explicitement ce facteur ε ([JL], p. 105, 109).

Supposons π supercuspidale, réalisons π dans son modèle de Kirillov (relatif à ψ_p). Le nouveau vecteur de π ([D], 2.2.7) est la fonction $\varphi=\operatorname{car}(\mathbb{Z}_p^\times)$. Avec les notations de [JL], p. 44, pour tout caractère ν de $\mathbb{Z}_p^\times$, on a les égalités :

$$\hat{\varphi}(\nu, t)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad \nu\neq 1,\\ 1 & \text{si}\quad \nu=1,\end{cases}$$

d'où :

$$\pi(w)\hat{\varphi}(\nu, t)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad \nu\neq\nu_0^{-1},\\ C(\nu_0^{-1}, t) & \text{si}\quad \nu=\nu_0^{-1},\end{cases}$$

où $\nu_0=\omega_{0|\mathbb{Z}_p^\times}$ ([JL], p. 46). Soit $m(\nu)$ l'entier tel que $C(\nu, t)=c(\nu)t^{-m(\nu)}$ ([JL], p. 90). Comme $m(\pi)$ est le plus petit entier m tel que $\pi(w)\varphi$ soit invariante par les matrices $\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ pour tout $b\in p^m\mathbb{Z}_p$, les égalités ci-dessus montrent que $m(\pi)=m(\nu_0^{-1})$, i.e. $m(\pi)=m(1)$ ([JL], p. 90). On a $m(1)\geqq 2$ ([JL], p. 90). Si ω_0 est non ramifié, cela achève la démonstration. Supposons ω_0 ramifié et considérons l'égalité (i) de la proposition 2.11 de [JL], p. 50. On pose $\nu=\rho=1$, d'où $m=n(\omega_0)$, $n=p'=n(\omega_0)-m(1)$ (on note p' l'entier de cette proposition pour le distinguer de p). Le deuxième membre de l'égalité est non nul. Il existe donc un caractère σ de $\mathbb{Z}_p^\times$ tel que :

$$C_{p'+n}(\sigma)\neq 0,\qquad \eta(\sigma^{-1}, p^n)\neq 0.$$

La première relation implique $p'+n\leqq -2$ ([JL], p. 90), i.e. $m(1)\geqq n(\omega_0)+1$. Si $p\neq 2$, cela achève la démonstration. Supposons $p=2$. Si $m(1)=n(\omega_0)+1$, $n=p'=-1$. La deuxième relation ci-dessus implique $\sigma=1$. D'après la première, $m(1)=-(n+p')=2$, donc $n(\omega_0)=1$, impossible car $p=2$. Donc $m(1)>n(\omega_0)+1$. □

B. LE DICTIONNAIRE POUR LES FORMES DE POIDS DEMI-ENTIER.

1. Soit $\underline{H}$ le demi-plan de Poincaré. Si $z\in\mathbb{C}^\times$, on note $z^{1/2}$ la racine de z telle que $-\pi/2<\arg(z^{1/2})\leqq\pi/2$. Pour $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(4)$, et $z\in\mathbb{C}$, on pose :

$$j\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, z\right)=\left(\frac{c}{d}\right)\tilde{\gamma}_2(d)(cz+d)^{1/2},$$

où $\left(\dfrac{c}{d}\right)$ est le symbole quadratique usuel [S], p. 59. Soient k un entier impair, $k\geqq 1$, N un entier positif divisible par 4, $\underline{\chi}$ un caractère de Dirichlet défini mod N, tel que $\underline{\chi}(-1)=1$. Si f

est une fonction holomorphe sur $\underline{H}$, on dit que f est une forme modulaire parabolique de poids $k/2$, de caractère $\underline{\chi}$, pour le groupe $\Gamma_0(N)$, si :

1° pour tous $z \in \underline{H}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, on a l'égalité :

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = j\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right)^k \underline{\chi}(d) f(z);$$

2° f est holomorphe et nulle aux pointes.

On note $S'_{k/2}(N, \underline{\chi})$ l'espace de ces fonctions. Si p est un nombre premier, on note $T(p^2)$ ou $T'(p^2)$, selon que $p \nmid N$ ou $p \mid N$, l'opérateur de Hecke agissant dans $S_{k/2}(N, \underline{\chi})$ [S].

Posons $\underline{\chi}_0 = \underline{\chi}\left(\frac{-1}{\cdot}\right)^{(k-1)/2}$. Notons $\tilde{\rho}$ (resp. $\tilde{\rho}_v$) la représentation de $\tilde{\mathscr{H}}_A$ (resp. $\tilde{\mathscr{H}}_v$) dans $\tilde{\mathscr{A}}_0$. Si $v=p$, on peut considérer $\tilde{\rho}_p$ comme une représentation de $\tilde{S}_p$. Notons D l'élément de Casimir de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de $\tilde{S}_{\mathbb{R}}$. L'ensemble $\tilde{\mathscr{A}}'_{k/2}(N, \chi_0)$ est le sous-espace des éléments $t \in \tilde{\mathscr{A}}_0$ tels que :

(i) si $p \nmid N$ et $\sigma \in \Gamma_p$, $\tilde{\rho}_p(\sigma) t = t$;

(ii) si $p \mid N$, $p \neq 2$, et $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_p(v_p(N))$, $\tilde{\rho}_p(\sigma) t = \chi_{0,p}(d) t$;

(iii) si $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_2(v_2(N))$, $\tilde{\rho}_2(\sigma) t = \tilde{\varepsilon}_2(\sigma) \chi_{0,2}(d) t$;

(iv) si $\theta \in \mathbb{R}$, $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}(\tilde{k}(\theta)) t = e^{ik\theta/2} t$;

(v) $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}(D) t = [k(k-4)/8] t$.

Les conditions (iv) et (v) signifient que la représentation de $\tilde{\mathscr{H}}_{\mathbb{R}}$ engendrée par t est de la série discrète de poids minimal $k/2$, et que t en est un vecteur de poids minimal.

Pour $z = x + iy \in \underline{H}$, soit $b(z)$ l'élément de $\tilde{S}_A$:

$$b(z) = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathbb{R}}.$$

Soit $f \in S'_{k/2}(N, \underline{\chi})$. Il existe une unique fonction t_f définie sur $S_{\mathbb{Q}} \backslash \tilde{S}_A$, continue, telle que pour tous $z \in \underline{H}$, $\theta \in \mathbb{R}$:

$$t_f(b(z)\tilde{k}(\theta)) = y^{k/4} e^{ik\theta/2} f(z).$$

On note s l'application $f \mapsto t_f$.

PROPOSITION 3. — (i) *si* $f \in S'_{k/2}(N, \underline{\chi})$, *alors* $t_f \in \tilde{\mathscr{A}}'_{k/2}(N, \chi_0)$;

(ii) *s est une bijection de* $S'_{k/2}(N, \underline{\chi})$ *sur* $\tilde{\mathscr{A}}'_{k/2}(N, \chi_0)$.

Démonstration. — Elle est standard. Vérifions simplement les formules de transformation de t_f sous l'action des groupes compacts. Soient $f \in S'_{k/2}(N, \underline{\chi})$, $z \in \underline{H}$, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. Posons :

$$z = x + iy, \qquad \frac{az+b}{cz+d} = X + iY.$$

On a l'égalité :

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=Y^{-k/4}\, t_f\left(b\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right);$$

on a l'égalité :

$$b\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\sigma_{|\mathbb{R}}\, b(z)\, \tilde{k}(\theta),$$

où θ est défini par :

$$\theta\in[-\pi,\pi[,\quad \sin\theta=cy^{1/2}\,Y^{1/2},\qquad \cos\theta=(cx+d)\,y^{-1/2}\,Y^{1/2}.$$

D'autre part :

$$\sigma|_{\mathbb{R}}=(\sigma,\, s_A(\sigma))[\prod_p(\sigma^{-1}|_p)](id,\, s_A(\sigma^{-1})\,\beta_{\mathbb{R}}(\sigma^{-1},\sigma)).$$

En utilisant l'invariance de t_f sous $S_{\mathbb{Q}}$, on obtient l'égalité :

$$(1)\qquad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=Y^{-k/4}\, e^{ik\theta/2}\, s_A(\sigma^{-1})\,\beta_{\mathbb{R}}(\sigma^{-1},\sigma)\,\tilde{\rho}[\prod_p(\sigma^{-1}|_p)]\; t_f(b(z)).$$

D'autre part :

$$cz+d=(\cos\theta+i\sin\theta)\,y^{1/2}\,Y^{-1/2},$$
$$(cz+d)^{1/2}=e^{i\theta/2}\,\beta_{\mathbb{R}}(\sigma^{-1},\sigma)\,y^{1/4}\,Y^{-1/4}.$$

Comme $f\in S'_{k/2}(N,\underline{\chi})$, on a l'égalité :

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)\tilde{\gamma}_2(d)^k\, e^{ik\theta/2}\,\beta_{\mathbb{R}}(\sigma^{-1},\sigma)\,y^{k/4}\,Y^{-k/4}\,\underline{\chi}(d) f(z),$$

i.e. :

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)\tilde{\gamma}_2(d)^k\, e^{ik\theta/2}\,\beta_{\mathbb{R}}(\sigma^{-1},\sigma)\,Y^{-k/4}\,\underline{\chi}(d)\, t_f(b(z)).$$

En comparant avec l'égalité (1), on obtient :

$$\tilde{\rho}[\prod_p(\sigma^{-1}|_p)]\, t_f=s_A(\sigma^{-1})\left(\frac{c}{d}\right)\tilde{\gamma}_2(d)^k\,\underline{\chi}(d)\, t_f,$$

d'où par action de $\tilde{\rho}[\prod_p(\sigma|_p)]$:

$$(2)\qquad \tilde{\rho}[\prod_p(\sigma|_p)]\, t_f=s_A(\sigma^{-1})[\prod_p\beta_p(\sigma,\sigma^{-1})]\left(\frac{c}{d}\right)\tilde{\gamma}_2(d)^{-k}\,\underline{\chi}(d)^{-1}\, t_f.$$

Supposons $c\neq 0$. On a $\beta_p(\sigma,\sigma^{-1})=s_p(\sigma)\,s_p(\sigma^{-1})$, d'où :

$$s_{\mathbb{A}}(\sigma^{-1})\prod_p \beta_p(\sigma, \sigma^{-1})=\prod_p s_p(\sigma).$$

On a l'égalité :

$$\left(\frac{c}{d}\right)=(c, d)_{\mathbb{R}}\prod_{p|d}(c, d)_p=\prod_{p\nmid d}(c, d)_p;$$

si $p\neq 2$:

$$s_p(\sigma)=\begin{cases}(c, d)_p & \text{si } p\nmid d,\\ 1 & \text{si } p\mid d.\end{cases}$$

En effet, si $p\mid d$, $v_p(c)=0$, car c et d sont premiers entre eux, donc $s_p(\sigma)=1$. Si $p\nmid d$ et $v_p(c)$ est pair, $s_p(\sigma)=1$ et $(c, d)_p=1$ car $v_p(c)$ et $v_p(d)$ sont pairs et $p\neq 2$. Si $p\nmid d$ et $v_p(c)$ est impair, $s_p(c)=(c, d)_p$ par définition. Donc :

$$s_{\mathbb{A}}(\sigma^{-1})\,[\prod_p \beta_p(\sigma, \sigma^{-1})]\left(\frac{c}{d}\right)=s_2(\sigma)(c, d)_2.$$

On a l'égalité :

$$\underline{\chi}(d)=\prod_{p\nmid \mathrm{N}}\chi_p(d)=\prod_{p\mid \mathrm{N}}\chi_p(d)^{-1}.$$

Si $p\neq 2$, $\chi_p(d)=\chi_{0,\,p}(d)$; si $p=2$, $\chi_p(d)\tilde{\gamma}_2(d)^{-k}=\tilde{\gamma}_2(d)^{-1}\chi_{0,2}(d)$. L'égalité (2) devient :

$$\tilde{\rho}\,[\prod_p(\sigma\,|_p)]\; t_f=[\prod_{p\mid \mathrm{N}}\chi_{0,\,p}(d)]\; s_2(\sigma)(c, d)_2\,\tilde{\gamma}_2(d)^{-1}\, t_f.$$

Par un argument de densité, il est clair que cette égalité équivaut aux conditions (i), (ii), (iii) de la définition de $\tilde{\mathscr{A}}'_{k/2}(\mathrm{N}, \chi_0)$. Si $c=0$, ces conditions sont encore vérifiées, par continuité. □

Posons $\tilde{\mathscr{A}}_{k/2}(\mathrm{N}, \chi_0)=\tilde{\mathscr{A}}'_{k/2}(\mathrm{N}, \chi_0)\cap\tilde{\mathscr{A}}_{00}$. Par définition de $\mathrm{S}_{k/2}(\mathrm{N}, \underline{\chi})(\mathrm{I}, 1)$, on a :

COROLLAIRE. — *L'application s est une bijection de* $\mathrm{S}_{k/2}(\mathrm{N}, \underline{\chi})$ *sur* $\tilde{\mathscr{A}}_{k/2}(\mathrm{N}, \chi_0)$.

2. LEMME 3. — *Soient* $f\in\mathrm{S}_{k/2}(\mathrm{N}, \underline{\chi})$, $t_f=s(f)$, *et* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqq 1$. *Pour tout* $y\in\mathbb{R}$, $y>0$, *on a l'égalité :*

$$a_n(f)=y^{-k/4}e^{2\pi ny}\,\tilde{\mathrm{W}}(n, t_f, d_{\mathbb{R}}(y^{1/2})).$$

C'est immédiat. □

3. Soit p un nombre premier, $\tilde{\rho}_p$ une représentation admissible de $\tilde{\mathrm{S}}_p$ dans un espace T_p. Si $p\neq 2$, on définit un opérateur $\tilde{\mathrm{T}}_p$ agissant dans T_p. Pour $t\in\mathrm{T}_p$:

$$\tilde{\mathrm{T}}_p\, t=\int_{\Gamma_p d_p(p)\Gamma_p}\tilde{\rho}_p(\sigma)\, t\, d\sigma.$$

Si t est invariant par Γ_p (sous $\tilde{\rho}_p$), on a l'égalité :

$$\tilde{T}_p t = \sum_{u \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} \tilde{\rho}_p(\underline{u}d_p(p))\,t + \sum_{u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} (p, -u)_p\, \tilde{\rho}_p(\underline{up^{-1}})\,t + \tilde{\rho}_p(\mathrm{d}_p(p^{-1}))\,t.$$

Pour p quelconque, on note T_p^U le sous-espace des éléments de T_p invariants par $\tilde{\rho}_p(\underline{u})$ pour tout $u \in \mathbb{Z}_p$. On définit un opérateur $\tilde{T}'_p$ agissant dans T_p^U. Pour $t \in T_p^U$:

$$\tilde{T}'_p t = \sum_{u \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} \tilde{\rho}_p(\underline{u}d_p(p))\,t.$$

Appliquons ces définitions à la représentation de $\tilde{S}_p$ sur $\tilde{\mathscr{A}}_0$.

LEMME 4. — *Soient p un nombre premier et $f \in S_{k/2}(N, \underline{\chi})$. On a les égalités :*

(i) *si* $p \nmid N$, $\tilde{T}_p(s(f)) = p^{2-k/2}\,\tilde{\gamma}_p(p)\,\underline{\chi}_0(p^{-1})\,s(T(p^2)f)$;

(ii) *si* $p \mid N$, $\tilde{T}'_p(s(f)) = p^{2-k/2}\,\tilde{\gamma}_p(p)\,\chi_{0,p}(p^{-1})\,s(T'(p^2)f)$.

Démonstration. — Supposons $p \nmid N$. Il est clair que $\tilde{T}_p(s(f)) \in \tilde{\mathscr{A}}_{k/2}(N, \chi_0)$. Soit $f' = s^{-1}(\tilde{T}_p(s(f)))$, et n un entier, $n \geqq 1$. D'après le lemme 3 et les définitions, on a l'égalité :

$$a_n(f') = (S_1 + S_2 + S_3)\,e^{2\pi n},$$

avec :

$$S_1 = \sum_{u \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} \tilde{W}(n, \tilde{\rho}_p(\underline{u}d_p(p))\,t_f, 1),$$

$$S_2 = \sum_{u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} (p, -u)_p\, \tilde{W}(n, \tilde{\rho}_p(\underline{up^{-1}})\,t_f, 1),$$

$$S_3 = \tilde{W}(n, \tilde{\rho}_p(d_p(p^{-1}))\,t_f, 1).$$

On a :

$$S_1 = \sum_{u \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} \psi_p(un)\,\tilde{W}(n, t_f, d_p(p)).$$

Ici $un \in \mathbb{Z}$, donc $\psi_p(un) = 1$, et $S_1 = p^2\,\tilde{W}(n, t_f, d_p(p))$. On a l'égalité :

$$d_p(p) = (d_A(p), s_A(d_A(p)))\Big[\prod_{v \neq p} d_v(p^{-1})\Big]\,(id, (p, p)_p),$$

d'où :

$$S_1 = p^2 (p, p)_p\, \tilde{W}\Big(n, \Big[\prod_{q \neq p} \tilde{\rho}_q(d_q(p^{-1}))\Big]\,t_f, (d_A(p), s_A(d_A(p)))\,d_{\mathbb{R}}(p^{-1})\Big).$$

Comme $t_f \in \tilde{\mathscr{A}}_{k/2}(N, \chi_0)$, on obtient :

$$S_1 = p^2 (p, p)_p \Big[\prod_{q \mid N} \chi_{0,q}(p)\Big]\,\tilde{\varepsilon}_2(d_2(p^{-1})) \times \tilde{W}(n, t_f, (d_A(p), s_A(d_A(p)))\,d_{\infty}(p^{-1})).$$

On a :

$$\prod_{q \mid N} \chi_{0,q}(p)=\chi_{0,p}(p^{-1}),$$

$$\tilde{\varepsilon}_2(d_2(p^{-1}))=\tilde{\gamma}_2(p)=\tilde{\gamma}_p(p)^{-1},$$

$$\tilde{\gamma}_p(p)^{-1}(p, p)_p=\tilde{\gamma}_p(p),$$

d'où :

$$S_1=p^2\tilde{\gamma}_p(p)\chi_{0,p}(p^{-1})\tilde{W}(n, t_f, (d_A(p), s_A(d_A(p)))d_{\mathbb{R}}(p^{-1})).$$

Si $t \in \tilde{\mathscr{A}}_0$ et $\sigma \in \tilde{S}_A$, on a facilement l'égalité :

$$\tilde{W}(n, t, (d_A(p), s_A(d_A(p)))\sigma)=\tilde{W}(np^2, t, \sigma).$$

En appliquant le lemme 3, on obtient alors :

$$S_1=e^{-2\pi n}p^{2-k/2}\chi_{0,p}(p^{-1})\tilde{\gamma}_p(p)a_{np^2}(f).$$

On a :

$$S_2=\sum_{u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times}(p, -u)_p\psi_p(nup^{-1})\tilde{W}(n, t_f, 1),$$

d'où (II, 6) :

$$S_2=\begin{cases} p^{1/2}\tilde{\gamma}_p(p)(p, n)_p\tilde{W}(n, t_f, 1) & \text{si} \quad p \nmid n, \\ 0 \quad \text{si} \quad p \mid n, \end{cases}$$

et, d'après le lemme 3 :

$$S_2=\begin{cases} e^{-2\pi n}p^{1/2}(p, n)_p\tilde{\gamma}_p(p)a_n(f) & \text{si} \quad p \nmid n, \\ 0 \quad \text{si} \quad p \mid n. \end{cases}$$

Enfin un calcul analogue au calcul de S_1 conduit à l'égalité :

$$S_3=e^{-2\pi n}p^{k/2}\chi_{0,p}(p)\tilde{\gamma}_p(p)a_{np^{-2}}(f).$$

Remarquons que $\chi_{0,p}(p)=\underline{\chi}_0(p)$, et que le symbole quadratique $\left(\frac{n}{p}\right)$ vaut 0 si $p \mid n$, et $(p, n)_p$ si $p \nmid n$. On obtient :

$$a_n(f')=\tilde{\gamma}_p(p)p^{2-k/2}\underline{\chi}_0(p^{-1})\left[a_{np^2}(f)+p^{(k-3)/2}\left(\frac{n}{p}\right)\underline{\chi}_0(p)a_n(f)+p^{k-2}\underline{\chi}_0(p^2)a_{np^{-2}}(f)\right].$$

En comparant avec la formule de [S], p. 64, on obtient :

$$a_n(f')=\tilde{\gamma}_p(p)p^{2-k/2}\underline{\chi}_0(p^{-1})a_n(T(p^2)f),$$

d'où l'assertion (i). Si $p \mid N$, un calcul analogue (où seul le terme S_1 intervient) conduit à l'égalité (ii). □

4. Soient μ un caractère de $A^\times/\mathbb{Q}^\times$, V un sous-espace irréductible de $\mathscr{A}_0(\mu)$, ρ_V la représentation de $\mathscr{H}_A$ sur V, et p un nombre premier. Si $\rho_{V,p}$ est de classe un, on introduit

l'opérateur T_p agissant sur V. Si $v \in V$:

$$T_p v = \int_{K_p \cdot \underline{\underline{p}} \cdot K_p} \rho_{V,p}(g)\, v\, dg.$$

Cet opérateur n'a qu'une valeur propre, qu'on note $\lambda_p(V)$. En particulier, soit $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\chi}^2)$ comme en III, A 2, et V_0 le sous-espace de $\mathscr{A}_0(\chi^2)$ associé à φ_0. Si $p \nmid M(\varphi_0)$, on a l'égalité :

$$\lambda_p(V_0) = p^{1/2}\,\lambda_p(\varphi_0).$$

Soit T un sous-espace irréductible de $\widetilde{\mathscr{A}}_{00}$, posons :

$$T_{k/2}(N, \chi_0) = T \cap \widetilde{\mathscr{A}}_{k/2}(N, \chi_0),$$
$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T) = s^{-1}(T_{k/2}(N, \chi_0)).$$

Introduisons l'espace $\mathscr{V}'(\psi, T)$ [W], V, 4. On utilise les notations de [W].

PROPOSITION 4. — *Soient* $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\chi}^2)$, V_0 *le sous-espace irréductible de* $\mathscr{A}_0(\chi^2)$ *associé à* φ_0, *et* T *un sous-espace irréductible de* $\widetilde{\mathscr{A}}_{00}$:

(i) *si* $S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T) \cap S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)$ *est non nul, on a l'égalité* :

$$\mathscr{V}'(\psi, T) = V_0 \otimes \chi_0^{-1};$$

(ii) *si* $\mathscr{V}'(\psi, T) = V_0 \otimes \chi_0^{-1}$, *on a l'inclusion* :

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T) \subset S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0).$$

Démonstration. — Pour presque tout p, $\widetilde{T}_p$ a une seule valeur propre dans T, qu'on note $\widetilde{\lambda}_p(T)$. Si $f \in S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T)$, f est propre pour $T(p^2)$, pour presque tout p, de valeur propre $\widetilde{\lambda}_p(f)$. D'après le lemme 4, on a l'égalité :

$$\widetilde{\lambda}_p(f) = p^{k/2-2}\,\underline{\chi}_0(p)\,\widetilde{\gamma}_p(p)^{-1}\,\widetilde{\lambda}_p(T).$$

Il suffit donc de montrer que les conditions 1 et 2 suivantes sont équivalentes :

1° pour presque tout p, $\underline{\lambda}_p(\varphi_0) = p^{k/2-2}\,\underline{\chi}_0(p)\,\widetilde{\gamma}_p(p)^{-1}\,\widetilde{\lambda}_p(T)$;

2° $\mathscr{V}'(\psi, T) = V_0 \otimes \chi_0^{-1}$.

D'après [W], prop. 13, on a l'égalité :

$$\widetilde{\lambda}_p(T) = \widetilde{\gamma}_p(p)\, p^{1/2}\,\lambda_p(\mathscr{V}'(\psi, T))$$

pour presque tout p. D'autre part :

$$\underline{\lambda}_p(\varphi_0) = p^{k/2-1}\,\lambda_p(\varphi_0) = p^{(k-3)/2}\,\lambda_p(V_0).$$

La condition 1 s'écrit donc :

1° pour presque tout p, $\lambda_p(V_0) = \chi_{0,p}(p)\,\lambda_p(\mathscr{V}'(\psi, T))$,

i. e.;

1° pour presque tout p, $\lambda_p(\mathscr{V}'(\psi, T))=\lambda_p(V_0\otimes\chi_0^{-1})$.

D'après le théorème fort de multiplicité un sur G_A, 1 équivaut à 2. □

COROLLAIRE. — *Soient* φ_0 *et* V_0 *comme dans l'énoncé précédent. On a l'égalité :*

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)=\oplus S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T),$$

sommé sur les espaces irréductibles T *de* $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$ *tels que :*

$$\mathscr{V}'(\psi, T)=V_0\otimes\chi_0^{-1}.$$

Démonstration. — On a évidemment :

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi})=\oplus S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T)$$

sommé sur tous les espaces irréductibles T de $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$. La proposition 4 montre que cette décomposition est plus fine que la décomposition de la proposition 1. □

IV. — Sur la correspondance de Shimura

On va rappeler et préciser quelques notations et résultats de [W].

1. Soient H_A l'espace des matrices 2×2 de trace nulle à coefficients dans A, q la forme quadratique sur H_A, $q(x)=-\det x$. Si $\nu\in\mathbb{Q}^\times$, on définit un sous-espace $\mathscr{S}_{\psi^\nu}(H_A)$ de l'espace $\mathscr{S}(H_A)$ des fonctions de Schwartz sur H_A ([W], I). On note R la représentation de G_A dans $\mathscr{S}(H_A)$ définie par :

$$(g\in G_A, f\in\mathscr{S}(H_A), x\in H_A)\qquad R(g)f(x)=f(g^{-1}xg),$$

r_{ψ^ν} la représentation de Weil de $\tilde{S}_A$ dans $\mathscr{S}(H_A)$ attachée à la forme quadratique q et au caractère ψ^ν. Soit $x'_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, D_A le groupe des matrices diagonales de G_A. Si $\xi\in\mathbb{Q}^\times$, on pose :

$$x_\xi=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \xi & 0\end{pmatrix},\qquad O_{\xi,A}=\{g\in G_A;\ g^{-1}x_\xi g=x_\xi\}.$$

Ce groupe $O_{\xi,A}$ est l'ensemble des éléments de G_A de la forme $\begin{pmatrix}a & b\\ b\xi & a\end{pmatrix}$.

Tous ces objets, qu'on vient de définir sur A, se définissent aussi sur un complété $\mathbb{Q}_v$. Soit v une place de $\mathbb{Q}$. On a fixé une mesure sur $Z_v\backslash G_v$ (II, 3). On munit $Z_v\backslash D_v$ de la mesure $d_v\delta=d_v^\times a$, si $\delta=z(t)\underline{a}$, et $D_v\backslash G_v$ de la mesure quotient. Si $\xi\in\mathbb{Q}_v^\times$, on fixe une mesure de Haar $d_{\xi,v}h$ sur $Z_v\backslash O_{\xi,v}$, et on munit $O_{\xi,v}\backslash G_v$ de la mesure quotient. On munit $Z_A\backslash D_A$ et $D_A\backslash G_A$ des mesures produits. Si $\xi\in\mathbb{Q}^\times$, on suppose que le produit $\underset{v}{\otimes} d_{\xi,v}$ définit une mesure $d_{\xi,A}$ sur $Z_A\backslash O_{\xi,A}$, et on munit $O_{\xi,A}\backslash G_A$ de la mesure quotient.

2. Soit v une place de $\mathbb{Q}$, ρ une représentation admissible, unitaire, irréductible de $Z_v \backslash G_v$, $\mathscr{W}$ son modèle de Whittaker relatif au caractère ψ_v. On note $\mathbb{Q}_v^\times(\rho)$ la réunion de $\mathbb{Q}_v^{\times 2}$ et de l'ensemble des $\xi \in \mathbb{Q}_v^\times - \mathbb{Q}_v^{\times 2}$ tels qu'il existe un élément non nul de $\mathscr{W}$ invariant par $O_{\xi, v}$ (sous ρ). Dans ce dernier cas, on fixe un tel élément $W^\xi \in \mathscr{W}$. L'ensemble $\mathbb{Q}_v^\times(\rho)$ est une réunion de classes modulo $\mathbb{Q}_v^{\times 2}$.

ASSERTION 1. — *$\mathbb{Q}_v^\times(\rho)$ est l'ensemble des $\xi \in \mathbb{Q}_v^\times$ tels qu'il existe un espace $\mathscr{U}^\xi$ de fonctions continues sur G_v, invariantes à gauche par $O_{\xi, v}$, stable sous l'action de $\mathscr{H}_v$ agissant par translation à droite, tel que la représentation de $\mathscr{H}_v$ ainsi définie sur $\mathscr{U}^\xi$ soit isomorphe à ρ* ([W], IV, 2).

Soient $W \in \mathscr{W}$, $g \in G_v$, $\xi \in \mathbb{Q}_v^\times - \mathbb{Q}_v^{\times 2}$, $\lambda \in \mathbb{Q}_v^\times$. On pose :

$$u(W)(g) = \int_{\mathbb{Q}_v^\times} W(\underline{a}g)\, d^\times a,$$

$$u(W, \xi, \lambda)(g) = \int_{Z_v \backslash O_{\xi, v}} W(\underline{\lambda} hg)\, d_{\xi, v} h.$$

Ces intégrales convergent absolument.

LEMME 5. — *Soit $\xi \in \mathbb{Q}_v^\times - \mathbb{Q}_v^{\times 2}$:*

(i) *il existe $W \in \mathscr{W}$, $\lambda \in \mathbb{Q}_v^\times$, $g \in G_v$, tels que $u(W, \xi, \lambda)(g) \neq 0$ si et seulement si $\xi \in \mathbb{Q}_v^\times(\rho)$;*

(ii) *supposons $\xi \in \mathbb{Q}_v^\times(\rho)$ et soit $W \in \mathscr{W}$. Il existe une unique fonction $u(W, \xi)$ définie sur G_v, telle que pour tous $\lambda \in \mathbb{Q}_v^\times$, $g \in G_v$,*

$$u(W, \xi, \lambda)(g) = W^\xi(\underline{\lambda})\, u(W, \xi)(g).$$

Démonstration. — S'il existe λ, W et g tels que $u(W, \xi, \lambda)(g) \neq 0$, l'ensemble des fonctions $u(W, \xi, \lambda)$, pour $W \in \mathscr{W}$, est un espace $\mathscr{U}^\xi$ vérifiant les conditions de l'assertion 1. Donc $\xi \in \mathbb{Q}_v^\times(\rho)$. Si $\xi \in \mathbb{Q}_v^\times(\rho)$, fixons un tel espace $\mathscr{U}^\xi$ et un isomorphisme $W \mapsto u'(W, \xi)$ de $\mathscr{W}$ sur $\mathscr{U}^\xi$. D'après l'unicité de l'espace $\mathscr{U}^\xi$ ([W], prop. 9.10), il existe une constante $c(\lambda)$ telle que pour tous $W \in \mathscr{W}$, $g \in G_v$,

$$u(W, \xi, \lambda)(g) = c(\lambda)\, u'(W, \xi)(g).$$

Pour $W = W^\xi$ et $g = 1$, on a par définition :

$$u(W^\xi, \xi, \lambda)(1) = \operatorname{mes}(Z_v \backslash O_{\xi, v})\, W^\xi(\underline{\lambda}).$$

Il existe λ tel que cette expression soit non nulle. Cela démontre (i), et $u'(W^\xi, \xi)(1) \neq 0$. Pour tout λ :

$$c(\lambda) = \operatorname{mes}(Z_v \backslash O_{\xi, v})\, W^\xi(\underline{\lambda})\, [u'(W^\xi, \xi)(1)]^{-1}.$$

En posant :

$$u(W, \xi) = \operatorname{mes}(Z_v \backslash O_{\xi, v})\, [u'(W^\xi, \xi)(1)]^{-1}\, u'(W, \xi),$$

on obtient (ii). $\square$

Les fonctions $u(\mathrm{W}, \xi)$ dépendent du choix de W^{ξ}. Par analogie, si $\xi \in \mathbb{Q}_v^{\times 2}$, on fixe un espace $\mathscr{U}^{\xi}$ et un isomorphisme $\mathrm{W} \mapsto u(\mathrm{W}, \xi)$ de $\mathscr{W}$ sur $\mathscr{U}^{\xi}$.

Soit $\nu \in \mathbb{Q}_v^{\times}$. On note $\rho_\nu = \rho \otimes \chi_\nu$, $\mathscr{W}_\nu = \mathscr{W} \otimes \chi_\nu$, et si $\mathrm{W} \in \mathscr{W}$, $\mathrm{W}_\nu = \mathrm{W} \times (\chi_\nu \circ \det)$. L'espace $\mathscr{W}_\nu$ est le modèle de Whittaker de ρ_ν relatif au caractère ψ_v. Pour $\mathrm{W} \in \mathscr{W}$, $f \in \mathscr{S}_{\psi^\nu}(\mathrm{H}_v)$, $\sigma \in \tilde{\mathrm{S}}_v$, on pose :

$$t_\nu(f, \mathrm{W})(\sigma) = \int_{\mathrm{D}_v \backslash \mathrm{G}_v} r_{\psi^\nu}(\sigma) \mathrm{R}(g) f(x'_1)\, u(\mathrm{W}_\nu)(g)\, dg.$$

On note $\mathrm{T}_\nu(\rho)$ l'espace de ces fonctions $t_\nu(f, \mathrm{W})$. Il est invariant sous $\tilde{\mathscr{H}}_v$ agissant par translation à droite. On note $\tilde{\rho}_\nu(\rho)$, ou $\tilde{\rho}_\nu$, la représentation de $\tilde{\mathscr{H}}_v$ sur $\mathrm{T}_\nu(\rho)$. Pour $\mathrm{W} \in \mathscr{W}$, on note $j_{\nu, v}(\mathrm{W})$ l'application $f \mapsto t_\nu(f, \mathrm{W})$.

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_v^{\times}$. Si $f \in \mathscr{S}_{\psi^\nu}(\mathrm{H}_v)$, on définit $\mathrm{T}_\alpha f$ par :

$$(x \in \mathrm{H}_v) \quad \mathrm{T}_\alpha f(x) = f(\alpha x).$$

On vérifie que $\mathrm{T}_\alpha f \in \mathscr{S}_{\psi^{\nu\alpha^2}}(\mathrm{H}_v)$.

ASSERTION 2. — *Si $f \in \mathscr{S}_{\psi^\nu}(\mathrm{H}_v)$, $\mathrm{W} \in \mathscr{W}$, $\sigma \in \tilde{\mathrm{S}}_v$, on a l'égalité :*

$$t_\nu(f, \mathrm{W})(d_v(\alpha)\sigma) = \tilde{\gamma}_v(\alpha)\chi_\nu(\alpha)\, |\alpha|_v^{3/2}\, t_{\nu\alpha^2}(\mathrm{T}_\alpha f, \mathrm{W})(\sigma).$$

En effet :

$$t_\nu(f, \mathrm{W})(d_v(\alpha)\sigma) = \int_{\mathrm{D}_v \backslash \mathrm{G}_v} r_{\psi^\nu}(d_v(\alpha)\sigma) \mathrm{R}(g) f(x'_1)\, u(\mathrm{W}_\nu)(g)\, dg$$

$$= \tilde{\gamma}_v(\alpha)\chi_\nu(\alpha)\, |\alpha|^{3/2} \int_{\mathrm{D}_v \backslash \mathrm{G}_v} [\mathrm{T}_\alpha \circ r_{\psi^\nu}(\sigma) \circ \mathrm{R}(g)] f(x'_1)\, u(\mathrm{W}_\nu)(g)\, dg.$$

On a les égalités :

$$\mathrm{T}_\alpha \circ r_{\psi^\nu} = r_{\psi^{\nu\alpha^2}} \circ \mathrm{T}_\alpha, \qquad \mathrm{T}_\alpha \circ \mathrm{R} = \mathrm{R} \circ \mathrm{T}_\alpha, \qquad \mathrm{W}_\nu = \mathrm{W}_{\nu\alpha^2},$$

d'où l'égalité :

$$t_\nu(f, \mathrm{W})(d_v(\alpha)\sigma) = \tilde{\gamma}_v(\alpha)\chi_\nu(\alpha)\, |\alpha|^{3/2} \times \int_{\mathrm{D}_v \backslash \mathrm{G}_v} r_{\psi^{\nu\alpha^2}}(\sigma) \mathrm{R}(g) \mathrm{T}_\alpha f(x'_1)\, u(\mathrm{W}_{\nu\alpha^2})(g)\, dg. \quad \square$$

ASSERTION 3. — *Les représentations $\tilde{\rho}_\nu(\rho)$ et $\tilde{\rho}_{\nu\alpha^2}(\rho)$ sont isomorphes.*

En effet, la translation à gauche par $d_v(\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathrm{T}_\nu(\rho)$ sur $\mathrm{T}_{\nu\alpha^2}(\rho)$. $\square$

3. Soient V un sous-espace irréductible de $\mathscr{A}_0$, ρ la représentation de $\mathscr{H}_\mathrm{A}$ dans V, ρ_v les composantes locales de ρ. Pour tout v, soit $\mathscr{W}_v$ le modèle de Whittaker de ρ_v. On fixe un isomorphisme :

$$e: \ \mathrm{V} \to \bigotimes_v \mathscr{W}_v$$

(le produit tensoriel restreint est défini en choisissant pour presque tout v un vecteur $W_v^0 \in \mathscr{W}_v$, invariant par K_v et tel que $W_v^0(1)=1$).

Soit $\nu \in \mathbb{Q}^\times$. On note $\rho_\nu = \rho \otimes \chi_\nu$, $V_\nu = V \otimes \chi_\nu$, et si $\varphi \in V$, $\varphi_\nu = \varphi \times (\chi_\nu \circ \det)$ (avec les notations du 2, on a l'égalité $\rho_{\nu, v} = \rho_{v, \nu}$). Il existe un isomorphisme unique e_ν tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "e"] \arrow[d] & \bigotimes_v \mathscr{W}_v \arrow[d] \\ V_\nu \arrow[r, "e_\nu"] & \bigotimes_v \mathscr{W}_{v,\nu} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont $\varphi \mapsto \varphi_\nu$ et $\otimes W_v \mapsto \otimes W_{v,\nu}$.

Pour $\varphi \in V$, $f \in \mathscr{S}_{\psi^\nu}(H_A)$, $\sigma \in \tilde{S}_A$, on pose :

$$t_\nu(f, \varphi)(\sigma) = \int_{Z_A \setminus G_A} \sum_{x \in H_{\mathbb{Q}}} r_{\psi^\nu}(\sigma) R(g) f(x)\, \varphi_\nu(g)\, dg.$$

On note $T_\nu(\rho)$ l'espace de ces fonctions $t_\nu(f, \varphi)$. Il est invariant par $\tilde{\mathscr{H}}_A$. On note $\tilde{\rho}_\nu(\rho)$ la représentation de $\tilde{\mathscr{H}}_A$ sur $T_\nu(\rho)$.

ASSERTION 4. — $T_\nu(\rho)$ *est un sous-espace irréductible de* $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$ [W], *th.* 2.

Pour $\varphi \in V$, on note $j_\nu(\varphi)$ l'application $f \mapsto t_\nu(f, \varphi)$. Si $W \in \bigotimes_v \mathscr{W}_v$, on définit une application :

$$(\otimes_v j_{\nu, v})(W): \quad \bigotimes_v \mathscr{S}_{\psi^\nu}(H_v) \to \bigotimes_v T_\nu(\rho_v),$$

par tensorisation des applications $j_{\nu, v}$.

ASSERTION 5. — *Si* $T_\nu(\rho) \neq \{0\}$, *il existe un isomorphisme unique* $\tilde{e}_\nu$ *tel que pour tout* $\varphi \in V$, *le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} T_\nu(\rho) \arrow[r, "e_\nu"] & \bigotimes_v T_\nu(\rho_v) \\ \mathscr{S}_{\psi^\nu}(H_A) \arrow[u, "j_\nu(\varphi)"] \arrow[r] & \bigotimes_v \mathscr{S}_{\psi^\nu}(H_v) \arrow[u, "(\otimes_v j_{\nu,v})(e(\varphi))"'] \end{tikzcd}$$

où la dernière application est l'isomorphisme naturel [W], lemme 30, th. 2.

4. Soient T un sous-espace irréductible de $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$, $\tilde{\rho}$ la représentation de $\tilde{\mathscr{H}}_A$ sur T, $\tilde{\rho}_v$ les composantes locales de $\tilde{\rho}$. En une place v, le centre de $\tilde{S}_v$ est un groupe d'ordre 4, égal à $\{(\varepsilon' id, \varepsilon);\ \varepsilon', \varepsilon = \pm 1\}$.

ASSERTION 6. — *Il existe* $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_v) \in \{\pm 1\}$ *tel que :*

$$\tilde{\rho}_v(-id, 1) = \underline{\omega}(\tilde{\rho}_v)\tilde{\gamma}_v(-1)\, id_{\mathrm{T}}.$$

On a en tout cas $\tilde{\rho}_v(-id, 1) = c\, id_{\mathrm{T}}$, pour un certain scalaire c. En élevant cette égalité au carré, on obtient $c^2 = (-1, -1)_v$. Or $\tilde{\gamma}_v(-1)^2 = (-1, -1)_v$. □

On note $\mathbb{Q}_v^\times(\tilde{\rho}_v)$ l'ensemble des $v \in \mathbb{Q}_v^\times$ tels que $\tilde{\rho}_v$ admette un modèle de Whittaker relatif au caractère ψ_v^v. C'est une réunion de classes modulo $\mathbb{Q}_v^{\times 2}$.

ASSERTION 7. — *Soit* μ_p *un caractère de* $\mathbb{Q}_p^\times$ *tel que* $\mu_p(-1) = \underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)$. *Il existe un modèle de la représentation* $\tilde{\rho}_p$, *d'espace un ensemble* $\mathrm{K}(\tilde{\rho}_p)$ *de fonctions sur* $\mathbb{Q}_p^\times$, *localement constantes, à support relativement compact dans* $\mathbb{Q}_p$, *tel que si* $t_p \in \mathrm{K}(\tilde{\rho}_p)$ *et* $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ *:*

(i) *si* $\eta \in \mathbb{Q}_p$, $\tilde{\rho}_p(\underline{\eta})\, t_p(x) = \psi_p(\eta x)\, t_p(x)$;

(ii) *si* $\alpha \in \mathbb{Q}_p^\times$, $\tilde{\rho}_p(d_p(\alpha))\, t_p(x) = \tilde{\gamma}_p(\alpha)\, |\alpha|_p\, \mu_p(\alpha)^{-1}\, t_p(x)$.

Si $t_p \in \mathrm{K}(\tilde{\rho}_p)$, t_p *est à support dans* $\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$. *Réciproquement l'espace de Schwartz* $\mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p))$ *est inclus dans* $\mathrm{K}(\tilde{\rho}_p)$.

Un tel modèle est construit dans [W], lemme 39. Il n'est pas unique. Pour tout p, choisissons un caractère μ_p et un modèle $\mathrm{T}_p = \mathrm{K}(\tilde{\rho}_p)$ comme ci-dessus. On choisit un modèle $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}$ de $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}$, et un isomorphisme $\tau : \mathrm{T} \to \bigotimes_v \mathrm{T}_v$.

LEMME 6. — *Soient* p_i, $i = 1, \ldots, n$, *des nombres premiers*, t_i, $i = 1, \ldots, n$, *des éléments non nuls de* T_{p_i}, t *un élément de* T *tel que :*

$$\tau(t) = \left(\bigotimes_{i=1}^{n} t_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{v \neq p_i} t_v\right), \qquad t \neq 0,$$

Soit $\mathrm{S}(t_i)$ *le support de* t_i *dans* $\mathbb{Q}_{p_i}^\times$. *Il existe* $v \in \mathbb{Q}^\times$, $\sigma \in \tilde{\mathrm{S}}_{\mathbb{R}}$ *tels que :*

(i) *pour tout* $i = 1, \ldots, n$, $v \in \mathrm{S}(t_i)$;

(ii) $\tilde{\mathrm{W}}(v, t, \sigma|_{\mathbb{R}}) \neq 0$.

Si $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}$ *est de la série discrète de poids minimal* $k/2$, *on peut supposer* $v > 0$.

Démonstration. — Comme $\mathrm{S}_{\mathbb{Q}}\tilde{\mathrm{S}}_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\tilde{\mathrm{S}}_{\mathrm{A}}$ et que t est continue et invariante par $\mathrm{S}_{\mathbb{Q}}$, il existe $\sigma \in \tilde{\mathrm{S}}_{\mathbb{R}}$ tel que $t(\sigma|_{\mathbb{R}}) \neq 0$. On a l'égalité :

$$t(\sigma) = \sum_{v \in \mathbb{Q}^\times} \tilde{\mathrm{W}}(v, t, \sigma),$$

donc il existe v tel que $\tilde{\mathrm{W}}(v, t, \sigma|_{\mathbb{R}}) = 0$. D'après l'unicité des modèles de Whittaker, on peut décomposer $\tilde{\mathrm{W}}(v, t, \sigma)$ en un produit local :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \tilde{\mathrm{W}}(v, t_i, \sigma_{p_i})\right)\left(\prod_{v \neq p_i} \tilde{\mathrm{W}}(v, t_v, \sigma_v)\right).$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe une constante $c_i(v)$ telle que :

$$\tilde{\mathrm{W}}(v, t_i, \sigma_{p_i}) = c_i(v)\, \tilde{\rho}_{p_i}(\sigma_{p_i})\, t_i(v).$$

Pour $\sigma=\sigma|_{\mathbb{R}}$, la non-nullité de $\tilde{W}(v, t, \sigma|_{\mathbb{R}})$ implique donc $t_i(v)\neq 0$, i.e. $v\in S(t_i)$. De même $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}$ doit admettre un modèle de Whittaker pour le caractère $\psi_{\mathbb{R}}^{v}$, d'où la dernière assertion ([W], prop. 7). □

Soient $V=\mathscr{V}'(\psi, T)$ ([W], V, 4), ρ la représentation de $\mathscr{H}_A$ sur V. On utilise les constructions de 2,3.

ASSERTION 8. — *Soient v une place de $\mathbb{Q}$ et $v\in\mathbb{Q}_v^\times$:*

(i) *si v est finie, $v\in\mathbb{Q}_v^\times(\tilde{\rho}_v)$ si et seulement si les représentations $\tilde{\rho}_v$ et $\tilde{\rho}_v(\rho_v)$ sont isomorphes;*

(ii) *si $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}$ est de la série discrète de poids minimal $k/2$, la même assertion est vraie pour v réelle.*

Démonstration. — Si $\tilde{\rho}_v$ et $\tilde{\rho}_v(\rho_v)$ sont isomorphes, l'espace $T_v(\rho_v)$ est un modèle de Whittaker de $\tilde{\rho}_v$ relatif au caractère ψ_v^{v}, donc $v\in\mathbb{Q}_v^\times(\tilde{\rho}_v)$. Supposons que $v\in\mathbb{Q}_v^\times(\tilde{\rho}_v)$. Sous les hypothèses de l'assertion, il existe $v'\in\mathbb{Q}^\times$ tel que $v'\in v\,\mathbb{Q}_v^{\times 2}$ et que l'espace des $\psi^{v'}$-ièmes coefficients de Fourier de T soit non nul. Cela résulte du lemme 6 : si $v=p$, on prend $n=1$, $p_1=p$, $t_1=\mathrm{car}(v\,\mathbb{Z}_p^{\times 2})$, si v est réelle, $n=0$. Alors $\mathscr{V}'(\psi^{v'}, T)\neq\{0\}$ ([W], prop. 26), donc $\tilde{\rho}$ est isomorphe à $\tilde{\rho}_{v'}(\rho)$ ([W], prop. 27, iv) et $\tilde{\rho}_v$ est isomorphe à $\tilde{\rho}_{v'}(\rho_v)$. On applique ensuite l'assertion 3. □

ASSERTION 9. — *Soit $v\in\mathbb{Q}_v^\times$ tel que $\tilde{\rho}_v\sim\tilde{\rho}_v(\rho_v)$. Alors :*

$$\mathbb{Q}_v^\times(\rho_{v,v})=\{\xi\in\mathbb{Q}_v^\times;\ \xi v\in\mathbb{Q}_v^\times(\tilde{\rho}_v)\}.$$

([W], lemme 41).

Notons $\varepsilon(\rho_{v,v}, s)$ le facteur ε de la représentation $\rho_{v,v}$ relatif au caractère ψ_v ([JL], p. 75).

ASSERTION 10. — *Soit $v\in\mathbb{Q}_v^\times$ tel que $\tilde{\rho}_v\sim\tilde{\rho}_v(\rho_v)$. On a l'égalité :*

$$\underline{\omega}(\tilde{\rho}_v)=\chi_v(-1)\,\varepsilon(\rho_{v,v}, 1/2).$$

Démonstration. — Soient $f\in\mathscr{S}_{\psi^v}(H_v)$, $W\in\mathscr{W}_v$, $\sigma\in\tilde{S}_v$. On a l'égalité :

$$t_v(f, W)((-id, 1)\sigma)=\int_{D_v\backslash G_v} r_{\psi^v}((-id, 1)\sigma)R(g)f(x_1')\,u(W_v)(g)\,dg$$

$$=\tilde{\gamma}_v(-1)\chi_v(-1)\int_{D_v\backslash G_v} r_{\psi^v}(\sigma)R(g)f(-x_1')\,u(W_v)(g)\,dg.$$

On a $-x_1'=wx_1'w^{-1}$, d'où :

$$t_v(f, W)((-id, 1)\sigma)=\tilde{\gamma}_v(-1)\chi_v(-1)\int_{D_v\backslash G_v} r_{\psi^v}(\sigma)R(g)f(x_1')\,u(W_v)(wg)\,dg.$$

D'après [JL], p. 75 et la définition de $u(W_v)$, on a l'égalité :

$$u(W_v)(wg)=\varepsilon(\rho_{v,v}, 1/2)\,u(W_v)(g),$$

d'où :

$$t_v(f, W)((-id, 1)\sigma)=\tilde{\gamma}_v(-1)\chi_v(-1)\,\varepsilon(\rho_{v,v}, 1/2)\,t_v(f, W)(\sigma),$$

et l'égalité de l'énoncé. $\square$

Si $\nu \in \mathbb{Q}_v^\times$ est tel que $\tilde{\rho}_v$ et $\tilde{\rho}_\nu(\rho_v)$ sont isomorphes, on fixe un isomorphisme $i_{\nu, v} : \mathrm{T}_\nu(\rho_v) \to \mathrm{T}_v$. Soit $\nu \in \mathbb{Q}^\times$ tel que $\mathrm{T}_\nu(\rho) \neq \{0\}$ et $\tilde{\rho}_\nu(\rho)$ soit isomorphe à $\tilde{\rho}$. D'après le théorème de multiplicité un, on a l'égalité $\mathrm{T} = \mathrm{T}_\nu(\rho)$. On peut supposer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_\nu(\rho) \arrow[r, "e_\nu"] \arrow[d, equal] & \bigotimes_v \mathrm{T}_\nu(\rho_v) \arrow[d, "\otimes i_{\nu, v}"] \\
\mathrm{T} \arrow[r, "\tau"] & \bigotimes_v \mathrm{T}_v
\end{tikzcd}$$

ASSERTION 11. — *Soient p un nombre premier, $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$, $\mathrm{W} \in \mathscr{W}'_p$, $\mathrm{W} \neq 0$:*
(i) *il existe un scalaire $\lambda(\nu) \neq 0$ tel que pour tout $f \in \mathscr{S}(H_p)$:*

$$\int_{\mathrm{D}_p \backslash \mathrm{G}_p} \mathrm{R}(g) f(x'_1)\, u(\mathrm{W}_\nu)(g)\, dg = \lambda(\nu) [i_{\nu, p} \circ j_{\nu, p}(\mathrm{W})] (f)(\nu);$$

(ii) *si $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times(\rho_{\nu, p})$, il existe un scalaire $\lambda(\nu, \xi) \neq 0$ tel que pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathrm{H}_p)$:*

$$\int_{\mathrm{O}_{\xi, p} \backslash \mathrm{G}_p} \mathrm{R}(g) f(x_\xi)\, u(\mathrm{W}_\nu, \xi)(g)\, dg = \lambda(\nu, \xi) [i_{\nu, p} \circ j_{\nu, p}(\mathrm{W})](f)(\nu\xi).$$

([W], lemmes 37, *b* et 40).

V. — Étude locale dans le cas des niveaux profonds

1. Soient T un sous-espace irréductible de $\mathscr{A}_{00}$, p un nombre premier et χ_0 un caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$. On utilise les définitions et notations de IV, 4. En particulier on fixe un caractère μ de $\mathbb{Q}_p^\times$ tel que $\mu(-1) = \underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)$, et un modèle local $\mathrm{T}_p = \mathrm{K}(\tilde{\rho}_p)$ de la représentation $\tilde{\rho}_p$, associé à μ. Posons $\varepsilon = v_p(2)$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq \sup(2\varepsilon, n(\chi_0))$, et $t \in \mathrm{T}_p$. On note (A_n) la condition :

$$(\mathrm{A}_n) \begin{cases} \textit{si } p \neq 2,\ n \geqq 1, \textit{ pour tout } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_p(n), & \tilde{\rho}_p(\gamma)\, t = \chi_0(d)\, t; \\ \textit{si } p \neq 2,\ n = 0, \textit{ pour tout } \gamma \in \Gamma_p, & \tilde{\rho}_p(\gamma)\, t = t; \\ \textit{si } p = 2, \textit{ pour tout } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_2(n), & \tilde{\rho}_2(\gamma)\, t = \tilde{\varepsilon}_2(\gamma)\, \chi_0(d)\, t. \end{cases}$$

On note $\mathrm{T}_p(n)$ le sous-espace des $t \in \mathrm{T}_p$ vérifiant (A_n). Pour $m \in \mathbb{Z}$, notons $\overline{\mathrm{U}}_m$ (resp. $\underline{\mathrm{U}}_m$) l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $b \in \mathbb{Z}_p$, $v_p(b) \geqq m$ $\left[\text{resp. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{Z}_p, v_p(c) \geqq m\right]$.

On considère suivant les cas $\overline{\mathrm{U}}_m$ et $\underline{\mathrm{U}}_m$ comme des sous-groupes de $\tilde{\mathrm{S}}_p$ ou G_p. La condition (A_n) équivaut aux conditions suivantes :

$$(\mathrm{A}_n)\quad\begin{cases} 1^{\circ}\ \ si\ \gamma\in\overline{\mathrm{U}}_0,\ \tilde{\rho}_p(\gamma)\,t=t,\\ 2^{\circ}\ \ si\ \gamma\in\underline{U}_n,\ \tilde{\rho}_p(\gamma)\,t=t,\\ 3^{\circ}\ \ si\ \alpha\in\mathbb{Z}_p^{\times},\ \tilde{\rho}_p(d_p(\alpha))\,t=\tilde{\gamma}_p(\alpha)\,\chi_0(\alpha^{-1})\,t.\end{cases}$$

2. LEMME 7. — *Soit* $n\geqq\sup(2\varepsilon,\ n(\chi_0))$, *et* $t\in\mathrm{T}_p(n)$:

(i) $\tilde{\mathrm{T}}'_p\,t\in\mathrm{T}_p(n')$, *où* $n'=\sup(n-2,\ 1+\varepsilon,\ n(\chi_0))$;

(ii) *si* $a\in\mathbb{Q}_p^{\times}$ *et* $\alpha\in\mathbb{Z}_p^{\times}$, *on a les égalités :*

$$t(a)=0\qquad si\quad v_p(a)<0;$$
$$t(a\alpha^2)=\mu\chi_0^{-1}(\alpha)\,t(a);$$

(iii) *si* $a\in\mathbb{Q}_p^{\times}$, *on a les égalités :*

$$\tilde{\mathrm{T}}'_p\,t(a)=\begin{cases} p\,\tilde{\gamma}_p(p)\,\mu(p^{-1})\,t(ap^2) & si\quad v_p(a)\geqq 0;\\ 0\qquad si\quad v_p(a)<0.\end{cases}$$

Démonstration. — Posons :

$$t'=\tilde{\mathrm{T}}'_p\,t=\sum_{u\in\mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p}\tilde{\rho}_p(\underline{u}d(p))\,t.$$

Soit $b\in\mathbb{Z}_p$. On a les égalités :

$$\tilde{\rho}_b(\underline{b})\,t'=\sum_{u\in\mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p}\tilde{\rho}_p((\underline{u+b})\,d(p))\,t=\sum_{u\in\mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p}\tilde{\rho}_p(\underline{u}d(p))\,t=t'.$$

Soit $c\in\mathbb{Z}_p$, $v_p(c)\geqq n'$. On a :

$$\tilde{\rho}_p\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}t'=\sum_u\tilde{\rho}_p\left(\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&0\\0&p^{-1}\end{pmatrix}\right)t,$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&0\\0&p^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&u(cu+1)^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&0\\0&p^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\cp^2(cu+1)&1\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}(cu+1)^{-1}&0\\0&cu+1\end{pmatrix}(id,\ (cu+1,\ c(cu+1))_p).$$

Comme $n'\geqq 1+\varepsilon,\ n-2,\ n(\chi_0)$, on a les relations :

$$cu+1\in\mathbb{Z}_p^{\times},\qquad (cu+1,\ c(cu+1))_p=1,$$
$$\tilde{\gamma}_p(cu+1)=1,\qquad v_p(cp^2(cu+1))\geqq n,\qquad \chi_0(cu+1)=1.$$

Comme $t\in\mathrm{T}_p(n)$, on obtient :

$$\tilde{\rho}_p\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}t'=\sum_u\tilde{\rho}_p(\underline{u(cu+1)^{-1}}\,d(p))\,t.$$

Mais $u\mapsto u(cu+1)^{-1}$ est une bijection de $\mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p$, d'où :

$$\tilde{\rho}_p\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}t'=t'.$$

Soit $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$. On a les égalités :

$$\tilde{\rho}_p(d(\alpha))\,t'=\sum_u \tilde{\rho}_p(d(\alpha)\underline{u}d(p))\,t=\sum_u \tilde{\rho}_p(\underline{u\alpha^2}\,d(p)\,d(\alpha))\,t$$

$$=\tilde{\gamma}_p(\alpha)\chi_0(\alpha^{-1})\sum_u \tilde{\rho}_p(\underline{u}d(p))\,t=\tilde{\gamma}_p(\alpha)\chi_0(\alpha^{-1})\,t'.$$

Donc t' vérifie les conditions 1, 2, 3 de la condition $(A_{n'})$. Les assertions (ii) et (iii) résultent d'un calcul immédiat et des propriétés de l'espace $T_p=K(\tilde{\rho}_p)$ (IV, 4). □

Soit $\nu\in\mathbb{Q}_p^\times$ tel que $v_p(\nu)\in\{0, 1\}$. Si $\chi_0\chi_\nu$ est non ramifié, on pose $h(\nu)=1$. Si $\chi_0\chi_\nu$ est ramifié, $h(\nu)=n(\chi_0\chi_\nu)$. Pour $n\in\mathbb{Z}$, on définit une fonction $f_{n,\nu}\in\mathcal{S}(H_p)$. Pour $x=\begin{pmatrix} u & v\\ w & -u\end{pmatrix}\in H_p$, posons :

1° si $\chi_0\chi_\nu$ est non ramifié :

$$f_{n,\nu}(x)=\begin{cases} 1 & \text{si}\quad v_p(u)\geqq 0,\quad v_p(w)\geqq n-\varepsilon-v_p(\nu),\quad v_p(v)=\varepsilon-1,\\ 1-p, & \text{si}\quad v_p(u)\geqq 0,\quad v_p(w)\geqq n-\varepsilon-v_p(\nu),\quad v_p(v)\geqq \varepsilon,\\ 0, & \text{dans les autres cas;}\end{cases}$$

2° si $\chi_0\chi_\nu$ est ramifié :

$$f_{n,\nu}(x)=\begin{cases} \chi_0^{-1}\chi_\nu(v) & \text{si}\quad v_p(u)\geqq 0,\quad v_p(w)\geqq n-\varepsilon-v_p(\nu),\quad v_p(v)=\varepsilon-h(\nu),\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

LEMME 8. — *Soit $n\in\mathbb{Z}$. Le groupe $\tilde{S}_p$ agissant dans $\mathcal{S}(H_p)$ par la représentation r_{ψ^ν}, la fonction $f_{n,\nu}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *$f_{n,\nu}$ est invariante par $\overline{U}_m$, pour $m=\sup(-v_p(\nu),\, h(\nu)-n)$;*

(ii) *$f_{n,\nu}$ est invariante par $\underline{U}_m$, pour $m=\sup(n,\, 2\varepsilon+v_p(\nu))$;*

(iii) *si $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$, $r_{\psi^\nu}(d(\alpha))f_{n,\nu}=\tilde{\gamma}_p(\alpha)\chi_0^{-1}(\alpha)f_{n,\nu}$.*

Démonstration. — Posons :

$$H^1=\left\{\begin{pmatrix} u & 0\\ 0 & -u\end{pmatrix};\ u\in\mathbb{Q}_p\right\},\qquad H^2=\left\{\begin{pmatrix} 0 & v\\ w & 0\end{pmatrix};\ v,\ w\in\mathbb{Q}_p\right\},$$

et soient r^1 et r^2 les représentations de Weil de $\tilde{S}_p$ agissant dans $\mathcal{S}(H^1)$ et $\mathcal{S}(H^2)$, attachées au caractère ψ_p^ν et à la forme quadratique q restreinte à H^1 et H^2. La fonction $f_{n,\nu}$ est de la forme $f^1\times f^2$, où f^1 et f^2 appartiennent à $\mathcal{S}(H^1)$ et $\mathcal{S}(H^2)$. La fonction f^1 s'identifie à $\mathrm{car}(\mathbb{Z}_p)$ (en identifiant H^1 à $\mathbb{Q}_p$). On voit facilement que, pour l'action définie par r^1, f^1 est invariante par $\overline{U}_m$, pour $m\geqq -v_p(\nu)$, par $\underline{U}_m$, pour $m\geqq 2\varepsilon+v_p(\nu)$, et que pour $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$, on a :

$$r^1(d(\alpha))f^1=\tilde{\gamma}_p(\alpha)\chi_\nu(\alpha)f^1.$$

Notons (w, v) l'élément $\begin{pmatrix} 0 & v \\ w & 0 \end{pmatrix}$ de H^2. Soient $F \in \mathscr{S}(H^2)$ et $\sigma \in SL_2(\mathbb{Q}_p)$. On définit les éléments $\mathscr{F}^\nu F$ et $\underline{R}(\sigma) F$ de $\mathscr{S}(H^2)$ par :

$$\mathscr{F}^\nu F(w, v) = \int_{\mathbb{Q}_p} F(w, z)\, \psi_p(\nu v z)\, dz,$$

$$\underline{R}(\sigma) F(w, v) = F((w, v)\sigma).$$

La fonction $\mathscr{F}^\nu f^2$ est proportionnelle à la fonction f'^2 :

$$f'^2(w, v) = \begin{cases} \chi_0 \chi_\nu(v) & \text{si} \quad v_p(w) \geqq n - \varepsilon - v_p(\nu), \quad v_p(v) = -\varepsilon - v_p(\nu), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le groupe $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ agissant dans $\mathscr{S}(H^2)$ par la représentation $\underline{R}$, on voit que f'^2 est invariante par $\overline{U}_m$ pour $m \geqq h(\nu) - n$, par $\underline{U}_m$ pour $m \geqq n$, et que si $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$;

$$\underline{R}(d(\alpha))\, f'^2 = \chi_0 \chi_\nu(\alpha^{-1})\, f'^2.$$

Mais pour $\sigma \in SL_2(\mathbb{Q}_p)$, on a l'égalité :

$$\mathscr{F}^\nu \circ r^2(\sigma) = \underline{R}(\sigma) \circ \mathscr{F}^\nu.$$

Le groupe $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ agissant dans $\mathscr{S}(H^2)$ par la représentation r^2, f^2 vérifie donc des propriétés analogues aux propriétés de f'^2 décrites ci-dessus. En se rappelant que pour $\sigma \in \tilde{S}_p$;

$$r_{\psi^\nu}(\sigma) f_{n,\nu} = r^1(\sigma) f^1 \times r^2(\sigma) f^2,$$

on obtient le lemme. □

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit :

$$m(n, \nu) = \begin{cases} \sup(h(\nu) - \varepsilon,\ n - 2\varepsilon - v_p(\nu)) & \text{si} \quad n \neq \varepsilon + v_p(\nu) + h(\nu), \\ h(\nu) & \text{si} \quad n = \varepsilon + v_p(\nu) + h(\nu). \end{cases}$$

LEMME 9. — *Soit $n \geqq \sup(1 + \varepsilon, n(\chi_0))$. Le groupe G_p agissant par la représentation R dans $\mathscr{S}(H_p)$, la fonction $f_{n,\nu}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *$f_{n,\nu}$ est invariante par $\overline{U}_0$, sauf si $p = 2$, $v_p(\nu) = 1$ et $n = 2$. Dans ce dernier cas, $f_{n,\nu}$ est invariante par $\overline{U}_1$;*

(ii) *$f_{n,\nu}$ est invariante par $\underline{U}_m$, pour $m = m(n, \nu)$;*

(iii) *si $a, d \in \mathbb{Z}_p^\times$, on a l'égalité :*

$$R\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} f_{n,\nu} = \chi_0 \chi_\nu(a d^{-1})\, f_{n,\nu}.$$

Cela résulte d'un calcul direct. □

3. Soient $V=\mathscr{V}'(\psi, T)$, ρ la représentation de $\mathscr{H}_A$ sur V et $\mathscr{W}'_p$ le modèle de Whittaker de ρ_p relatif au caractère ψ_p (IV, 4). On pose $\mathscr{W}'_{0,p}=\mathscr{W}'_p\otimes\chi_0$, $\rho_{0,p}=\rho_p\otimes\chi_0$. Soient $m\in\mathbb{N}$, $m\geqq n(\chi_0^2)$, et $W\in\mathscr{W}'_{0,p}$. On note (B_m) la condition :

$$(B_m)\begin{cases} \textit{si } m\geqq 1, \textit{ pour tout } k=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in K_p(m),\ \rho_{0,p}(k)W=\chi_0^2(d)W; \\ \textit{si } m=0, \textit{ pour tout } k\in K_p,\ \rho_{0,p}(k)W=W.\end{cases}$$

On note $\mathscr{W}'_{0,p}(m)$ l'espace des $W\in\mathscr{W}'_{0,p}$ vérifiant (B_m), et $\mathscr{W}'_p(m)$ l'espace des $W\in\mathscr{W}'_p$ tels que $W\times(\chi_0\circ\det)\in\mathscr{W}'_{0,p}(m)$. Soit $m(\rho_{0,p})$ le conducteur de $\rho_{0,p}$, i.e. le plus petit entier m tel que $\mathscr{W}'_{0,p}(m)$ soit non nul. Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit hermitien de $L^2(S_{\mathbb{Q}}\backslash\tilde{S}_A)$.

LEMME 10. — *Soient* $t\in T$ *tel que* $t\neq 0$ *et* $\tau(t)=\underset{v}{\otimes}\, t_v$, $\nu\in\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$, $r\in\mathbb{R}$, $r>0$, *et* $n\in\mathbb{N}$. *On suppose :*

(*a*) $n\geqq\sup(2\varepsilon+v_p(\nu), 1, n(\chi_0))$;

(*b*) $v_p(\nu)\in\{0, 1\}$;

(*c*) $t_p\in T_p(n)$;

(*d*) *il existe* $\alpha\in\mathbb{Q}_p^\times$ *tel que* $t_p(\nu\alpha^2)\neq 0$.

Alors :

1° $m(n,\nu)\geqq m(\rho_{0,p})$;

2° *il existe* $\nu'\in\mathbb{Q}^\times$, $\varphi\in V$, $f\in\mathscr{S}_{\psi^{\nu'}}(H_A)$, *tels que* $e(\varphi)=\underset{v}{\otimes}\, W_v$, $f=\underset{v}{\otimes}\, f_v$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\tilde{\rho}\sim\tilde{\rho}_{\nu'}(\rho)$;

(ii) $|\nu'-\nu|_p<r$;

(iii) $W_p\in\mathscr{W}'_p(m(n,\nu))$;

(iv) $f_p=f_{n,\nu}$;

(v) $\langle t, j_{\nu'}(\varphi)(f)\rangle\neq 0$.

Démonstration. — Prolongeons χ_0 en un caractère de $A^\times/\mathbb{Q}^\times$, encore noté χ_0. Soit $E=\{a\in\mathbb{Q}_p;\ |a-\nu|_p<r\}$. En supposant r assez petit, on a $E\subset\nu\mathbb{Z}_p^{\times 2}\subset\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$, d'après *d*. Soient $t'_p=\operatorname{car}(E)$, et $t'\in T$ tel que $\tau(t')=t'_p\otimes(\underset{v\neq p}{\otimes}\, t_v)$. D'après le lemme 6 appliqué à t', il existe $\nu'\in\mathbb{Q}^\times$ tel que $|\nu'-\nu|_p<r$ et que l'espace des $\psi^{\nu'}$-ièmes coefficients de Fourier de T soit non nul. Alors $\tilde{\rho}_{\nu'}(\rho)$ est isomorphe à $\tilde{\rho}$ ([W], prop. 26 et 27, iv). Pour $f\in\mathscr{S}_{\psi^{\nu'}}(H_A)$, $f=\underset{v}{\otimes}\, f_v$, et $s\in\mathbb{C}$, posons :

$$\varphi_{\psi^{\nu'}}(f, t, g)=\int_{S_{\mathbb{Q}}\backslash\tilde{S}_A} t(\sigma)\sum_{x\in H_{\mathbb{Q}}}\overline{r_{\psi^{\nu'}}(\sigma)R(g)f(x)}\,d\sigma,$$

$$I(f, s)=\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash A^\times}\varphi_{\psi^{\nu'}}(f, t, \underline{a})\chi_0\chi_{\nu'}(a)|a|^{s-1/2}d^\times a$$

([W], V, 1). Pour la place v réelle, on peut supposer que T_v est le modèle de Whittaker de $\tilde{\rho}_v$ relatif à $\psi_v^{\nu'}$. On pose $\tilde{W}_v=t_v$. Si v est finie et $\sigma\in\tilde{S}_v$, on pose :

$$\tilde{W}_v(\sigma)=\tilde{\rho}_v(\sigma)t_v(\nu').$$

Introduisons, pour toute place v, les espaces H_v^1 et H_v^2, les représentations de Weil r_v^1 et r_v^2 (attachées au caractère $\psi_v^{\nu'}$) et l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}_v^{\nu'}$ (*cf.* démonstration du lemme 8). Supposons que $f_v = f_v^1 \times f_v^2$. A une constante non nulle près, et pour Re s assez grand, on a l'égalité :

$$I(f, s) = \prod_v I_v(f_v, s),$$

où :

$$I_v(f_v, s) = \int_{N_v \backslash S_v} \tilde{W}_v(\sigma) \overline{r_v^1(\sigma) f_v^1(1)} \int_{\mathbb{Q}_v^\times} \overline{\mathscr{F}_v^{\nu'} f_v^2((0, a)\sigma)} \times \chi_{0,v} \chi_{\nu',v}(a) |a|_v^{s+1/2} d_v^\times a \, d_v \sigma$$

$\left[\text{où } N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right.$, [W], démonstration de la proposition $\left.26\right]$. Par un raisonnement analogue à celui de [W], lemmes 49, 51, 52, on peut choisir pour tout $v \neq p$ un élément $f_v \in \mathscr{S}_{\psi^{\nu'}}(H_v)$ tel que $I_v(f_v, s) \neq 0$ pour Re s assez grand, le « assez grand » étant uniforme en v. Considérons la place $v = p$, et abandonnons les indices v. Comme $\nu' \in \nu \mathbb{Z}_p^{\times 2}$, on a $\chi_{\nu'} = \chi_\nu$, $f_{n,\nu'} = f_{n,\nu}$. Supposons $f = f_{n,\nu}$. Alors $f^1 = \operatorname{car}(\mathbb{Z}_p)$ et $\mathscr{F}^{\nu'} f^2$ est proportionnel à la fonction :

$$f'(w, v) = \begin{cases} \chi_0 \chi_\nu(v) & \text{si} \quad v_p(w) \geqq n - \varepsilon - v_p(\nu) \quad \text{et} \quad v_p(v) = -\varepsilon - v_p(\nu), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\sigma = d(\alpha)\gamma$, avec $\alpha \in \mathbb{Q}_p^\times$, $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_p$. Sous l'hypothèse a, on a les égalités :

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \overline{f'((0, a)\sigma)} \chi_0 \chi_\nu(a) |a|^{s+1/2} d^\times a$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \gamma \notin \Gamma_p(n), \\ \chi_0 \chi_\nu(\alpha D^{-1}) |\alpha D^{-1}|_p^{s+1/2} |\chi_0 \chi_\nu(\nu p^\varepsilon)|^{-2} |\nu p^\varepsilon|_p^{-s-1/2} & \text{si} \quad \gamma \in \Gamma_p(n), \end{cases}$$

$$\overline{r^1(\sigma) f^1(1)} = \overline{\tilde{\gamma}(\alpha) \tilde{\varepsilon}_p(\gamma)} \chi_\nu(\alpha D^{-1}) |\alpha|^{1/2} f^1(\alpha) \qquad \text{si} \quad \gamma \in \Gamma_p(n),$$

[en posant $\tilde{\varepsilon}_p(\gamma) = 1$ si $p \neq 2$]. D'après les propriétés de l'espace T_p (IV, 4, assertion 7) et l'hypothèse c :

$$\tilde{W}(\sigma) = \tilde{\varepsilon}_p(\gamma) \chi_0(D) \tilde{\gamma}(\alpha) |\alpha| \mu(\alpha)^{-1} t_p(\nu' \alpha^2) \qquad \text{si} \quad \gamma \in \Gamma_p(n).$$

Il existe donc une constante $c(s) \neq 0$ telle que :

$$I_p(f_{n,\nu}, s) = c(s) \int_{\mathbb{Z}_p} \chi_0(\alpha) \mu(\alpha)^{-1} |\alpha|^{s+1} t_p(\nu' \alpha^2) d^\times \alpha.$$

Pour $\alpha = p^h \beta$, avec $\beta \in \mathbb{Z}_p^\times$, on a $t_p(\nu' \alpha^2) = t_p(\nu' p^{2h}) \mu \chi_0^{-1}(\beta)$ (lemme 7, ii), d'où :

$$I_p(f_{n,\nu}, s) = c(s) \sum_{h=0}^{\infty} \chi_0 \mu^{-1}(p^h) p^{-h(s+1)} t_p(\nu' p^{2h}).$$

D'après les hypothèses b et d, il existe $h \geqq 0$ tel que $t_p(\nu' p^{2h}) \neq 0$. On peut trouver s, avec $\operatorname{Re} s$ assez grand, tel que $I_p(f_{n,\nu}, s) \neq 0$. Pour $f = f_{n,\nu} \otimes (\underset{v \neq p}{\otimes} f_v)$, on peut donc trouver $s \in \mathbb{C}$ tel que $I(f, s) \neq 0$. La fonction $g \mapsto \varphi_{\psi^{\nu'}}(f, t, g)$ est donc non nulle. Elle appartient à l'espace $\mathscr{V}(\psi^{\nu'}, T) = V \otimes \chi_{\nu'}$ ([W], V, 4), et est de la forme $\varphi'_{\nu'}$, pour un certain $\varphi' \in V$. Écrivons $\varphi' = \sum_{i=1}^{h} \varphi^i$, où $\varphi^i \in V$ et $e(\varphi^i) = \underset{v}{\otimes} W_v^i$ [en fait, il est à peu près clair que $e(\varphi')$ vérifie lui-même cette propriété]. D'après la construction de φ' et le lemme 9, les fonctions W_p^i vérifient les propriétés suivantes : le groupe G_p agissant dans $\mathscr{W}_p$ par la représentation ρ_p, W_p^i est invariante par $\overline{U}_0$, par $\underline{U}_{m(n,\nu)}$, et, si a, $d \in \mathbb{Z}_p^\times$, on a l'égalité :

$$\rho_p \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} W_p^i = \overline{\chi_0(a d^{-1})}\, W_p^i = \chi_0(d a^{-1})\, W_p^i.$$

Notons $\langle\ ,\ \rangle_G$ le produit hermitien de $L^2(G_{\mathbb{Q}} Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}})$. Comme $\langle \varphi', \varphi' \rangle_G \neq 0$, on peut choisir i tel que $\langle \varphi', \varphi^i \rangle_G \neq 0$. Posons $\varphi = \varphi^i$. Les propriétés démontrées ci-dessus impliquent que $W_p^i \times (\chi_0 \circ \det) \in \mathscr{W}_{0,p}(m(n, \nu))$, donc que φ vérifie (iv) et que $m(n, \nu) \geqq m(\rho_{0,p})$. Comme $\langle \varphi', \varphi \rangle_G \neq 0$:

$$\int_{G_{\mathbb{Q}} Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}} \int_{S_{\mathbb{Q}} \backslash \tilde{S}_{\mathbb{A}}} t(\sigma) \sum_{x \in H_{\mathbb{Q}}} \overline{r_{\psi^{\nu'}}(\sigma) R(g) f(x)}\, d\sigma\, \overline{\varphi(g)}\, dg \neq 0.$$

En permutant ces intégrations ([W], démonstration de la proposition 27), on obtient (v). □

PROPOSITION 5. — *Soit* $n \geqq \sup(2\varepsilon + 1, n(\chi_0))$. *L'espace* $T_p(n)$ *est engendré par les fonctions* $i_{\nu,p} \circ j_{\nu,p}(W)(f_{n,\nu})$, *quand* $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$, $v_p(\nu) \in \{0, 1\}$, *et* $W \in \mathscr{W}_p(m(n, \nu))$.

Démonstration. — Notons $T'_p(n)$ l'espace engendré par ces fonctions. Soit $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times$, $v_p(\nu) \in \{0, 1\}$. On a :

– $v_p(\nu) \leqq 0$;

si χ_0^2 est ramifié, $h(\nu) = n(\chi_0 \chi_\nu) = n(\chi_0) \leqq n$;

si χ_0^2 est non ramifié :

$$h(\nu) \leqq \sup(1, n(\chi_0 \chi_\nu)) \leqq \sup(1, 1 + 2\varepsilon) \leqq 1 + 2\varepsilon \leqq n.$$

Donc $\sup(-v_p(\nu), h(\nu) - n) \leqq 0$. On a $\sup(n, 2\varepsilon + v_p(\nu)) = n$. Le lemme 8 montre que si $W \in \mathscr{W}_p$, $i_{\nu,p} \circ j_{\nu,p}(W)(f_{n,\nu}) \in T_p(n)$, d'où l'inclusion $T'_p(n) \subset T_p(n)$. Pour chaque place v, on peut définir un produit hermitien $\langle\ ,\ \rangle_v$ sur T_v, tel que si t^1, $t^2 \in T$, $\tau(t^1) = \underset{v}{\otimes} t_v^1$, $\tau(t^2) = \underset{v}{\otimes} t_v^2$, on ait l'égalité :

$$\langle t^1, t^2 \rangle = \prod_v \langle t_v^1, t_v^2 \rangle_v.$$

it $T''_p(n)$ l'orthogonal de $T'_p(n)$ dans $T_p(n)$. Si $T''_p(n)$ est non nul, soit $t_p \in T''_p(n)$, $t_p \neq 0$, et t élément non nul de T tel que $\tau(t) = t_p \otimes (\bigotimes_{v \neq p} t_v)$. Soit r un réel positif assez petit. On peut ›uver $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ tel que les hypothèses du lemme 10 soient satisfaites. Soient ν', f, φ mme dans ce lemme. On a $\nu' \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ et $v_p(\nu') \in \{0, 1\}$:

$$\tau \circ j_{\nu'}(\varphi)(f) = (\bigotimes_v i_{\nu', v}) \circ \tilde{e}_{\nu'} \circ j_{\nu'}(\varphi)(f) = \bigotimes_v (i_{\nu', v} \circ j_{\nu', v}(W_v)(f_v))$$

', assertion 5, et IV, 4). Donc :

$$\langle t, j_{\nu'}(\varphi)(f) \rangle = \prod_v \langle t_v, i_{\nu', v} \circ j_{\nu', v}(W_v)(f_v) \rangle_v.$$

après l'assertion (v) du lemme 10, on a en particulier :

$$\langle t_p, i_{\nu', p} \circ j_{\nu', p}(W_p)(f_p) \rangle_p \neq 0.$$

les assertions (iii) et (iv) du même lemme montrent que $i_{\nu', p} \circ j_{\nu', p}(W_p)(f_p) \in T'_p(n)$. La ation ci-dessus contredit la définition de t_p. Donc $T''_p(n) = \{0\}$ et $T'_p(n) = T_p(n)$. □

Soient $n \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ tels que $v_p(\nu) \in \{0, 1\}$ et $m(n, \nu) \geqq h(\nu) + 1$ [dans ce cas $n, \nu) = n - 2\varepsilon - v_p(\nu)$, et $n \geqq \sup(2\varepsilon + 1, n(\chi_0))$]. La fonction $\lambda_\nu : K_p(m(n, \nu) - 1) \mapsto \mathbb{C}^\times$ ìnie par :

$$\lambda_\nu \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \chi_0 \chi_\nu (a^{-1} d)$$

un caractère de $K_p(m(n, \nu) - 1)$.

LEMME 11. — *Soient $n \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ tels que $v_p(\nu) \in \{0, 1\}$ et $m(n, \nu) \geqq h(\nu) + 2$. Il existe is constantes y_1, y_2, y_3 telles que :*

$$\int_{(m(n, \nu) - 1)} R(k) f_{n, \nu} \lambda_\nu(k) \, dk$$

$$= y_1 f_{n-1, \nu} + y_2 R(\underline{\underline{p^{-1}}}) r_{\psi'}(d(p^{-1})) f_{n-2, \nu} + y_3 R(\underline{\underline{p^{-1}}}) r_{\psi'}(d(p^{-1})) f_{n-3, \nu}.$$

Démonstration. — Posons $m = m(n, \nu)$, S la fonction du membre de gauche de l'égalité ci-sus. A une constante près, on a l'égalité :

$$S = \sum_{c \in \mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p} R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cp^{m-1} & 1 \end{pmatrix} f_{n, \nu}$$

ıprès le lemme 9). Pour $c \in \mathbb{Z}_p$, et $x = \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix} \in H_p$, on a l'égalité :

$$R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cp^{m-1} & 1 \end{pmatrix} f_{n, \nu}(x) = f_{n, \nu} \begin{pmatrix} u + vp^{m-1} c & v \\ w - 2up^{m-1} c - vp^{2m-2} c^2 & -u - vp^{m-1} c \end{pmatrix}.$$

Supposons $\chi_0\chi_\nu$ ramifié. L'expression ci-dessus vaut $\chi_0^{-1}\chi_\nu(v)$ si :

$$(1)\qquad \begin{cases} v_p(v)=\varepsilon-h(\nu), & v_p(u+vp^{m-1}c)\geqq 0,\\ v_p(w-2up^{m-1}c-vp^{2m-2}c^2)\geqq n-\varepsilon-v_p(\nu), \end{cases}$$

et 0 si (1) n'est pas vérifiée. Supposons $v_p(v)=\varepsilon-h(\nu)$. Alors, d'après l'hypothèse sur m :

$$v_p(vp^{m-1}c)\geqq\varepsilon-h(\nu)+m-1\geqq 0,$$
$$v_p(vp^{2m-2}c^2)\geqq\varepsilon-h(\nu)+2m-2\geqq n-\varepsilon-v_p(\nu).$$

La condition (1) équivaut à :

$$(2)\qquad \begin{cases} v_p(v)=\varepsilon-h(\nu), & v_p(u)\geqq 0,\\ v_p(w-2ucp^{n-2\varepsilon-v_p(\nu)-1})\geqq n-\varepsilon-v_p(\nu). \end{cases}$$

Considérons la somme $S(x)$:

(a) Si $v_p(v)\neq\varepsilon-h(\nu)$, ou $v_p(u)<0$, ou $v_p(w)<n-\varepsilon-v_p(\nu)-1$, (2) n'est vérifiée pour aucun c, et $S(x)=0$.

(b) Si $v_p(v)=\varepsilon-h(\nu)$, $v_p(u)=0$ et $v_p(w)\geqq n-\varepsilon-v_p(\nu)-1$, (2) est vérifiée pour exactement un $c\in\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$, et $S(x)=\chi_0^{-1}\chi_\nu(v)$.

(c) Si $v_p(v)=\varepsilon-h(\nu)$, $v_p(u)\geqq 1$ et $v_p(w)<n-\varepsilon-v_p(\nu)$, (2) n'est vérifiée pour aucun c, et $S(x)=0$.

(d) Si $v_p(v)=\varepsilon-h(\nu)$, $v_p(u)\geqq 1$ et $v_p(w)\geqq n-\varepsilon-v_p(\nu)$, (2) est vérifiée pour tout $c\in\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$, et $S(x)=p\chi_0^{-1}\chi_\nu(v)$.

On calcule facilement, à des constantes près :

$$f_{n-1,\nu}(x)=\begin{cases}\chi_0^{-1}\chi_\nu(v) & \text{si}\quad v_p(v)=\varepsilon-h(\nu),\quad v_p(u)\geqq 0,\quad v_p(w)\geqq n-1-\varepsilon-v_p(\nu),\\ 0, & \text{sinon;}\end{cases}$$

$$y'_2\,R(\underline{\underline{p^{-1}}})\,r_{\psi'}(d(p^{-1}))\,f_{n-2,\nu}(x)$$
$$=\begin{cases}\chi_0^{-1}\chi_\nu(v) & \text{si}\quad v_p(v)=\varepsilon-h(\nu),\quad v_p(u)\geqq 1,\quad v_p(w)\geqq n-\varepsilon-v_p(\nu),\\ 0, & \text{sinon;}\end{cases}$$

$$y'_3\,R(\underline{\underline{p^{-1}}})\,r_{\psi'}(d(p^{-1}))\,f_{n-3,\nu}(x)$$
$$=\begin{cases}\chi_0^{-1}\chi_\nu(v) & \text{si}\quad v_p(v)=\varepsilon-h(\nu),\quad v_p(u)\geqq 1,\quad v_p(w)\geqq n-1-\varepsilon-v_p(\nu),\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors :

$$S=f_{n-1,\nu}+py'_2\,R(\underline{\underline{p^{-1}}})\,r_{\psi'}(d(p^{-1}))\,f_{n-2,\nu}-y'_3\,R(\underline{\underline{p^{-1}}})\,r_{\psi'}(d(p^{-1}))\,f_{n-3,\nu}.$$

Si $\chi_0\chi_\nu$ est non ramifié, un raisonnement analogue conduit au même résultat. □

LEMME 12. — *Soient* $n\in\mathbb{Z}$, $\nu\in\mathbb{Q}_p^\times$ $(\tilde{\rho}_p)$ *tels que* $v_p(\nu)\in\{0, 1\}$, *et* $m(n, \nu)\geqq h(\nu)+1$. *Il existe une constante* $y\in\mathbb{C}$ *telle que :*

$$\int_{K_p(m(n,\,\nu)-1)} R(k\underline{\underline{p}})\, f_{n,\,\nu}\, \lambda_\nu(k)\, dk = y r_{\psi'}(d(p^{-1}))\, f_{n-2,\,\nu}.$$

Démonstration. — Soient S le membre de gauche et $m=m(n,\nu)$. D'après le lemme 9, la fonction $k \mapsto R(k\underline{\underline{p}})\, f_{n,\,\nu}\, \lambda_\nu(k)$ est invariante à droite par les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_p$ telles que $v_p(c) \geqq m-1$, $v_p(b) \geqq 1$. A une constante près, on a l'égalité :

$$S = \sum_{b \in \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p} R(\underline{\underline{bp}})\, f_{n,\,\nu}.$$

Soit $x = \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix} \in H_p$. Pour $b \in \mathbb{Z}_p$, on a l'égalité :

$$(3) \qquad R(\underline{\underline{bp}})\, f_{n,\,\nu}(x) = f_{n,\,\nu}\begin{pmatrix} u-bw & p^{-1}(v+2ub-wb^2) \\ pw & wb-u \end{pmatrix}.$$

Supposons $\chi_0 \chi_\nu$ ramifié. L'expression ci-dessus vaut $\chi_0^{-1}\chi_\nu(p^{-1}(v+2ub-wb^2))$, si :

$$(4) \qquad \begin{cases} v_p(p^{-1}(v+2ub-wb^2)) = \varepsilon - h(\nu), \\ v_p(u-bw) \geqq 0, \qquad v_p(pw) \geqq n-\varepsilon-v_p(\nu), \end{cases}$$

et 0 si (4) n'est pas vérifiée. Supposons $v_p(pw) \geqq n-\varepsilon-v_p(\nu)$. Alors :

$$v_p(bw) \geqq n-1-\varepsilon-v_p(\nu) = m+\varepsilon-1 \geqq h(\nu)+\varepsilon \geqq 0,$$
$$v_p(p^{-1}wb^2) \geqq n-2-\varepsilon-v_p(\nu) \geqq m+\varepsilon-2 \geqq h(\nu)-1+\varepsilon \geqq \varepsilon.$$

L'expression (3) vaut donc $\chi_0^{-1}\chi_\nu(p^{-1}(v+2ub))$ si :

$$(5) \qquad v_p(v+2ub) = 1+\varepsilon-h(\nu), \qquad v_p(u) \geqq 0, \qquad v_p(w) \geqq n-1-\varepsilon-v_p(\nu),$$

et 0 sinon. Considérons la somme $S(x)$.

(*a*) Si $v_p(w) < n-1-\varepsilon-v_p(\nu)$, ou $v_p(u) < 0$, (5) n'est vérifiée pour aucun b, et $S(x)=0$.

(*b*) Si $v_p(w) \geqq n-1-\varepsilon-v_p(\nu)$, et $v_p(u)=0$, je dis que $S(x)=0$. Si $h(\nu)>1$, la condition (5) devient $v_p(v)=1+\varepsilon-h(\nu)$, et est indépendante de b. Si elle n'est pas vérifiée, $S(x)=0$. Si elle l'est :

$$S(x) = \sum_{b \in \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p} \chi_0^{-1}\chi_\nu(p^{-1}v)\, \chi_0^{-1}\chi_\nu(1+2ubv^{-1}).$$

Or $v_p(2uv^{-1}) = h(\nu)-1 = n(\chi_0^{-1}\chi_\nu)-1$, donc $S(x)=0$ par définition de $n(\chi_0^{-1}\chi_\nu)$. Supposons $h(\nu)=1$. Si $v_p(v)<\varepsilon$, (5) n'est jamais vérifiée et $S(x)=0$. Si $v_p(v) \geqq \varepsilon$, (5) est vérifiée pour tout $b \in \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$, sauf pour $b \equiv -v(2u)^{-1} \bmod p\mathbb{Z}_p$. Alors :

$$S(x) = \sum_{b \neq -v(2u)^{-1}} \chi_0^{-1}\chi_\nu(2p^{-1})\, \chi_0^{-1}\chi_\nu(ub+2^{-1}v) = \sum_{b \in (\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)^\times} \chi_0^{-1}\chi_\nu(2p^{-1})\, \chi_0^{-1}\chi_\nu(b),$$

et $S(x)=0$, car $\chi_0^{-1}\chi_\nu$ est ramifié.

(*c*) Si $v_p(w) \geqq n-1-\varepsilon-v_p(\nu)$, $v_p(u) \geqq 1$ et $v_p(v) \neq 1+\varepsilon-h(\nu)$, (5) n'est vérifiée pour aucun b et $S(x)=0$.

(*d*) Si $v_p(w) \geqq n-1-\varepsilon-v_p(\mathrm{v})$, $v_p(u) \geqq 1$ et $v_p(v)=1+\varepsilon-h(\mathrm{v})$, (5) est vérifiée pour tout $b \in \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$. De plus $\chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}}(p^{-1}(v+2ub))=\chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}}(p^{-1}v)$ pour tout b, donc $\mathrm{S}(x)=p\chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}}(p^{-1})\chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}}(v)$.

Pour une constante y', on a l'égalité :

$$y' r_{\psi'}(d(p^{-1}))f_{n-2,\mathrm{v}}(x) = \begin{cases} \chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}}(v) & \text{si } v_p(v)=1+\varepsilon-h(\mathrm{v}),\quad v_p(u)\geqq 1,\quad v_p(w)\geqq n-1-\varepsilon-v_p(\mathrm{v}), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'où :

$$\mathrm{S}=p\chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}}(p^{-1})y' r_{\psi'}(d(p^{-1}))f_{n-2,\mathrm{v}}.$$

Supposons maintenant $\chi_0\chi_{\mathrm{v}}$ non ramifié. L'expression (3) vaut 1 si :

$$(6) \qquad v_p(p^{-1}(v+2ub-wb^2))=\varepsilon-1, \qquad v_p(u-bw)\geqq 0, \qquad v_p(pw)\geqq n-\varepsilon-v_p(\mathrm{v}),$$

$1-p$ si :

$$(7) \qquad v_p(p^{-1}(v+2ub-wb^2))\geqq \varepsilon, \qquad v_p(u-bw)\geqq 0, \qquad v_p(pw)\geqq n-\varepsilon-v_p(\mathrm{v}),$$

et 0 dans les autres cas. Comme précédemment, (6), resp. (7), est équivalente à :

$$(8) \qquad v_p(v+2ub)=\varepsilon, \qquad v_p(u)\geqq 0, \qquad v_p(w)\geqq n-1-\varepsilon-v_p(\mathrm{v}),$$

resp. :

$$(9) \qquad v_p(v+2ub)\geqq \varepsilon+1, \qquad v_p(u)\geqq 0, \qquad v_p(w)\geqq n-1-\varepsilon-v_p(\mathrm{v}).$$

Considérons la somme $\mathrm{S}(x)$.

(*a*) Si $v_p(w)<n-1-\varepsilon-v_p(\mathrm{v})$, ou $v_p(u)<0$, (8) ou (9) n'est vérifiée pour aucun b, et $\mathrm{S}(x)=0$.

(*b*) Si $v_p(w)\geqq n-1-\varepsilon-v_p(\mathrm{v})$, et $v_p(u)=0$, je dis que $\mathrm{S}(x)=0$. Si $v_p(v)<\varepsilon$, (8) ou (9) n'est vérifiée pour aucun b, et $\mathrm{S}(x)=0$. Si $v_p(v)\geqq\varepsilon$, (9) est vérifiée pour $b\equiv -v(2u)^{-1} \bmod p\mathbb{Z}_p$, et (8) est vérifiée pour $b\not\equiv -v(2u)^{-1} \bmod p\mathbb{Z}_p$. Alors $\mathrm{S}(x)=1-p+p-1=0$.

(*c*) Si $v_p(w)\geqq n-1-\varepsilon-v_p(\mathrm{v})$, et $v_p(u)\geqq 1$, la condition (8), resp. (9), devient $v_p(v)=\varepsilon$, resp. $v_p(v)\geqq\varepsilon+1$, et est indépendante de b. On obtient :

$$\mathrm{S}(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } v_p(v)<\varepsilon, \\ p & \text{si } v_p(v)=\varepsilon, \\ p(1-p) & \text{si } v_p(v)>\varepsilon. \end{cases}$$

Comme précédemment, on en déduit le lemme. □

Notons $\tilde{\pi}$, resp. π, resp. π_0, l'endomorphisme de T_p, resp. $\mathscr{W}'_p$, resp. $\mathscr{W}'_{0,p}$, défini par $\tilde{\pi}(t_p)=\tilde{\rho}_p(d(p^{-1}))t_p$, resp. $\pi(\mathrm{W})=\rho_p(\underline{\underline{p^{-1}}})\mathrm{W}$, resp. $\pi_0(\mathrm{W}_0)=\rho_{0,p}(\underline{\underline{p^{-1}}})\mathrm{W}_0$.

LEMME 13. — (i) *Si* $n \geqq \sup(2\varepsilon, n(\chi_0))$ *et* $t_p \in \mathrm{T}_p(n)$, $\tilde{\pi}(t_p) \in \mathrm{T}_p(n+2)$;

(ii) *si* $m \geqq n(\chi_0^2)$ *et* $\mathrm{W} \in \mathscr{W}'_p(m)$, $\pi(\mathrm{W}) \in \mathscr{W}'_p(m+1)$;

(iii) *il existe* $\mathrm{W}^{\text{new}} \in \mathscr{W}'_p(m(\rho_{0,\,p}))$ *tel que pour* $m \geqq m(\rho_{0,\,p})$, $\mathscr{W}'_p(m)$ *soit égal à l'espace engendré par* $\{\pi^i(\mathrm{W}^{\text{new}});\ 0 \leqq i \leqq m - m(\rho_{0,\,p})\}$.

C'est immédiat ([D], th. 2.2.6, p. 81). □

LEMME 14. — *Soient* $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ *tel que* $v_p(\nu) \in \{0, 1\}$, *et* $n \in \mathbb{N}$ *tel que :*

(a) $n \geqq h(\nu) + v_p(\nu) + 2 + 2\varepsilon$;

(b) $n \geqq m(\rho_{0,\,p}) + v_p(\nu) + 1 + 2\varepsilon$.

Alors pour tout $\mathrm{W} \in \mathscr{W}'_p(m(n, \nu))$, $[i_{\nu,\,p} \circ j_{\nu,\,p}(\mathrm{W})](f_{n,\,\nu})$ *appartient à l'espace* $\mathrm{T}_p(n-1) + \tilde{\pi}\,\mathrm{T}_p(n-2)$.

Remarque. — Sous l'hypothèse a, $\mathrm{T}_p(n-2)$, $\mathrm{T}_p(n-1)$ et $\mathrm{T}_p(n)$ sont bien définis.

Démonstration. — Posons $m = m(n, \nu)$. On a $m = n - 2\varepsilon - v_p(\nu) \geqq m(\rho_{0,\,p}) + 1$. On peut supposer $\mathrm{W} = \pi^i(\mathrm{W}^{\text{new}})$, avec $0 \leqq i \leqq m - m(\rho_{0,\,p})$. Soient $u_i = j_{\nu,\,p}(\pi^i(\mathrm{W}^{\text{new}}))(f_{n,\,\nu})$ et $\sigma \in \tilde{\mathrm{S}}_p$. On a :

$$u_i(\sigma) = \int_{\mathrm{Z}_p \backslash \mathrm{G}_p} r_{\psi^\nu}(\sigma)\,\mathrm{R}(g)\,f_{n,\,\nu}(x_1')\,\pi^i(\mathrm{W}^{\text{new}})_\nu(g)\,dg.$$

Supposons $i \leqq m - m(\rho_{0,\,p}) - 1$. Alors $\pi^i(\mathrm{W}^{\text{new}}) = \mathrm{W} \in \mathscr{W}'_p(m-1)$. Si $k \in \mathrm{K}_p(m-1)$, on a $\rho_\nu(k)\,\mathrm{W}_\nu = \lambda_\nu(k)\,\mathrm{W}_\nu$, donc :

$$u_i(\sigma) = (\operatorname{mes} \mathrm{K}_p(m-1))^{-1} \times \int_{\mathrm{Z}_p \backslash \mathrm{G}_p} \int_{\mathrm{K}_p(m-1)} r_{\psi^\nu}(\sigma)\,\mathrm{R}(gk)\,f_{n,\,\nu}(x_1')\,\rho_\nu(k)\,\mathrm{W}_\nu(g)\,dk\,dg.$$

$$u_i(\sigma) = (\operatorname{mes} \mathrm{K}_p(m-1))^{-1} \int_{\mathrm{Z}_p \backslash \mathrm{G}_p} r_{\psi^\nu}(\sigma)\,\mathrm{R}(g)\,f'(x_1')\,\mathrm{W}_\nu(g)\,dg,$$

avec :

$$f' = \int_{\mathrm{K}_p(m-1)} \mathrm{R}(k)\,f_{n,\,\nu}\,\lambda_\nu(k)\,dk.$$

D'après le lemme 11 :

$$u_i(\sigma) = y_1\, j_{\nu,\,p}(\mathrm{W})(f_{n-1,\,\nu})(\sigma) + y_2\, j_{\nu,\,p}(\mathrm{W})(\mathrm{R}(\underline{\underline{p^{-1}}})\,f_{n-2,\,\nu})(\sigma\, d(p^{-1}))$$
$$+ y_3\, j_{\nu,\,p}(\mathrm{W})(\mathrm{R}(\underline{\underline{p^{-1}}})\,r_{\psi^\nu}(d(p^{-1}))\,f_{n-3,\,\nu})(\sigma).$$

Soient t_1, t_2, t_3 les images par $i_{\nu,\,p}$ de $j_{\nu,\,p}(\mathrm{W})(f_{n-1,\,\nu})$ $j_{\nu,\,p}(\mathrm{W})(\mathrm{R}(\underline{\underline{p^{-1}}})\,f_{n-2,\,\nu})$, $j_{\nu,\,p}(\mathrm{W})(\mathrm{R}(\underline{\underline{p^{-1}}})\,r_{\psi^\nu}(d(p^{-1}))\,f_{n-3,\,\nu})$. Alors :

$$[i_{\nu,\,p} \circ j_{\nu,\,p}(\mathrm{W})](f_{n,\,\nu}) = y_1\, t_1 + y_2\, \tilde{\pi}(t_2) + y_3\, t_3.$$

Le lemme 8 et un calcul rapide montrent que $t_1, t_3 \in \mathrm{T}_p(n-1)$, et $t_2 \in \mathrm{T}_p(n-2)$. L'expression ci-dessus appartient à $\mathrm{T}_p(n-1) + \tilde{\pi}\,\mathrm{T}_p(n-2)$. Supposons maintenant $i = m - m(\rho_{0,\,p})$. Soit

$W' = \pi^{i-1}(W^{\text{new}})$. Alors $W = \pi(W')$, et $W' \in \mathscr{W}'_p(m-1)$. On a :

$$u_i(\sigma) = \int_{Z_p \backslash G_p} r_{\psi^\nu}(\sigma) R(g) f_{n,\nu}(x'_1) W'_\nu(g\underline{\underline{p}}^{-1}) \chi_\nu(p)\, dg$$

$$= \chi_\nu(p) \int_{Z_p \backslash G_p} r_{\psi^\nu}(\sigma) R(g\underline{\underline{p}}) f_{n,\nu}(x'_1) W'_\nu(g)\, dg$$

$$= (\operatorname{mes} K_p(m-1))^{-1} \chi_\nu(p) \int_{Z_p \backslash G_p} r_{\psi^\nu}(\sigma) R(g) f'(x'_1) W'_\nu(g)\, dg,$$

avec :

$$f' = \int_{K_p(m-1)} R(k\underline{\underline{p}}) f_{n,\nu} \lambda_\nu(k)\, dk.$$

En utilisant cette fois le lemme 12, on conclut comme dans le cas $i \leqq m - m(\rho_{0,p}) - 1$. $\square$

4. Soit $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times$. Si $\chi_0(-1) = \underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)$, on définit une fonction $\gamma[\nu]$ sur $\mathbb{Q}_p^\times$ par :

$$\gamma[\nu](a) = \begin{cases} \mu\chi_0^{-1}(\alpha) & \text{si} \quad a = \nu\alpha^2 \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{Z}_p^\times, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

LEMME 15. — (i) *Si* $\chi_0(-1) = -\underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)$, $T_p(n)$ *est nul pour tout* n;

(ii) *si* $\chi_0(-1) = \underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)$, *soit* $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ *tel que* $v_p(\nu) \geqq 0$. *Il existe un entier* n *tel que* $\gamma[\nu] \in T_p(n)$.

Démonstration. — Pour $\alpha = -1$, la relation (A_n), 3, devient :

$$\underline{\omega}(\tilde{\rho}_p) \tilde{\gamma}_p(-1)\, t = \chi_0(-1) \tilde{\gamma}_p(-1)\, t,$$

d'où (i). Soit $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ tel que $v_p(\nu) \geqq 0$. Supposons $\chi_0(-1) = \underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)$. En tout cas $\gamma[\nu] \in \mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p))$, donc $\gamma[\nu] \in T_p$. D'après IV, 4, assertion 7, $\gamma[\nu]$ vérifie les conditions 1 et 3 de (A_n). La représentation $\tilde{\rho}_p$ étant lisse, $\gamma[\nu]$ vérifie la condition 2 pour n assez grand. $\square$

Supposons $\chi_0(-1) = \underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)$. Soit $J(\tilde{\rho}_p)$ un système de représentants du quotient $\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)/\mathbb{Z}_p^{\times 2}$. Pour $e \in \mathbb{Z}$, soit :

$$U(e) = \{\gamma[\nu];\ \nu \in J(\tilde{\rho}_p),\ v_p(\nu) = e - m(\rho_{0,p}) - 2\varepsilon\}.$$

On note $\overline{U}(e)$ le sous-espace de T_p engendré par $U(e)$. Soit $\tilde{n}_p$ le plus petit des entiers $m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon$, $m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon + 1$, tel qu'il existe $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ avec $v_p(\nu) = \tilde{n}_p - m(\rho_{0,p}) - 2\varepsilon$. Considérons l'hypothèse

(H) $\quad m(\rho_{0,p}) \geqq \sup(n(\chi_0) + 1, 2 + 2\varepsilon)$.

PROPOSITION 6. — *Supposons que* $\chi_0(-1) = \underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)$ *et que* (H) *est vérifiée. Soit* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq \sup(1 + \varepsilon, n(\chi_0))$:

(i) $T_p(n) \neq \{0\}$ *si et seulement si* $n \geqq \tilde{n}_p$;

(ii) *si* $n \geqq \tilde{n}_p$, *on a l'égalité* $T_p(n) = \oplus \overline{U}(e)$, *pour* $\tilde{n}_p \leqq e \leqq n$.

La démonstration occupe la fin du paragraphe.

LEMME 16. — *Sous les hypothèses de la proposition, les propriétés suivantes sont vraies :*

(i) *si* $n < m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon$, $T_p(n) = \{0\}$;

(ii) *si* $n = m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon$, $T_p(n)$ *est engendré par les fonctions* $[i_{v,p} \circ j_{v,p}(W^{new})](f_{n,v})$, *pour* $v \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p) \cap \mathbb{Z}_p^\times$;

(iii) *si* $n = m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon + 1$, $T_p(n)$ *est engendré par* $T_p(n-1)$ *et les fonctions* $[i_{v,p} \circ j_{v,p}(W^{new})](f_{n,v})$, *pour* $v \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p) \cap p\mathbb{Z}_p^\times$;

(iv) *si* $n > m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon + 1$, $T_p(n) = T_p(m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon + 1) + \tilde{\pi}\, T_p(n-2)$.

Remarque. — Sous l'hypothèse (H), $m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon > \sup(1+\varepsilon, n(\chi_0))$, ce qui donne un sens à (ii) et (iii).

Démonstration. — Soit $n = m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon - 1$. On a $n \geqq \sup(1+2\varepsilon, 1, n(\chi_0))$. Si $T_p(n) \neq \{0\}$, on peut choisir $t \in T$ et $v \in \mathbb{Q}_p^\times$ tels que les hypothèses du lemme 10 soient satisfaites. Alors $m(n, v) \geqq m(\rho_{0,p})$. Or :

$$m(n, v) \leqq \sup(h(v), n - 2\varepsilon - v_p(v)) = \sup(h(v), m(\rho_{0,p}) - v_p(v) - 1).$$

On a :

$$m(\rho_{0,p}) - v_p(v) - 1 < m(\rho_{0,p}),$$

et, sous l'hypothèse (H) :

$$h(v) < m(\rho_{0,p}),$$

donc $m(n, v) < m(\rho_{0,p})$. Contradiction, et $T_p(n) = \{0\}$.

Soit $n = m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon$. Soient $v \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$, $v_p(v) \in \{0, 1\}$, et $W \in \mathscr{W}_p(m(n, v))$. Si $v_p(v) = 1$:

$$m(n, v) \leqq \sup(h(v), n - 2\varepsilon - 1) = \sup(h(v), m(\rho_{0,p}) - 1) < m(\rho_{0,p}),$$

donc $W = 0$. Si $v_p(v) = 0$, $m(n, v) = m(\rho_{0,p})$, et W est proportionnel à W^{new}. L'assertion (ii) résulte de la proposition 4.

Soient $n = m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon + 1$, v et W comme ci-dessus. Si $v_p(v) = 0$, le couple (v, n) vérifie les hypothèses du lemme 14. Comme $T_p(n-2) = \{0\}$, on obtient :

$$[i_{v,p} \circ j_{v,p}(W)](f_{n,v}) \in T_p(n-1).$$

Si $v_p(v) = 1$, $m(n, v) = m(\rho_{0,p})$ et W est proportionnel à W^{new}. L'assertion (iii) résulte de la proposition 5.

Soit $n > m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon + 1$. En combinant comme ci-dessus le lemme 14 et la proposition 5, on obtient l'égalité $T_p(n) = T_p(n-1) + \tilde{\pi}\, T_p(n-2)$. L'assertion (iv) s'en déduit par récurrence sur n. □

LEMME 17. — *Supposons les hypothèses de la proposition satisfaites, et que* $n \in \{m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon, m(\rho_{0,p}) + 2\varepsilon + 1\}$. *Soit* $v \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ *tel que* $v_p(v) = n - m(\rho_{0,p}) - 2\varepsilon$. *Alors la fonction* $[i_{v,p} \circ j_{v,p}(W^{new})](f_{n,v})$ *est proportionnelle à* $\gamma[v]$.

Démonstration. — Notons $t_v = [i_{v,p} \circ j_{v,p}(W^{new})](f_{n,v})$. Pour $a \in \mathbb{Q}_p^\times$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$, on a $t_v(a\alpha^2) = \mu\chi_0^{-1}(\alpha)\, t_v(a)$ (lemmes 16 et 7, ii). Il suffit de démontrer que le support de t_v est contenu dans $v\mathbb{Z}_p^{\times 2}$. Soit $a \in \mathbb{Q}_p^\times$.

(a) si $v_p(a)<0$, $t_\nu(a)=0$ (lemme 7, ii);

(b) si $v_p(a)\geqq 2$, on a l'égalité :

$$t_\nu(a)=p^{-1}\tilde{\gamma}(p)^{-1}\mu(p)\tilde{T}'_p t_\nu(ap^{-2})$$

(lemme 7, iii). On a $\tilde{T}'_p t_\nu \in T_p(n')$, avec $n'=\sup(n-2, 1+\varepsilon, n(\chi_0))$ (lemme 7, i). Or $n'<m(\rho_{0,p})+2\varepsilon$, donc $T_p(n')=\{0\}$, et $t_\nu(a)=0$;

(c) supposons $n=m(\rho_{0,p})+2\varepsilon$, d'où $v_p(\nu)=0$, et $v_p(a)=1$. Si $t_\nu(a)\neq 0$, on peut appliquer le lemme 10 au triplet (t_ν, a, n). Alors $m(n, a)\geqq m(\rho_{0,p})$. Or :

$$m(n, a)\leqq \sup(h(a), m(\rho_{0,p})-1)<m(\rho_{0,p}).$$

Contradiction, et $t_\nu(a)=0$;

(d) supposons $n=m(\rho_{0,p})+2\varepsilon$, d'où $v_p(\nu)=0$, et $v_p(a)=0$, $a\notin \nu\mathbb{Z}_p^{\times 2}$. Soit $\xi=a\nu^{-1}$. D'après IV, 4, assertion 11, on a l'égalité suivante, à une constante non nulle près :

$$t_\nu(a)=\int_{O_{\xi,p}\backslash G_p} R(g)f_{n,\nu}(x_\xi)\,u(W_\nu^{\text{new}}, \xi)(g)\,dg.$$

Soit $g\in G_p$, posons $g^{-1}x_\xi g=\begin{pmatrix} u & v \\ w & -u\end{pmatrix}$ et supposons que $R(g)f_{n,\nu}(x_\xi)\neq 0$. Par définition de $f_{n,\nu}$, les relations suivantes sont vérifiées :

$$(10)\qquad \begin{cases} u^2+vw=\xi, \\ v_p(u)\geqq 0, \qquad v_p(w)\geqq n-\varepsilon-v_p(\nu)=m(\rho_{0,p})+\varepsilon, \qquad v_p(v)\geqq \varepsilon-h(\nu). \end{cases}$$

Alors $v_p(vw)\geqq m(\rho_{0,p})+2\varepsilon-h(\nu)\geqq 1+2\varepsilon$, donc $\xi\equiv u^2 \bmod p^{1+2\varepsilon}\mathbb{Z}_p$, et $\xi\in\mathbb{Z}_p^{\times 2}$, contrairement à l'hypothèse. La fonction $g\mapsto R(g)f_{n,\nu}(x_\xi)$ est donc nulle, et $t_\nu(a)=0$;

(e) supposons $n=m(\rho_{0,p})+2\varepsilon+1$, d'où $v_p(\nu)=0$, $v_p(a)\in\{0, 1\}$, et $a\notin\nu\mathbb{Z}_p^{\times 2}$. Soit $\xi=a\nu^{-1}$ [on a $v_p(\xi)\in\{-1, 0\}$]. Si $t_\nu(a)\neq 0$, on montre comme au (d) qu'il existe u, v, w vérifiant (10). On en déduit $\xi\equiv u^2 \bmod p^{1+2\varepsilon}\mathbb{Z}_p$, donc $v_p(\xi)=0$ et $\xi\in\mathbb{Z}_p^{\times 2}$, contrairement à l'hypothèse. Donc $t_\nu(a)=0$. □

Démonstration de la proposition 6. — Les lemmes 16 et 17 montrent qu'il existe deux sous-ensembles $U_0\subset U(m(\rho_{0,p})+2\varepsilon)$, $U_1\subset U(m(\rho_{0,p})+2\varepsilon+1)$, tels que pour $n\in\mathbb{N}$:

$$T_p(n)=\begin{cases} \{0\} & \text{si } n<m(\rho_{0,p})+2\varepsilon, \\ \overline{U}_0 & \text{si } n=m(\rho_{0,p})+2\varepsilon, \\ \overline{U_0+U_1} & \text{si } n=m(\rho_{0,p})+2\varepsilon+1, \\ \overline{U}_0+\overline{U}_1+\tilde{\pi}T_p(n-2) & \text{si } n>m(\rho_{0,p})+2\varepsilon+1. \end{cases}$$

Soient $\nu\in\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$, $v_p(\nu)\in\{0, 1\}$, et n un entier tel que $\gamma[\nu]\in T_p(n)$ (lemme 15). Remarquons que les supports des fonctions de $\overline{U}_0$, resp. $\overline{U}_1$, resp. $\tilde{\pi}T_p(n-2)$, sont inclus dans $\mathbb{Z}_p^\times$, resp. $p\mathbb{Z}_p^\times$, resp. $p^2\mathbb{Z}_p$. Les égalités ci-dessus montrent que $\gamma[\nu]\in\overline{U}_{v_p(\nu)}$. Toujours par comparaison des supports, $\gamma[\nu]\in U_{r_p(\nu)}$. Donc $U_i=U(m(\rho_{0,p})+2\varepsilon+i)$, $i=0, 1$. En remarquant que pour $e\in\mathbb{Z}$, $\pi\overline{\overline{U}}(e)=\overline{\overline{U}}(e+2)$, les égalités ci-dessus montrent que :

$$T_p(n)=\oplus\overline{\overline{\overline{U}}}(e),\qquad m(\rho_{0,p})+2\varepsilon\leqq e\leqq n.$$

Par définition de $\tilde{n}_p$, $\overline{\overline{\overline{U}}}(m(\rho_{0,p})+2\varepsilon)=\{0\}$, si $\tilde{n}_p\neq m(\rho_{0,p})+2\varepsilon$, donc $T_p(n)=\oplus\overline{\overline{U}}(e)$, $\tilde{n}_p\leqq e\leqq n$. □

5. LEMME 18. — *Supposons $p=2$, $n(\chi_0)\leqq 2$, et $m(\rho_{0,2})\geqq 2$. Alors $T_2(2)=\{0\}$.*

Démonstration. — Soient $t_2\in T_2(2)$, et $\nu\in\mathbb{Q}_2^\times(\tilde{\rho}_2)$. Si $v_2(\nu)<0$, $t_2(\nu)=0$ (lemme 7). Supposons $v_2(\nu)=0$. Si $t_2(\nu)\neq 0$, on peut appliquer le lemme 10 au triplet t_2, ν, $n=2$. Donc $m(n, \nu)\geqq m(\rho_{0,2})$. Or :

$$m(n, \nu)=\sup(1, h(\nu)-1)\leqq\sup(1, n(\chi_0\chi_\nu)-1)=1,$$

car $n(\chi_0)\leqq 2$, $n(\chi_\nu)\leqq 2$. Donc $m(n, \nu)<m(\rho_{0,2})$, contradiction, et $t_2(\nu)=0$. Donc t_2 est à support dans $2\mathbb{Z}_2$, et est invariante par $\overline{\overline{U}}_{-1}$ (IV, 4, assertion 7, i). Soit $\alpha\in\mathbb{Z}_2^\times$. La matrice $d_2(\alpha)$ appartient au groupe engendré par $\overline{U}_{-1}$ et $\underline{U}_2$ ([D], p. 81). Comme t_2 est invariante par $\overline{U}_{-1}$ et $\underline{U}_2$, il existe $\varepsilon'\in\{\pm 1\}$ tel que $\tilde{\rho}_2(d_2(\alpha))\,t_2=\varepsilon' t_2$. Cela contredit la condition 3 de (A_2) (V, 1), sauf si $t_2=0$. □

Considérons l'hypothèse :

(H′) *L'une des conditions suivantes est vérifiée.*

(a) $p\neq 2$, (b) $m(\rho_{0,p})\geqq 4$, (c) $n(\chi_0)\geqq 4$, (d) $\rho_{0,p}$ *n'est pas supercuspidale.*

PROPOSITION 7. — *Supposons que $\tilde{\rho}_p$ est supercuspidale et que $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)=\chi_0(-1)$:*

(i) *si $p=2$ et $n(\chi_0)\leqq 2$, alors $T_2(2)=\{0\}$;*

(ii) *si (H′) est vérifiée, (H) l'est également.*

Démonstration. — Soit $\nu\in\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$. Les représentations $\tilde{\rho}_p$ et $\tilde{\rho}_\nu(\rho_p)$ sont isomorphes (IV, 4, assertion 8). Deux cas se présentent : ou bien $\rho_{\nu,p}\sim\sigma(|\,.\,|_p^{1/2}, |\,.\,|_p^{-1/2})$, ou bien $\rho_{\nu,p}$ est supercuspidale ([W], prop. 18).

(a) Supposons $\rho_{\nu,p}\sim\sigma(|\,.\,|_p^{1/2}, |\,.\,|_p^{-1/2})$. On a $\varepsilon(\rho_{\nu,p}, 1/2)=-1$ ([JL], p. 109), donc $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)=-\chi_\nu(-1)$ (IV, 4, assertion 10), donc $\chi_0\chi_\nu(-1)=-1$, et $n(\chi_0\chi_\nu)\geqq 1+\varepsilon$. Comme $\rho_{0,p}\sim\sigma(\chi_0\chi_\nu|\,.\,|_p^{1/2}, \chi_0\chi_\nu|\,.\,|_p^{-1/2})$, $m(\rho_{0,p})=2n(\chi_0\chi_\nu)$ (lemme 2), en particulier $m(\rho_{0,p})\geqq 2+2\varepsilon$. Si χ_0^2 est ramifié, $n(\chi_0\chi_\nu)=n(\chi_0)\geqq 1$, donc $m(\rho_{0,p})\geqq n(\chi_0)+1$. Si χ_0^2 est non ramifié, $n(\chi_0)\leqq 1+2\varepsilon$, et $m(\rho_{0,p})\geqq 2+2\varepsilon\geqq n(\chi_0)+1$. Donc (H) est vérifiée. En particulier $m(\rho_{0,p})\geqq 2$, et l'assertion (i) résulte du lemme 18.

(b) Supposons $\rho_{\nu,p}$ supercuspidale. Alors $\rho_{0,p}$ est supercuspidale de caractère central χ_0^2, donc $m(\rho_{0,p})\geqq\sup(2, n(\chi_0^2)+1+\varepsilon)$ (lemme 2). En particulier $m(\rho_{0,p})\geqq 2$ et l'assertion (i) résulte du lemme 18. Si χ_0^2 est ramifié, $n(\chi_0^2)=n(\chi_0)-\varepsilon\geqq 1+\varepsilon$, donc :

$$m(\rho_{0,p})\geqq n(\chi_0^2)+1+\varepsilon\geqq n(\chi_0)+1\geqq\sup(n(\chi_0)+1, 2+2\varepsilon).$$

Si χ_0^2 est non ramifié et $p \neq 2$, $n(\chi_0) \leqq 1$, donc :

$$m(\rho_{0,\,p}) \geqq 2 \geqq \sup(n(\chi_0)+1,\ 2+2\varepsilon).$$

Supposons que χ_0^2 est non ramifié, $p=2$, et que (H′) est vraie. On a $n(\chi_0) \leqq 3$. D'après (H′) :

$$m(\rho_{0,\,p}) \geqq 4 \geqq \sup(n(\chi_0)+1,\ 2+2\varepsilon).$$

Cela démontre (H). □

Remarque. — Il y a exactement trois représentations de G_2 supercuspidales, de caractère χ_0^2 non ramifié, de conducteur <4 (une de conducteur 2, deux de conducteur 3). L'auteur a vérifié que pour celle de conducteur 2, la proposition 5 est fausse.

VI. — Étude locale des représentations de la série principale

On se place sur un corps local $\mathbb{Q}_p$. On abandonne les indices p pour alléger les notations.

1. Soient μ un caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$, $\mathscr{B}_\mu$ l'espace des fonctions $f : \tilde{S} \to \mathbb{C}$ telles que :

(i) f est invariante à droite par un sous-groupe ouvert de $\tilde{S}$;

(ii) pour tous $\sigma \in \tilde{S}$, $\eta \in \mathbb{Q}_p$, $\alpha \in \mathbb{Q}_p^\times$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$;

$$f((id,\ \varepsilon)\, d(\alpha)\, \underline{\eta}\, \sigma) = \varepsilon \tilde{\gamma}(\alpha) \,|\, \alpha \,|\, \mu(\alpha)\, f(\sigma).$$

On peut identifier f à sa restriction au groupe compact $\tilde{\Gamma}$, et $\mathscr{B}_\mu$ à un espace de fonctions sur $\tilde{\Gamma}$. Le groupe $\tilde{S}$ agit dans $\mathscr{B}_\mu$ par translation à droite. Soit $\tilde{\rho}_\mu$ la représentation ainsi définie. Pour $f \in \mathscr{B}_\mu$ et $a \in \mathbb{Q}_p^\times$, posons :

$$t_f(a) = \lim_{k \to \infty} \int_{p^{-k}\mathbb{Z}_p} f(w\underline{b})\, \psi(-ab)\, db.$$

Cette limite existe $\left(\text{on peut la noter } \int_{\mathbb{Q}_p} \ldots\right)$. Soit T_μ l'image de $\mathscr{B}_\mu$ par l'application $f \mapsto t_f$. Cette application est un isomorphisme de $\mathscr{B}_\mu$ sur T_μ ([W], lemme 6), ce qui permet de réaliser $\tilde{\rho}_\mu$ dans T_μ. Pour a, $b \in \mathbb{Q}_p^\times$, posons :

$$J(b,\ a) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(b,\ a),$$

où :

$$J_k(b,\ a) = \int_{p^k \mathbb{Z}_p^\times} \tilde{\gamma}(u)\, \mu^{-1}(u)\, \psi(bu^{-1}+au)\ d^\times u.$$

Lemme 19. — *Soient $t \in T_\mu$, $a \in \mathbb{Q}_p^\times$, $\eta \in \mathbb{Q}_p$, $\alpha \in \mathbb{Q}_p^\times$. On a les égalités :*

$$\tilde{\rho}_\mu(\underline{\eta})\, t(a) = \psi(a\eta)\, t(a),$$
$$\tilde{\rho}_\mu(d(\alpha))\, t(a) = \tilde{\gamma}(\alpha) \,|\, \alpha \,|\, \mu^{-1}(\alpha)\, t(a\alpha^2),$$

t, *si* $t \in \mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$:

$$\tilde{\rho}_\mu(w)\, t(a) = (1 - 1/p) \int_{\mathbb{Q}_p} t(b)\, \mathrm{J}(b, a)\, db.$$

$\mathcal{N}$], lemme 7.

On a l'égalité $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_\mu) = \mu(-1)$. L'espace T_μ est un espace $\mathrm{K}(\tilde{\rho}_\mu)$ vérifiant les conditions de assertion 7 (IV, 4). On pourra utiliser les définitions de IV, 1 et V, 1. On suppose dans la uite que $|\mu|_{\mathbb{C}} = |.|_p^r$, avec $r \geqq 0$. Si $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times$ et $\mu = |.|^{1/2}\chi_\xi$, on note $\mathrm{T}_\mu^{\mathrm{S}}$ le sous-espace des onctions $t \in \mathrm{T}_\mu$ telles que $t(a) = 0$ pour tout $a \in \xi\, \mathbb{Q}_p^{\times 2}$.

PROPOSITION 8. — (i) *si* $\mu^2 \neq |.|$, $\tilde{\rho}_\mu$ *est irréductible;*
(ii) *si* $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times$ *et* $\mu = |.|^{1/2}\chi_\xi$, *le sous-espace* $\mathrm{T}_\mu^{\mathrm{S}}$ *est irréductible.*

[W], prop. 1 et 2. Dans le cas (i), on pose $\tilde{\pi}_\mu = \tilde{\rho}_\mu$. Dans le cas (ii), on note $\tilde{\sigma}_\mu$ la eprésentation de $\tilde{\mathrm{S}}$ dans $\mathrm{T}_\mu^{\mathrm{S}}$.

2. Posons $\varepsilon = v_p(2)$. Soient χ_0 un caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$, n un entier, $n \geqq \sup(2\varepsilon, n(\chi_0))$. On note $_\mu(n)$ l'espace des fonctions $t \in \mathrm{T}_\mu$ vérifiant la condition (A_n) (V, 1), et $\mathscr{B}_\mu(n)$ son image éciproque par $f \mapsto t_f$. D'après le lemme 15, i, on peut supposer $\chi_0(-1) = \mu(-1)$. Pour , $c \in \mathbb{Q}_p$, posons :

$$\tau'(a) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau''(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie les égalités :

$$1)\qquad \begin{cases} \tau'(a_1 + a_2) = \tau'(a_1)\,\tau''(-a_2); \\ \tau''(c_1 + c_2) = \tau''(c_1)\,\tau''(c_2). \end{cases}$$

i $f \in \mathscr{B}_\mu$, $a \in p\,\mathbb{Z}_p$, $c \in \mathbb{Z}_p$, on pose $f'(a) = f(\tau'(a))$, $f''(c) = f(\tau''(c))$.

LEMME 20. — *Soit* $n \geqq \sup(1 + \varepsilon, n(\chi_0))$. *L'application* $f \mapsto (f', f'')$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{B}_\mu(n)$ *sur l'espace des couples de fonctions* (f', f''), *avec* f', *resp.* f'', *définie sur* $p\,\mathbb{Z}_p$, *resp.* $\mathbb{Z}_p$, *ivariante par* $p^n\,\mathbb{Z}_p$, *tels que :*

1° *pour tout* $a \in p\,\mathbb{Z}_p$, $f'(a) = f'(0)$;

2° *si* $\mu\chi_0^{-1}$ *est ramifié*, $f'(0) = 0$;

3° *pour tous* $c \in \mathbb{Z}_p$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$, $f''(c\,\alpha^2) = \mu\chi_0(\alpha^{-1})\, f''(c)$;

4° *pour tout* $c \in \mathbb{Z}_p^\times$, $f''(c) = \tilde{\gamma}(c)\, \chi_0^{-1}(c)\, f'(0)$;

5° *pour tous* $c \in p\,\mathbb{Z}_p$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$, *tels que* $v_p(\alpha - 1) \geqq v_p(c)$:

$$f''(c\,\alpha) = (c, \alpha)\, \tilde{\gamma}(\alpha)\, \chi_0^{-1}(\alpha)\, f''(c).$$

Démonstration. — Si $f \in \mathscr{B}_\mu(n)$, les fonctions f' et f'' sont invariantes par $p^n\,\mathbb{Z}_p$, d'après les elations (11) et (A_n). Soient f', f'' définies sur $p\,\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p$, invariantes par $p^n\,\mathbb{Z}_p$. Soit $\underline{\mathrm{A}}$, esp. $\underline{\mathrm{C}}$, un système de représentants de $p\,\mathbb{Z}_p / p^n\,\mathbb{Z}_p$, resp. $\mathbb{Z}_p / p^n\,\mathbb{Z}_p$. Comme l'ensemble :

$$\{\tau'(a);\ a \in \underline{\mathrm{A}}\} \cup \{\tau''(c);\ c \in \underline{\mathrm{C}}\}$$

est un système de représentants de l'ensemble des classes $\Gamma_p/\Gamma_p(n)$, on peut construire une unique fonction f sur $\tilde{\Gamma}_p$, impaire [i. e. $f(\gamma(id, \varepsilon'))=\varepsilon' f(\gamma)$], vérifiant ($A_n$), de couple associé (f', f''). Il faut voir à quelles conditions $f\in\mathscr{B}_\mu$. Ces conditions sont que, pour $a\in p\mathbb{Z}_p$, $c\in\mathbb{Z}_p$:

1′ pour tout $\eta\in\mathbb{Z}_p$, $f(\underline{\eta}\tau'(a))=f'(a)$;

2′ pour tout $\eta\in\mathbb{Z}_p$, $f(\underline{\eta}\tau''(c))=f''(c)$;

3′ pour tout $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$, $f(d(\alpha)\tau'(a))=\tilde{\gamma}(\alpha)\mu(\alpha)f'(a)$;

4′ pour tout $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$, $f(d(\alpha)\tau''(c))=\tilde{\gamma}(\alpha)\mu(\alpha)f''(c)$.

On calcule les matrices en question :

si $\eta\in p\mathbb{Z}_p$:

$$\underline{\eta}\tau'(a)=\tau'(a+\eta),$$

si $\eta\in\mathbb{Z}_p^\times$:

$$\underline{\eta}\tau'(a)=\tau''((a+\eta)^{-1})\left[\begin{pmatrix} a+\eta & -1 \\ 0 & (a+\eta)^{-1}\end{pmatrix}, (a+\eta, a+\eta)\right],$$

si $1+\eta c\in\mathbb{Z}_p^\times$:

$$\underline{\eta}\tau''(c)=\tau''(c(1+\eta c)^{-1})\left[\begin{pmatrix} 1+\eta c & \eta \\ 0 & (1+\eta c)^{-1}\end{pmatrix}, (c(1+\eta c), 1+\eta c)\right],$$

si $1+\eta c\notin\mathbb{Z}_p^\times$ (donc $c\in\mathbb{Z}_p^\times$) :

$$\underline{\eta}\tau''(c)=\tau'((1+\eta c)c^{-1})\begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix};$$

$$d(\alpha)\tau'(a)=\tau'(a\alpha^2)d(\alpha^{-1}),$$

$$d(\alpha)\tau''(c)=\tau''(c\alpha^{-2})d(\alpha).$$

Les conditions 1′ à 4′ sont équivalentes à :

1″ si $\eta\in p\mathbb{Z}_p$, $f'(a+\eta)=f'(a)$;

2″ si $\eta\in\mathbb{Z}_p^\times$, $\chi_0^{-1}(a+\eta)\tilde{\gamma}(a+\eta)(a+\eta, -1)f''((a+\eta)^{-1})=f'(a)$;

3″ si $1+\eta c\in\mathbb{Z}_p^\times$, $\chi_0^{-1}(1+\eta c)\tilde{\gamma}(1+\eta c)(-c, 1+\eta c)f''(c(1+\eta c)^{-1})=f''(c)$;

4″ si $1+\eta c\notin\mathbb{Z}_p^\times$, $\chi_0^{-1}(c)\tilde{\gamma}(c)f'((1+\eta c)c^{-1})=f''(c)$;

5″ $\chi_0(\alpha)\tilde{\gamma}(\alpha)f'(a\alpha^2)=\tilde{\gamma}(\alpha)\mu(\alpha)f'(a)$;

6″ $\chi_0^{-1}(\alpha)\tilde{\gamma}(\alpha)f''(c\alpha^{-2})=\tilde{\gamma}(\alpha)\mu(\alpha)f''(c)$.

Supposons ces conditions vérifiées. Alors :

1″ pour $\eta=-a$, donne $f'(a)=f'(0)$, d'où 1°;

5″ avec $a=0$, donne $f'(0)=0$, ou $\chi_0(\alpha)=\mu(\alpha)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$, d'où 2°;

6″ donne 3°;

4″ avec $c\in\mathbb{Z}_p^\times$ et $\eta=-c^{-1}$, donne 4°;

3″ avec $c\notin\mathbb{Z}_p^\times$, et $c\neq 0$, et $\eta=c^{-1}(\alpha^{-1}-1)$, donne :

$$f''(c\alpha)=(-c, \alpha)\tilde{\gamma}(\alpha)^{-1}\chi_0(\alpha^{-1})f''(c),$$

mais $(-1, \alpha)\tilde{\gamma}(\alpha)^{-1}=\tilde{\gamma}(\alpha)$, d'où 5°.

On vérifie réciproquement que les conditions 1° à 5° impliquent les conditions 1″ à 6″. □

3. Supposons $p\neq 2$, $n\geqq \sup(1, n(\chi_0))$ [et toujours $\chi_0(-1)=\mu(-1)$]. Les conditions du lemme 20 se simplifient : si $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$, $\tilde{\gamma}(\alpha)=1$, et si $v_p(\alpha-1)\geqq 1$, $(c, \alpha)=1$ pour tout c. On définit les fonctions suivantes sur $\tilde{\Gamma}$, impaires, et vérifiant (A_n), par leur couple associé :

$$\mathrm{F}[n, 1]\begin{cases} \mathrm{F}'[n, 1](a)=1 & \text{pour tout } a\in p\mathbb{Z}_p,\\ \mathrm{F}''[n, 1](c)=\chi_0(c^{-1}) & \text{si } c\in\mathbb{Z}_p^\times,\\ \mathrm{F}''[n, 1](c)=0 & \text{si } c\in p\mathbb{Z}_p;\end{cases}$$

$$\mathrm{F}[n, p^n]\begin{cases} \mathrm{F}'[n, p^n](a)=0 & \text{pour tout } a,\\ \mathrm{F}''[n, p^n](c)=0 & \text{si } v_p(c)<n,\\ \mathrm{F}''[n, p^n](p^n)=1.\end{cases}$$

Pour $c\in\mathbb{Q}_p$, $1\leqq v_p(c)\leqq n-1$, $v_p(c)\leqq n-n(\mu\chi_0)$:

$$\mathrm{F}[n, c]\begin{cases} \mathrm{F}'[n, c](a)=0 \quad \text{pour tout } a,\\ \mathrm{F}''[n, c](c\alpha^2)=\mu\chi_0(\alpha^{-1}) \quad \text{si } \alpha\in\mathbb{Z}_p^\times,\\ \mathrm{F}''[n, c](c')=0, \quad \text{si } c' \text{ n'est pas de la forme } c'=c\alpha^2.\end{cases}$$

Ces fonctions F′ et F″ sont bien invariantes par $p^n\mathbb{Z}_p$. Remarquons qu'à l'exception de $\mathrm{F}[n, p^n]$, les fonctions ainsi définies sont en fait indépendantes de n. Soit $\mathrm{I}(n)$ la réunion de $\{1, p^n\}$ et d'un système de représentants de $\cup\, p^h\mathbb{Z}_p^\times/\mathbb{Z}_p^{\times 2}$, $1\leqq h\leqq n-1$. La valuation v_p se définit naturellement sur $\mathrm{I}(n)$, à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$.

Proposition 9. — *Soit* $n\geqq\sup(1, n(\chi_0))$:

(i) $\mathscr{B}_\mu(n)\neq\{0\}$ *si et seulement si* $n\geqq n(\mu\chi_0)+n(\mu^{-1}\chi_0)$;

(ii) *si* $n\geqq n(\mu\chi_0)+n(\mu^{-1}\chi_0)$, $\mathscr{B}_\mu(n)$ *admet pour base l'ensemble des fonctions* $\mathrm{F}[n, c]$, *pour* $c\in\mathrm{I}(n)$ *tel que* $n(\mu^{-1}\chi_0)\leqq v_p(c)\leqq n-n(\mu\chi_0)$.

Démonstration. — Soit f une fonction sur $\tilde{\Gamma}$, impaire et vérifiant (A_n). On définit les fonctions suivantes vérifiant les mêmes conditions :

$$q_1 f\begin{cases} (q_1 f)'=f',\\ (q_1 f)''(c)=f''(c) & \text{si } v_p(c)=0,\\ (q_1 f)''(c)=0 & \text{si } v_p(c)>0;\end{cases}$$

$$q_{p^n} f\begin{cases} (q_{p^n} f)'=0,\\ (q_{p^n} f)''(c)=0 & \text{si } v_p(c)<n,\\ (q_{p^n} f)''(c)=f''(c) & \text{si } v_p(c)\geqq n;\end{cases}$$

et pour $c\in\mathrm{I}(n)$, $c\notin\{1, p^n\}$:

$$q_c f\begin{cases} (q_c f)'=0,\\ (q_c f)''(c\alpha^2)=f''(c\alpha^2) \quad \text{si } \alpha\in\mathbb{Z}_p^\times,\\ (q_c f)''(c')=0 \quad \text{si } c' \text{ n'est pas de la forme } c'=c\alpha^2.\end{cases}$$

Le lemme 20 montre que $f\in\mathscr{B}_\mu(n)$ si et seulement si $q_c f\in\mathscr{B}_\mu(n)$ pour tout $c\in I(n)$. Soit $c\in I(n)$, supposons $q_c f\neq 0$, et considérons les conditions du lemme 20.

(*a*) Si $c=1$, $q_c f\in\mathscr{B}_\mu(n)\Leftrightarrow F[n,1]\in\mathscr{B}_\mu(n)$ et $q_c f$ est proportionnel à $F[n,1]$;

$$\begin{aligned} F[n,1]\in\mathscr{B}_\mu(n) &\Leftrightarrow 2^{\circ} \text{ est vérifiée},\\ &\Leftrightarrow n(\mu^{-1}\chi_0)=0,\\ &\Leftrightarrow n(\mu^{-1}\chi_0)\leqq v_p(c)\leqq n-n(\mu\chi_0),\end{aligned}$$

[car si $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, $n-n(\mu\chi_0)=n-n(\chi_0^2)\geqq n-n(\chi_0)\geqq 0$].

(*b*) Si $c=p^n$, $q_c f\in\mathscr{B}_\mu(n)\Leftrightarrow F[n,p^n]\in\mathscr{B}_\mu(n)$ et $q_c f$ est proportionnel à $F[n,p^n]$:

$$\begin{aligned} F[n,p^n]\in\mathscr{B}_\mu(n) &\Leftrightarrow 3^{\circ} \text{ est vérifiée},\\ &\Leftrightarrow n(\mu\chi_0)=0,\\ &\Leftrightarrow n(\mu^{-1}\chi_0)\leqq v_p(c)\leqq n-n(\mu\chi_0).\end{aligned}$$

(*c*) Si $c\notin\{1,p^n\}$, posons $h=q_c f$:

$$h\in\mathscr{B}_\mu(n)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lll} 1^{\circ} & h''(c\alpha)=h''(c) & \text{pour } v_p(\alpha-1)\geqq n-v_p(c),\\ 2^{\circ} & h''(c\alpha^2)=\mu\chi_0(\alpha^{-1})h''(c) & \text{pour } \alpha\in\mathbb{Z}_p^\times,\\ 3^{\circ} & h''(c\alpha)=\chi_0(\alpha^{-1})h''(c) & \text{pour } v_p(\alpha-1)\geqq v_p(c);\end{array}\right.$$

(la condition 1° traduit l'invariance de h'' par $p^n\mathbb{Z}_p$, les conditions 2° et 3° sont les conditions 3° et 5° du lemme 20). Supposons ces conditions vérifiées. Soit $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$, $v_p(\alpha-1)\geqq v_p(c)$. Alors $v_p(\alpha^2-1)\geqq v_p(c)$. Les relations 2° pour α et 3° pour α^2 impliquent $\mu^{-1}\chi_0(\alpha)=1$. Donc $n(\mu^{-1}\chi_0)\leqq v_p(c)$. De même si $v_p(\alpha-1)\geqq n-v_p(c)$, les relations 2° pour α et 1° pour α^2 impliquent $\mu\chi_0(\alpha)=1$. Donc $n(\mu\chi_0)\leqq n-v_p(c)$. De plus, il est clair que h est proportionnelle à $F[n,c]$. Réciproquement, si $n(\mu^{-1}\chi_0)\leqq v_p(c)\leqq n-n(\mu\chi_0)$, la fonction $h=F[n,c]$ vérifie les conditions 1°, 2°, 3°. Ces résultats impliquent la proposition. □

Soit $F[0]$ la fonction impaire sur $\hat{\Gamma}$, égale à 1 sur Γ.

LEMME 21. — *Supposons* $n(\chi_0)=0$:

(i) $\mathscr{B}_\mu(0)\neq\{0\}$ *si et seulement si* μ *est non ramifié;*

(ii) *si* μ *est non ramifié,* $\mathscr{B}_\mu(0)$ *est de dimension* 1, *engendré par* $F[0]$.

C'est immédiat. □

4. Supposons $p\neq 2$, $n\geqq\sup(n(\chi_0), n(\mu\chi_0)+n(\mu^{-1}\chi_0))$.

PROPOSITION 10. — (i) *Si* $n(\chi_0)=n(\mu)=0$:

$$\hat{T}_p F[0]=p\tilde{\gamma}(p)(\mu(p)+\mu(p^{-1}))F[0];$$

(ii) *si* $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, *et* $n\geqq 1$:

$$\hat{T}'_p F[n,1]=p\tilde{\gamma}(p)\mu(p^{-1})F[n,1];$$

(iii) *si* $n(\mu\chi_0)=0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)\neq 0$, *et* $n=n(\mu\chi_0)+n(\mu^{-1}\chi_0)$:

$$\tilde{T}'_p F[n, p^n] = p\tilde{\gamma}(p)\mu(p) F[n, p^n];$$

(iv) *si* $n(\mu\chi_0) = n(\mu^{-1}\chi_0) = 0$, $n(\chi_0) \neq 0$, *et* $n = 1$:

$$\tilde{T}'_p F[1, p] = p\tilde{\gamma}(p)\mu(p) F[1, p] + (p-1) F[1, 1].$$

Démonstration. — C'est un simple calcul. Dans le cas (i), $\tilde{T}_p F[0] \in \mathscr{B}_\mu(0)$, donc $\tilde{T}_p F[0] = x F[0]$, pour un $x \in \mathbb{C}$. Appliquons cette égalité au point 1 : $x = \tilde{T}_p F[0](1)$. Or :

$$\begin{aligned}\tilde{T}_p F[0](1) &= [\sum_{u \in \mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p} F[0](\underline{u}\, d(p))] + [\sum_{u \in (\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)^\times} (p, -u) F[0](\underline{up^{-1}})] + F[0](d(p^{-1}))\\ &= [\sum_u \tilde{\gamma}(p)\mu(p)|p|] + [\sum_u (p, -u)] + \tilde{\gamma}(p^{-1})\mu(p^{-1})|p^{-1}|,\end{aligned}$$

car $F[0] \in \mathscr{B}_\mu$, d'où :

$$x = p\tilde{\gamma}(p)(\mu(p) + \mu(p^{-1})).$$

Supposons $n(\mu^{-1}\chi_0) = 0$, $n(\mu\chi_0) > 0$. On peut supposer $n = n(\mu\chi_0)$, car $F[n, 1] = F[n(\mu\chi_0), 1]$. Alors $\tilde{T}'_p F[n, 1] = x F[n, 1]$ pour un $x \in \mathbb{C}$ (prop. 9). Au point $\tau'(0)$, on obtient :

$$x = \tilde{T}'_p F[n, 1](\tau'(0)) = \sum_{u \in \mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p} F[n, 1](\tau'(0)\underline{u}\, d(p)).$$

Pour $v_p(u) \leqq 2$, on a l'égalité :

$$\tau'(0)\underline{u}\, d(p) = \left[\begin{pmatrix} pu^{-1} & -p^{-1} \\ 0 & p^{-1}u \end{pmatrix}, (u, pu)\right]\tau''(p^2u^{-1}).$$

Comme $F[n, 1](\tau''(c)) = 0$ si $v_p(c) > 0$, et $F[n, 1] \in \mathscr{B}_\mu$, il reste le terme en $u = p^2$:

$$x = \tilde{\gamma}(p)\mu(p^{-1})|p^{-1}| F[n, 1](\tau''(1)) = p\tilde{\gamma}(p)\mu(p^{-1}).$$

Si $n(\mu^{-1}\chi_0) = n(\mu\chi_0) = 0$, on peut supposer $n = 1$. On a une relation :

$$\tilde{T}'_p F[1, 1] = x F[1, 1] + y F[1, p].$$

En calculant cette égalité aux points $\tau'(0)$ et $\tau''(0) = 1$, on obtient :

$$x = p\tilde{\gamma}(p)\mu(p^{-1}), \qquad y = 0.$$

Si $n(\mu\chi_0) = 0$, $n(\mu^{-1}\chi_0) > 0$, $n = n(\mu\chi_0) + n(\mu^{-1}\chi_0)$, on a une relation $\tilde{T}'_p F[n, p^n] = x F[n, p^n]$. Appliquée au point 1, elle donne $x = p\tilde{\gamma}(p)\mu(p)$.

Si $n(\mu\chi_0) = n(\mu^{-1}\chi_0) = 0$, $n(\chi_0) \neq 0$, on a une relation :

$$T'_p F[1, p] = x F[1, 1] + y F[1, p].$$

En spécialisant cette égalité aux points 1 et $\tau'(0)$, on obtient :

$$\begin{aligned} y &= p\tilde{\gamma}(p)\mu(p), \\ x &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p} \mathrm{F}[1, p](\tau'(0)\underline{u}\, d(p)), \\ x &= \sum_u (u, pu)\tilde{\gamma}(pu^{-1})\mu(pu^{-1})|pu^{-1}|\,\mathrm{F}[1, p](\tau''(p^2u^{-1})). \end{aligned}$$

Si $u \in \mathbb{Z}_p^\times$, $(u, pu)\tilde{\gamma}(pu^{-1}) = \tilde{\gamma}(p)$, $\mathrm{F}[1, p](\tau''(p^2u^{-1})) = 1$. Il reste le facteur $\mu(u^{-1})$. Or $n(\mu) = n(\chi_0) > 0$. La somme sur les $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ est donc nulle. Si $u = p^2$, $\mathrm{F}[1, p](\tau''(p^2u^{-1})) = 0$. Enfin si $u = pu'$, avec $u' \in \mathbb{Z}_p^\times$, $(u, pu)\tilde{\gamma}(pu^{-1}) = (p, u')$, $\mathrm{F}[1, p](\tau''(p^2u^{-1})) = 1$. Comme $\mu|_{\mathbb{Z}_p^\times}$ est quadratique non trivial, $\mu(pu^{-1}) = \mu(u'^{-1}) = (p, u')$. Le terme de la somme correspondant à u est égal à 1, et $x = p-1$. □

On note $t[n, c]$, resp. $t[0]$, l'image dans T_μ, par l'application $f \mapsto t_f$, de $\mathrm{F}[n, c]$, resp. $\mathrm{F}[0]$, quand ces fonctions sont définies.

LEMME 22. — *Supposons $n(\chi_0) = n(\mu) = 0$, soit $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. On a les égalités :*

$$\tilde{\mathrm{T}}_p\, t[0](a) = \begin{cases} 0 & si \quad v_p(a) < 0, \\ p\tilde{\gamma}(p)[\mu(p)^{-1}\, t[0](ap^2) + (p, a)\,p^{-1}\, t[0](a)] & si \quad v_p(a) = 0, \\ p\tilde{\gamma}(p)[\mu(p)^{-1}\, t[0](ap^2) + \mu(p)\, t[0](ap^{-2})] & si \quad v_p(a) > 0. \end{cases}$$

Démonstration. — On a les égalités :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{T}}_p\, t[0](a) = & \sum_{u \in \mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p} \tilde{\rho}_\mu(\underline{u}\, d(p))\, t[0](a) \\ & + \sum_{u \in (\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)^\times} (p, -u)\tilde{\rho}_\mu(\underline{up^{-1}})\, t[0](a) + \tilde{\rho}_\mu(d(p^{-1}))\, t[0](a) \\ = & \sum_u \psi(au)\tilde{\gamma}(p)|p|\mu(p^{-1})\, t[0](ap^2) \\ & + \sum_u (p, -u)\psi(aup^{-1})\, t[0](a) + \tilde{\gamma}(p)|p^{-1}|\mu(p)\, t[0](ap^{-2}), \end{aligned}$$

d'après le lemme 19. On calcule cette dernière expression grâce au lemme 7, ii, et aux formules du II, 6. □

5. On conserve les mêmes hypothèses. Comme $\mu^{-1}\chi_0(-1) = 1$, il existe deux caractères ν_1, ν_2 de $\mathbb{Z}_p^\times$ tels que $\nu_1^2 = \nu_2^2 = \mu^{-1}\chi_0|_{\mathbb{Z}_p^\times}$ (on a $\nu_2 = \nu_1 \times \chi_p|_{\mathbb{Z}_p^\times}$). On pose $\mathrm{I}'(n) = \mathrm{I}(n) - \{1, p^n\}$ (VI, 3).

LEMME 23. — *Soient $n \geq \sup(1, n(\chi_0), n(\mu\chi_0) + n(\mu^{-1}\chi_0))$, $f \in \mathscr{B}_\mu(n)$, $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. On a l'égalité :*

$$t_f(a)=\mu(-1)f'(0)\operatorname{car}(\mathbb{Z}_p, a)$$
$$+\left[\sum_{c\in\mathrm{I}'(n)}(1-1/p)\tilde{\gamma}(-c)\mu(-c)f''(c)\frac{1}{2}[\eta(\nu_1, -ac^{-1})+\eta(\nu_2, -ac^{-1})]\right]$$
$$+\left[\sum_{h=n}^{\infty}(1-1/p)\tilde{\gamma}(-p^h)\mu(-p^h)\times f''(p^n)\eta(\mu^{-1}\chi_{p^h}, -ap^{-h})\right].$$

Démonstration. — On a :

$$t_f(a)=\int_{\mathbb{Q}_p} f(w\underline{b})\psi(-ab)\,db.$$

Si $b\in\mathbb{Z}_p$:

$$f(w\underline{b})=f(w)=f(d(-1)\tau'(0))=\tilde{\gamma}(-1)\mu(-1)f'(0)=\mu(-1)f'(0).$$

Si $b\notin\mathbb{Z}_p$:

$$f(w\underline{b})=f\left(\begin{pmatrix}-b^{-1} & 1\\ 0 & -b\end{pmatrix}\tau''(b^{-1})\right)=\tilde{\gamma}(-b^{-1})|b^{-1}|\mu(-b^{-1})f''(b^{-1}).$$

Si $b=c^{-1}\alpha^2$, avec $c\in\mathrm{I}'(n)$, $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$, on a (lemme 20) :

$$f''(b^{-1})=\mu\chi_0(\alpha)f''(c),\qquad \tilde{\gamma}(-b^{-1})=\tilde{\gamma}(-c),$$

d'où :

$$f(w\underline{b})=\tilde{\gamma}(-c)|c|\mu(-c)\mu^{-1}\chi_0(\alpha)f''(c).$$

Si $b=p^{-h}\alpha$, avec $h\geqq n$, $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times$, on a :

$$f''(b^{-1})=f''(p^n),\qquad \tilde{\gamma}(-b^{-1})=\tilde{\gamma}(-p^h)(-p^h, \alpha)=\tilde{\gamma}(-p^h)(p^h, \alpha),$$

et :

$$f(w\underline{b})=\tilde{\gamma}(-p^h)|p^h|\mu(-p^h)\mu^{-1}\chi_{p^h}(\alpha)f''(p^n).$$

Alors $t_f(a)=\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2+\mathrm{S}_3$, avec :

$$\mathrm{S}_1=\int_{\mathbb{Z}_p}\mu(-1)f'(0)\psi(-ab)\,db,$$

$$\mathrm{S}_2=\sum_{c\in\mathrm{I}'(n)}\mathrm{S}_2(c),\qquad \mathrm{S}_3=\sum_{h=n}^{\infty}\mathrm{S}_3(p^h),$$

où :

$$\mathrm{S}_2(c)=\int_{b=c^{-1}\alpha^2,\ \alpha\in\mathbb{Z}_p^\times}\tilde{\gamma}(-c)|c|\mu(-c)f''(c)\mu^{-1}\chi_0(\alpha)\psi(-ac^{-1}\alpha^2)\,db,$$

$$\mathrm{S}_3(p^h)=\int_{b=p^{-h}\alpha,\ \alpha\in\mathbb{Z}_p^\times}\tilde{\gamma}(-p^h)|p^h|\mu(-p^h)f''(p^n)\mu^{-1}\chi_{p^h}(\alpha)\psi(-ap^{-h}\alpha)\,db.$$

On calcule :

$$\mathrm{S}_1=\mu(-1)f'(0)\operatorname{car}(\mathbb{Z}_p, a),$$

pour $c \in \mathrm{I}'(n)$:

$$S_2(c)=(1-1/p)\tilde{\gamma}(-c)\mu(-c)f''(c)\frac{1}{2}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\mu^{-1}\chi_0(\alpha)\psi(-ac^{-1}\alpha^2)\,d^\times\alpha.$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}&\mu^{-1}\chi_0(\alpha)\psi(-ac^{-1}\alpha^2)\,d^\times\alpha\\ &=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}(\nu_1(\alpha^2)+\nu_2(\alpha^2))\psi(-ac^{-1}\alpha^2)\,d^\times\alpha,\\ &=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\operatorname{car}(\mathbb{Z}_p^{\times 2},\alpha)(\nu_1(\alpha)+\nu_2(\alpha))\psi(-ac^{-1}\alpha^2)\,d^\times\alpha.\end{aligned}$$

Pour $\alpha\in\mathbb{Z}_p^\times-\mathbb{Z}_p^{\times 2}$, $\nu_1(\alpha)+\nu_2(\alpha)=0$. L'expression ci-dessus est égale à :

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}(\nu_1(\alpha)+\nu_2(\alpha))\psi(-ac^{-1}\alpha^2)\,d^\times\alpha=\frac{1}{2}[\eta(\nu_1,-ac^{-1})+\eta(\nu_2,-ac^{-1})],$$

d'où :

$$S_2(c)=(1-1/p)\tilde{\gamma}(-c)\mu(-c)f''(c)\frac{1}{2}[\eta(\nu_1,-ac^{-1})+\eta(\nu_2,-ac^{-1})].$$

Enfin, pour $h\geqq n$:

$$\begin{aligned}S_3(p^h)&=(1-1/p)\tilde{\gamma}(-p^h)\mu(-p^h)f''(p^n)\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\mu^{-1}\chi_{p^h}(\alpha)\psi(-ap^{-h}\alpha)\,d^\times\alpha,\\ &=(1-1/p)\tilde{\gamma}(-p^h)\mu(-p^h)f''(p^n)\eta(\mu^{-1}\chi_{p^h},-ap^{-h}).\quad\square\end{aligned}$$

LEMME 24. — *Soit* $a\in\mathbb{Q}_p^\times$. *On a les égalités :*

(i) *si* $n(\chi_0)=n(\mu)=0$ *:*

$$t[0](a)=\begin{cases}1+(p,a)\mu(p)p^{-1/2} & si\quad v_p(a)=0,\\ 1-\mu(p^2)p^{-1} & si\quad v_p(a)=1;\end{cases}$$

(ii) *si* $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, *et* $n\geqq\sup(1,n(\chi_0))$ *:*

$$t[n,1](a)=\mu(-1)\operatorname{car}(\mathbb{Z}_p,a);$$

(iii) *si* $n(\mu\chi_0)=0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)\neq 0$, *et* $n=n(\mu\chi_0)+n(\mu^{-1}\chi_0)$:

$$t[n,p^n](a)=\begin{cases}\tilde{\gamma}(p^n)^{-1}p^{-n/2}\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^n},1/2)(p^n,a)\mu(a)\\ \qquad si\quad v_p(a)=0,\\ \tilde{\gamma}(p^n)^{-1}p^{-n/2}(p^n,p)\tilde{\gamma}(-p)\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^{n+1}},1/2)(p^{n+1},a)\mu(a),\\ \qquad si\quad v_p(a)=1;\end{cases}$$

(iv) *si* $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0,\ n(\chi_0)\neq 0$:

$$t[1, p](a)=\begin{cases} -p^{-1}\tilde{\gamma}(-p)\mu(-p) & si \quad v_p(a)=0,\\ p^{-1}\tilde{\gamma}(-p)\mu(-p)[p-1+\mu(p)p^{1/2}(p, a)] & si \quad v_p(a)=1.\end{cases}$$

Démonstration. — On applique le lemme 23 et les formules du II, 7. Pour (i), on prend $n=1$. On a $F'[0](0)=F''[0](p)=1$, $\mu(-1)=1$. Si $v_p(a)=0$, seul le terme $h=1$ intervient (dans la somme de $h=1$ à ∞). Si $v_p(a)=1$, seul le terme $h=2$ intervient. Pour (ii), $F'[n, 1](0)=1$ et les autres termes sont nuls. Pour (iii), $F'[n, p^n](0)=0$, $F''[n, p^n](c)=0$, si $c\in I'(n)$, $F''[n, p^n](p^n)=1$, μ^2 est ramifié, donc $n(\mu^{-1}\chi_{p^h})=n$ pour tout h. Si $v_p(a)=0$, seul le terme $h=n$ intervient, d'où :

$$\begin{aligned} t[n, p^n](a)&=(1-1/p)\tilde{\gamma}(-p^n)\mu(-p^n)\eta(\mu^{-1}\chi_{p^n}, -ap^{-n})\\ &=(1-1/p)\tilde{\gamma}(p^n)\mu(p^n)\eta(\mu^{-1}\chi_{p^n}, p^{-n})(p^n, a)\mu(a)\\ &=\tilde{\gamma}(p^n)^{-1}p^{-n/2}\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^n}, 1/2)(p^n, a)\mu(a).\end{aligned}$$

Si $v_p(a)=1$, seul le terme $h=n+1$ intervient, d'où :

$$\begin{aligned} t[n, p^n](a)&=(1-1/p)\tilde{\gamma}(-p^{n+1})\mu(-p^{n-1})\eta(\mu^{-1}\chi_{p^{n+1}}, -ap^{-n-1}).\\ &=(1-1/p)\tilde{\gamma}(-p^{n+1})(p^{n+1}, -p^{-1})\mu(p^n)\eta(\mu^{-1}\chi_{p^{n+1}}, p^{-n})(p^{n+1}, a)\mu(a)\\ &=\tilde{\gamma}(p^n)^{-1}p^{-n/2}(p^n, p)\tilde{\gamma}(-p)\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^{n+1}}, 1/2)(p^{n+1}, a)\mu(a).\end{aligned}$$

Pour (iv), $\mu|_{\mathbb{Z}_p^\times}$ est quadratique non trivial. Si $v_p(a)=0$, seul le terme $h=1$ intervient. Si $v_p(a)=1$, les deux termes $h=1$ et $h=2$ interviennent. □

Soit J un système de représentants du quotient $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times$. Pour $\nu\in\mathbb{Q}_p^\times$, on définit $\gamma[\nu]$ comme en V, 4.

LEMME 25. — *Soit* $n\geqq\sup(1, n(\chi_0), n(\mu\chi_0)+n(\mu^{-1}\chi_0))$:

(i) *si* $n(\mu\chi_0)>0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$, *l'espace engendré par les fonctions* $t[n, c]$, *pour* $c\in I(n)$, $n(\mu^{-1}\chi_0)\leqq v_p(c)\leqq n-n(\mu\chi_0)$, *est égal à l'espace engendré par les fonctions* $\gamma[\nu]$ *pour* $\nu\in J$, $0\leqq v_p(\nu)\leqq n-n(\mu^{-1}\chi_0)-n(\mu\chi_0)$;

(ii) *si* $n(\mu\chi_0)=0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$, *l'espace engendré par les fonctions* $t[n, c]$, *pour* $c\in I(n)$, $n(\mu^{-1}\chi_0)\leqq v_p(c)\leqq n$, *est égal à l'espace engendré par* $t[\tilde{n}, p^{\tilde{n}}]$ *et par les fonctions* $\gamma[\nu]$ *pour* $\nu\in J$, $0\leqq v_p(\nu)\leqq n-n(\mu^{-1}\chi_0)-1$, *où* $\tilde{n}=n(\mu^{-1}\chi_0)$;

(iii) *si* $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, *l'espace engendré par les fonctions* $t[n, c]$, *pour* $c\in I(n)$, $0\leqq v_p(c)\leqq\inf(n-n(\mu\chi_0), n-1)$, *est égal à l'espace engendré par* $t[1, 1]$ *et par les fonctions* $\gamma[\nu]$, *pour* $\nu\in J$, $0\leqq v_p(\nu)\leqq n-1-\sup(1, n(\mu\chi_0))$.

Démonstration. — Supposons $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$, soient $h\in\mathbb{N}$ tel que $1\leqq h\leqq n-1$, $n(\mu^{-1}\chi_0)\leqq h\leqq n-n(\mu\chi_0)$, et $c\in I'(n)$ tel que $v_p(c)=h$. Utilisons le lemme 23. On a $n(\nu_1)=n(\nu_2)=n(\mu^{-1}\chi_0)$. Donc (II, 7) $t[n, c]$ est à support dans $p^{h-n(\mu^{-1}\chi_0)}\mathbb{Z}_p^\times$, et vérifie l'égalité :

$$t[n, c](a\alpha^2)=\mu\chi_0^{-1}(\alpha)\,t[n, c](a),$$

pour tous $a \in \mathbb{Q}_p^\times$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$. Une telle fonction appartient à l'espace engendré par les fonctions $\gamma[\nu]$ pour $\nu \in \mathrm{J}$, $v_p(\nu)=h-n(\mu^{-1}\chi_0)$. En comparant leurs dimensions, on voit que l'espace engendré par les fonctions $t[n, c]$, $c \in \Gamma'(n)$, $v_p(c)=h$, est égal à l'espace engendré par les fonctions $\gamma[\nu]$, $\nu \in \mathrm{J}$, $v_p(\nu)=h-n(\mu^{-1}\chi_0)$. On en déduit (i). Par construction, dans le cas (ii), $t[n, p^n]$ est combinaison linéaire de $t[\tilde{n}, p^{\tilde{n}}]$ et de fonctions $t[n, c]$, pour $n(\mu^{-1}\chi_0) \leqq v_p(c) \leqq n-1$. On en déduit (ii).

Supposons $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$. D'après le lemme 24, ii, l'espace engendré par $t[1, 1]$ et les fonctions $\gamma[\nu]$, $\nu \in \mathrm{J}$, $0 \leqq v_p(\nu) \leqq n-1-\sup(1, n(\mu\chi_0))$, est l'ensemble des fonctions t sur $\mathbb{Q}_p^\times$ telles que :

$$t(a)=0 \quad \text{si} \quad v_p(a)<0,$$
$$t(a\alpha^2)=t(a) \quad \text{si} \quad a \in \mathbb{Q}_p^\times,\ \alpha \in \mathbb{Z}_p^\times,$$

$t(a)$ est constant pour $v_p(a) \geqq n-\sup(1, n(\mu\chi_0))$.

La fonction $t[1, 1]$ appartient à cet espace. Soit $c \in \Gamma'(n)$, $1 \leqq v_p(c) \leqq n-n(\mu\chi_0)$. Le lemme 23 et les formules du II, 7, montrent que $t[n, c]$ appartient à cet espace [ici $\nu_1=1$, $\nu_2=\chi_p|_{\mathbb{Z}_p^\times}$, $n(\nu_1)=0$, $n(\nu_2)=1$]. En comparant les dimensions des espaces en question, on en déduit (iii). □

6. On conserve les mêmes hypothèses. Si $\mu^2 \neq |.|$, on pose $\tilde{\rho}=\tilde{\pi}_\mu$. Si $\mu^2=|.|$, $\tilde{\rho}=\tilde{\sigma}_\mu$. Soit $\mathrm{J}(\tilde{\rho})$ un système de représentants du quotient $\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho})/\mathbb{Z}_p^{\times 2}$ (IV, 4). On définit dans les cas suivants un entier $\tilde{n}$ et des ensembles $\mathrm{U}(e)$ de fonctions sur $\mathbb{Q}_p^\times$. Toutes ces fonctions sont à support dans $\mathbb{Z}_p$.

(1) Si $n(\mu\chi_0)>0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$, on pose $\tilde{n}=n(\mu\chi_0)+n(\mu^{-1}\chi_0)$, et pour $e \geqq \tilde{n}$:

$$\mathrm{U}(e)=\{\gamma[\nu];\ \nu \in \mathrm{J}(\tilde{\rho}),\ v_p(\nu)=n-\tilde{n}\};$$

• (2) (*a*) si $n(\mu\chi_0)=0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$, on pose $\tilde{n}=n(\mu^{-1}\chi_0)$. On définit t_1 par :

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_1(ap^{2h})\mathrm{X}^h = \begin{cases} \varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^{\tilde{n}}}, 1/2)(p^{\tilde{n}}, a)\mu(a)(1-\mu(p^2)\mathrm{X})^{-1} & \text{si} \quad v_p(a)=0, \\ (p^{\tilde{n}}, p)\tilde{\gamma}(-p)\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^{\tilde{n}+1}}, 1/2) & \\ \qquad \times(p^{\tilde{n}+1}, a)\mu(a)(1-\mu(p^2)\mathrm{X})^{-1} & \text{si} \quad v_p(a)=1. \end{cases}$$

Pour $e \geqq \tilde{n}$, on pose :

$$\mathrm{U}(e)=\begin{cases} \{t_1\} & \text{si} \quad e=\tilde{n}, \\ \{\gamma[\nu];\ \nu \in \mathrm{J},\ v_p(\nu)=e-\tilde{n}-1\} & \text{si} \quad e>\tilde{n}; \end{cases}$$

(2) (*b*) si $n(\mu\chi_0)>0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, on pose $\tilde{n}=n(\mu\chi_0)$, $t_1=\mathrm{car}(\mathbb{Z}_p)$, et pour $e \geqq \tilde{n}$, $\mathrm{U}(e)$ est défini comme en (*a*);

(3) si $\mu^2 \neq |.|$, $n(\chi_0)=n(\mu)=0$, on pose $\tilde{n}=0$. On définit t_0 et t_1 par :

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_0(ap^{2h})X^h = \begin{cases} (1+(p,a)\mu(p)p^{-1/2})(1-(p,a)\mu(p)p^{-1/2}X) \\ \qquad \times(1-(\mu(p^2)+1)X+\mu(p^2)X^2)^{-1} & \text{si } v_p(a)=0, \\ (1-\mu(p^2)p^{-1})(1-(\mu(p^2)+1)X+\mu(p^2)X^2)^{-1} & \text{si } v_p(a)=1; \end{cases}$$

$$t_1=\operatorname{car}(\mathbb{Z}_p).$$

Pour $e \geqq 0$, on pose :

$$U(e)=\begin{cases} \{t_0\} & \text{si } e=0, \\ \{t_1\} & \text{si } e=1, \\ \{\gamma[\nu];\ \nu\in J,\ v_p(\nu)=e-2\} & \text{si } e\geqq 2; \end{cases}$$

(4) si $\mu^2=|.|$, $n(\chi_0)=n(\mu)=0$, on pose $\tilde{n}=1$. On définit t_2 par :

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_2(ap^{2h})X^h = \begin{cases} (1-(p,a)\mu(p)p^{1/2})(1-\mu(p^2)X)^{-1} & \text{si } v_p(a)=0, \\ (1+p^{-1})(1-\mu(p^2)X)^{-1} & \text{si } v_p(a)=1. \end{cases}$$

Pour $e \geqq 1$, on pose :

$$U(e)=\begin{cases} \{t_2\} & \text{si } e=1, \\ \{\gamma[\nu];\ \nu\in J(\tilde{\rho}),\ v_p(\nu)=e-2\} & \text{si } e\geqq 2; \end{cases}$$

(5) (*a*) si $\mu^2\neq|.|$, $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, $n(\chi_0)>0$, et $\mu(p)\neq\mu(p^{-1})$, on pose $\tilde{n}=1$. On définit t_1 et t_2 par :

$$t_1=\operatorname{car}(\mathbb{Z}_p),$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_2(ap^{2h})X^h = \begin{cases} (1-\mu(p^2)X)^{-1} & \text{si } v_p(a)=0, \\ (1-(p,a)\mu(p)p^{1/2}) \\ \qquad \times(1-(p,a)\mu(p^{-1})p^{1/2})^{-1}(1-\mu(p^2)X)^{-1} & \text{si } v_p(a)=1. \end{cases}$$

Pour $e \geqq 1$, on pose :

$$U(e)=\begin{cases} \{t_1, t_2\} & \text{si } e=1, \\ \{\gamma[\nu];\ \nu\in J,\ v_p(\nu)=e-2\} & \text{si } e\geqq 2; \end{cases}$$

(5) (*b*) si $\mu^2\neq|.|$, $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, $n(\chi_0)>0$, et $\mu(p)=\mu(p^{-1})$, on pose $\tilde{n}=1$, on définit t_1 et t_2 par :

$$t_1=\operatorname{car}(\mathbb{Z}_p),$$

$$t_2(a)=\begin{cases} 0 & \text{si } v_p(a)=0, \\ (1-1/p)^{-1}(1+\mu(p)p^{1/2}(p,a)) & \text{si } v_p(a)=1, \end{cases}$$

$$t_2(ap^2)=t_2(a)+t_1(a) \qquad \text{si } v_p(a)\geqq 0.$$

On définit $U(e)$ comme en (a);

(6) si $\mu^2=|.|$, $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, $n(\chi_0)>0$, on pose $\tilde{n}=1$, on définit t_2 comme en 5 (a), et pour $e\geqq 1$:

$$U(e)=\begin{cases} \{t_2\} & \text{si } e=1, \\ \{\gamma[\nu];\ \nu\in J(\tilde{\rho}),\ v_p(\nu)=e-2\} & \text{si } e\geqq 2. \end{cases}$$

On note $\overline{U}(e)$ l'espace engendré par les éléments de $U(e)$. Si $\mu^2=|.|$, on pose $T^S_\mu(n)=T_\mu(n)\cap T^S_\mu$ (VI, 1, 2).

PROPOSITION 11. — *Supposons $p\neq 2$, $\mu(-1)=\chi_0(-1)$, et soit $n\in\mathbb{N}$:*

(*i*) *si $\mu^2\neq|.|$, l'espace $T_\mu(n)$ est non nul si et seulement si $n\geqq\tilde{n}$. Si $n\geqq\tilde{n}$, on a l'égalité :*

$$T_\mu(n)=\oplus\overline{U}(e),\qquad \tilde{n}\leqq e\leqq n;$$

(ii) *si $\mu^2=|.|$, les mêmes assertions sont vraies pour l'espace $T^S_\mu(n)$.*

Démonstration. — Supposons $\mu^2\neq|.|$. La proposition est un corollaire des propositions 9, 10, et des lemmes 7, 21, 22, 24, 25. Indiquons quelques formules :

— dans le cas 2, a (resp. b), t_1 est proportionnel à $t[\tilde{n}, p^{\tilde{n}}]$ (resp. $t[\tilde{n}, 1]$) (les formules de récurrence du lemme 7, iii, et de la proposition 10 conduisent aux formules de l'énoncé);

— dans le cas 3, t_0 est proportionnel à $t[0]$, et t_1 à $t[1, 1]$;

— dans le cas 5, a, on calcule t_1 et t_2 en diagonalisant l'opérateur $\tilde{T}'_p$ dans $T_\mu(1)$ (prop. 10). On obtient :

$$t_1=\mu(-1)\,t[1, 1],$$
$$t_2=p\,\mu(-1)\,\tilde{\gamma}(p)\frac{\mu(p)-\mu(p^{-1})}{p-\mu(p^2)}\left(t[1, p]+\frac{p-1}{p\,\tilde{\gamma}(p)(\mu(p)-\mu(p^{-1}))}\,t[1, 1]\right);$$

— dans le cas 5, b, $\tilde{T}'_p$ n'est plus diagonalisable dans $T_\mu(1)$, mais unipotent. On a choisi :

$$t_1=\mu(-1)\,t[1, 1],$$
$$t_2=(1-1/p)^{-1}\,\tilde{\gamma}(p)\,\mu(p)\,t[1, p]+\mu(-1)(p-1)^{-1}\,t[1, 1].$$

Supposons $\mu=|.|^{1/2}\chi_\xi$, avec $\xi\in\mathbb{Q}_p^\times$. Le même raisonnement permet de calculer $T_\mu(n)$. Il reste à déterminer quelles sont les fonctions de $T_\mu(n)$ s'annulant sur $\xi\,\mathbb{Q}_p^{\times 2}$. C'est facile. Indiquons les formules :

— dans le cas 4, $t_2=-p\,t[0]+\mu(-1)(p+1)\,t[1, 1]$;

— dans le cas 6, t_2 est le même qu'en 5, a.

Remarquons que l'expression $1-(p, a)\,\mu(p)\,p^{1/2}$ s'annule en $a=\xi u^2$. En effet :

$$1-(p, \xi u^2)\,\mu(p)\,p^{1/2}=1-(p, \xi)\,p^{-1/2}\chi_\xi(p)\,p^{1/2}=0.\quad\square$$

7. On revient à la situation du VI, 2, et on suppose désormais $p=2$. Soit $n\geqq\sup(2, n(\chi_0))$. On définit les fonctions suivantes sur $\tilde{\Gamma}$, impaires, et vérifiant (A_n), par leur couple associé :

$$\mathrm{F}[n,1]\left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}'[n,1](a)=1 \quad \text{pour tout } a\in 2\mathbb{Z}_2,\\ \mathrm{F}''[n,1](c)=\tilde{\gamma}(c)\chi_0(c^{-1}) \quad \text{si} \quad v_2(c)=0,\\ \mathrm{F}''[n,1](c)=0 \quad \text{si} \quad v_2(c)>0;\end{array}\right.$$

$$\mathrm{F}[n,2^{n-1}]\left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}'[n,2^{n-1}](a)=0 \quad \text{pour tout } a,\\ \mathrm{F}''[n,2^{n-1}](c)=0 \quad \text{si} \quad v_2(c)\neq n-1,\\ \mathrm{F}''[n,2^{n-1}](c)=1 \quad \text{si} \quad v_2(c)=n-1;\end{array}\right.$$

$$\mathrm{F}[n,2^{n}]\left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}'[n,2^{n}](a)=0 \quad \text{pour tout } a,\\ \mathrm{F}''[n,2^{n}](c)=0 \quad \text{si} \quad v_2(c)<n,\\ \mathrm{F}''[n,2^{n}](c)=1 \quad \text{si} \quad v_2(c)\geqq n.\end{array}\right.$$

Pour $c\in\mathbb{Q}_2$, $3\leqq v_2(c)\leqq n-3$, $v_2(c)\leqq n-1-n(\mu\chi_0)$:

$$\mathrm{F}[n,c]\left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}'[n,c](a)=0 \quad \text{pour tout } a,\\ \mathrm{F}''[n,c](c\alpha^2)=\mu\chi_0(\alpha^{-1}) \quad \text{si} \quad \alpha\in\mathbb{Z}_2^\times,\\ \mathrm{F}''[n,c](c')=0 \quad \text{si } c' \text{ n'est pas de la forme } c'=c\alpha^2.\end{array}\right.$$

Si $n\geqq 1+\sup(2, n(\chi_0\chi_2))$:

$$\mathrm{F}[n,2]\left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}'[n,2](a)=0 \quad \text{pour tout } a,\\ \mathrm{F}''[n,2](c)=0 \quad \text{si} \quad v_2(c)\neq 1,\\ \mathrm{F}''[n,2](2\alpha)=\chi_0\chi_2(\alpha^{-1})\tilde{\gamma}(\alpha) \quad \text{si} \quad \alpha\in\mathbb{Z}_2^\times.\end{array}\right.$$

Si $n\geqq 2+\sup(2, n(\chi_0))$, et $v_2(c)=2$:

$$\mathrm{F}[n,c]\left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}'[n,c](a)=0 \quad \text{pour tout } a,\\ \mathrm{F}''[n,c](c\alpha)=\chi_0(\alpha^{-1}) \quad \text{si} \quad \alpha\in 1+4\mathbb{Z}_2,\\ \mathrm{F}''[n,c](c')=0 \quad \text{si } c' \text{ n'est pas de la forme } c'=c\alpha.\end{array}\right.$$

Si $n\geqq 5$, $v_p(c)=n-2$:

$$\mathrm{F}[n,c]\left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}'[n,c](a)=0 \quad \text{pour tout } a,\\ \mathrm{F}''[n,c](c\alpha)=1 \quad \text{si} \quad \alpha\in 1+4\mathbb{Z}_2,\\ \mathrm{F}''[n,c](c')=0 \quad \text{si } c' \text{ n'est pas de la forme } c'=c\alpha.\end{array}\right.$$

Ces fonctions F′ et F″ sont bien invariantes par $2^n\mathbb{Z}_2$. On pose :

$$\mathrm{I}(2)=\{1, 2, 2^2\}, \qquad \mathrm{I}(3)=\{1, 2, 2^2, 2^3\},$$

et pour $n\geqq 4$, on note $\mathrm{I}(n)$ la réunion des ensembles suivants :

- $\{1, 2, 2^{n-1}, 2^n\}$,
- un système de représentants de $(2^2\mathbb{Z}_2^\times/1+4\mathbb{Z}_2)\cup(2^{n-2}\mathbb{Z}_2^\times/1+4\mathbb{Z}_2)$;
- un système de représentants de $\cup\, 2^m\mathbb{Z}_2^\times/\mathbb{Z}_2^{\times 2}$, $3\leqq m\leqq n-3$.

PROPOSITION 12. — *Soit* $n \geqq \sup(2, n(\chi_0))$:

1° *supposons* $n(\mu\chi_0)>0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$. *Si* $n<n(\mu\chi_0)+n(\mu^{-1}\chi_0)+2$, $\mathscr{B}_\mu(n)=\{0\}$. *Si* $n \geqq n(\mu\chi_0)+n(\mu^{-1}\chi_0)+2$, $\mathscr{B}_\mu(n)$ *admet pour base l'ensemble des fonctions* $\mathrm{F}[n, c]$, $c \in \mathrm{I}(n)$, $n(\mu^{-1}\chi_0)+1 \leqq v_2(c) \leqq n-1-n(\mu\chi_0)$;

2° *supposons* $n(\mu\chi_0)>0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$. *Si* $n<n(\mu\chi_0)+1$, $\mathscr{B}_\mu(n)=\{0\}$. *Si* $n \geqq n(\mu\chi_0)+1$, $\mathscr{B}_\mu(n)$ *admet pour base l'ensemble des fonctions :*

$$\mathrm{F}[n, c], \quad c \in \mathrm{I}(n), \qquad 0 \leqq v_2(c) \leqq n-1-n(\mu\chi_0);$$

3° *supposons* $n(\mu\chi_0)=0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$. *Si* $n<n(\mu^{-1}\chi_0)+1$, $\mathscr{B}_\mu(n)=\{0\}$. *Si* $n \geqq n(\mu^{-1}\chi_0)+1$, $\mathscr{B}_\mu(n)$ *admet pour base l'ensemble des fonctions :*

$$\mathrm{F}[n, c], \quad c \in \mathrm{I}(n), \qquad n(\mu^{-1}\chi_0)+1 \leqq v_2(c) \leqq n;$$

4° *supposons* $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, $n(\chi_0) \leqq 2$. *Alors* $\mathscr{B}_\mu(n)$ *admet pour base l'ensemble des fonctions :*

$$\begin{gathered}\mathrm{F}[2, 1], \quad \mathrm{F}[2, 2^2] \quad \text{si} \quad n=2,\\ \mathrm{F}[3, 1], \quad \mathrm{F}[3, 2^2], \quad \mathrm{F}[3, 2^3] \quad \text{si} \quad n=3,\\ \mathrm{F}[n, c], \quad c \in \mathrm{I}(n) \quad \text{si} \quad n \geqq 4;\end{gathered}$$

5° *supposons* $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, $n(\chi_0)=3$. *Alors* $\mathscr{B}_\mu(2)=\{0\}$, *et si* $n \geqq 3$, $\mathscr{B}_\mu(n)$ *admet pour base l'ensemble des fonctions :*

$$\begin{gathered}\mathrm{F}[3, 1], \quad \mathrm{F}[3, 2], \quad \mathrm{F}[3, 2^3] \quad \text{si} \quad n=3,\\ \mathrm{F}[4, 1], \quad \mathrm{F}[4, 2], \quad \mathrm{F}[4, 2^3], \quad \mathrm{F}[4, 2^4] \quad \text{si} \quad n=4,\\ \mathrm{F}[n, c], \quad c \in \mathrm{I}(n) \quad \text{si} \quad n \geqq 5.\end{gathered}$$

Démonstration. — Soit f une fonction sur $\tilde{\Gamma}$, impaire et vérifiant (A_n). On définit les fonctions suivantes vérifiant les mêmes conditions :

$$q_1 f \begin{cases} (q_1 f)'=f', \\ (q_1 f)''(c)=f''(c) & \text{si} \quad v_2(c)=0, \\ (q_1 f)''(c)=0 & \text{si} \quad v_2(c)>0; \end{cases}$$

pour $c \in \mathrm{I}(n)$, $c \neq 1$,

$$q_c f \begin{cases} (q_c f)'=0, \\ (q_c f)''(c\alpha)=f''(c\alpha) & \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{Z}_2^\times,\ v_2(\alpha-1) \geqq \inf(3, v_2(c), n-v_2(c)), \\ (q_c f)''(c')=0 & \text{si } c' \text{ n'est pas de la forme } c'=c\alpha. \end{cases}$$

Le lemme 20 montre que $f \in \mathscr{B}_\mu(n)$ si et seulement si $q_c f \in \mathscr{B}_\mu(n)$ pour tout $c \in \mathrm{I}(n)$. Soit $c \in \mathrm{I}(n)$, supposons $f=q_c f \neq 0$;

1° si $c=1$, $f \in \mathscr{B}_\mu(n)$ si et seulement si $\mathrm{F}[n, 1] \in \mathscr{B}_\mu(n)$ et f est proportionnelle à $\mathrm{F}[n, 1]$ (lemme 20, 1,4). Mais $\mathrm{F}[n, 1] \in \mathscr{B}_\mu(n)$ si et seulement si $n(\mu\chi_0^{-1})=0$ (lemme 20, 2);

2° si $c=2$, supposons $f \in \mathscr{B}_\mu(n)$. Alors, pour $\alpha \in \mathbb{Z}_2^\times$, $v_2(\alpha-1) \geqq n-1$:

$$f''(c)=f''(c\alpha)=(c, \alpha)\tilde{\gamma}(\alpha)\chi_0^{-1}(\alpha)f''(c)$$

(lemme 20,5), d'où $\chi_0\chi_2(\alpha)=\tilde{\gamma}(\alpha)$. Si $n=2$, c'est vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2^\times$, ce qui est impossible. Donc $n \geqq 3$, et $\chi_0\chi_2(\alpha)=1$ pour $v_2(\alpha-1) \geqq n-1$, i.e. $n \geqq 1+n(\chi_0\chi_2)$, donc $n \geqq 1+\sup(2, n(\chi_0\chi_2))$. Alors f est proportionnelle à $F[n, 2]$ (lemme 20,5). Pour $\alpha \in \mathbb{Z}_2^\times$, on a :

$$\mu\chi_0(\alpha^{-1})f''(c)=f''(c\alpha^2)=\chi_0^{-1}(\alpha^2)f''(c)$$

(lemme 20, 3, 5), donc $\mu^{-1}\chi_0(\alpha)=1$, et $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$. Réciproquement si $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$ et $n \geqq 1+\sup(2, n(\chi_0\chi_2))$, la fonction $F[n, 2]$ vérifie les conditions 3 et 5 du lemme 20;

3° si $v_2(c) \geqq 2$, la condition 5 du lemme 20 se simplifie : $(c, \alpha)\tilde{\gamma}(\alpha)=1$ si $v_2(\alpha-1) \geqq v_2(c)$. La fonction f appartient à $\mathscr{B}_\mu(n)$ si et seulement si, pour $\alpha \in \mathbb{Z}_2^\times$:

(*a*) $f''(c\alpha)=f''(c)$, si $v_2(\alpha-1) \geqq n-v_2(c)$;

(*b*) $f''(c\alpha^2)=\mu\chi_0(\alpha^{-1})f''(c)$;

(*c*) $f''(c\alpha)=\chi_0(\alpha^{-1})f''(c)$, si $v_2(\alpha-1) \geqq v_2(c)$.

Je dis que ces conditions sont équivalentes aux conditions suivantes :

(*a'*) $n(\mu\chi_0) \leqq \sup(0, n-v_2(c)-1)$;

(*b'*) $n(\mu^{-1}\chi_0) \leqq v_2(c)-1$,

(*c'*) si $v_2(c)=2$, $n(\chi_0) \leqq \sup(2, n-2)$,

(*d'*) f est proportionnelle à $F[n, c]$.

En effet, soit $\alpha \in \mathbb{Z}_2^\times$. Si $v_2(\alpha-1) \geqq n-v_2(c)-1$, on a $v_2(\alpha^2-1) \geqq n-v_2(c)$, alors (*a*) pris en α^2 et (*b*) pris en α impliquent $\mu\chi_0(\alpha^{-1})=1$. On en déduit (*a'*). Si $v_2(\alpha-1) \geqq v_2(c)-1$, On a $v_2(\alpha^2-1) \geqq v_2(c)$, alors (*c*) pris en α^2 et (*b*) pris en α impliquent $\mu^{-1}\chi_0(\alpha)=1$. On en déduit (*b'*). Si $v_2(\alpha-1) \geqq \sup(v_2(c), n-v_2(c))$ (*a*) et (*c*) impliquent que $\chi_0(\alpha)=1$. On en déduit (*c'*). Enfin (*d'*) est claire par construction. Réciproquement, supposons (*a'*), (*b'*), (*c'*) vérifiées, et posons $f=F[n, c]$;

– si $n-v_2(c) \leqq \inf(3, v_2(c))$, f'' est définie par la relation (*a*) (par construction de $F[n, c]$). Pour vérifier (*b*) et (*c*), il faut montrer que $n(\mu\chi_0)=0$, $n(\chi_0) \leqq v_2(c)$. Or, d'après (*a'*) :

$$n(\mu\chi_0) \leqq \sup(0, n-v_2(c)-1) \leqq \sup(0,3-1)=2.$$

De plus $\mu\chi_0(-1)=1$. Donc $n(\mu\chi_0)=0$. Alors $\mu^{-1}|_{\mathbb{Z}_2^\times}=\chi_0|_{\mathbb{Z}_2^\times}$, et $n(\mu^{-1}\chi_0)=n(\chi_0^2)$. Si χ_0^2 est ramifié, on a d'après (*b'*) :

$$n(\chi_0)=n(\chi_0^2)+1=n(\mu^{-1}\chi_0)+1 \leqq v_2(c);$$

si χ_0^2 est non ramifié et $v_2(c) \geqq 3$:

$$n(\chi_0) \leqq 3 \leqq v_2(c);$$

et si χ_0^2 est non ramifié et $v_2(c)=2$, on a d'après (*c'*) :

$$n(\chi_0) \leqq \sup(2, n-v_2(c)) \leqq \sup(2, \inf(3, v_2(c)))=2=v_2(c);$$

— si $3<\inf(n-v_2(c),\ v_2(c))$, f'' est définie par la relation (b). Pour vérifier (a) [resp. (c)], il faut montrer que si $v_2(\alpha^2-1)\geqq n-v_2(c)$ [resp. $v_2(\alpha^2-1)\geqq v_2(c)$], on a l'égalité $\mu\chi_0(\alpha^{-1})=1$ [resp. $\mu\chi_0(\alpha^{-1})=\chi_0(\alpha^{-2})$]. Or $n-v_2(c)\geqq 4$, $v_2(c)\geqq 4$. A multiplication par -1 près, inessentielle puisque $\mu\chi_0(-1)=1$, la condition $v_2(\alpha^2-1)\geqq n-v_2(c)$ [resp. $v_2(\alpha^2-1)\geqq v_2(c)$] équivaut à $v_2(\alpha-1)\geqq n-v_2(c)-1$ [resp. $v_2(\alpha-1)\geqq v_2(c)-1$]. Alors (a) et (c) résultent de (a') et (b');

— si $v_2(c)\leqq 3\leqq n-v_2(c)$, f'' est définie par la relation (c). Pour vérifier (a) et (b), il faut montrer que $n(\chi_0)\leqq n-v_2(c)$, et $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$. Soit $\alpha\in\mathbb{Z}_2^\times$, $v_2(\alpha-1)\geqq n-v_2(c)$. Comme $n-v_2(c)\geqq 3$, il existe β tel que $v_2(\beta-1)\geqq n-v_2(c)-1$, et $\beta^2=\alpha$. Alors :

$\mu\chi_0(\beta)=1$, d'après (a');

$\mu^{-1}\chi_0(\beta)=1$, d'après (b') et $v_2(c)\leqq n-v_2(c)$,

donc $\chi_0(\alpha)=\chi_0(\beta^2)=1$, d'où $n(\chi_0)\leqq n-v_2(c)$. L'hypothèse (b') implique $n(\mu^{-1}\chi_0)\leqq v_2(c)-1\leqq 2$, donc $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$ puisque $\mu\chi_0(-1)=1$.

Il résulte de cette étude que $\mathscr{B}_\mu(n)$ admet pour base l'ensemble des fonctions $F[n,\ c]$ pour $c\in I(n)$, telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

1° si $c=1$, $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$;

2° si $c=2$, $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, et $n\geqq 1+\sup(2,\ n(\chi_0\chi_2))$;

3° les conditions (a'), (b'), (c'), si $v_2(c)\geqq 2$

[remarquons que si $n(\chi_0^2)\neq 1$, la condition 2° s'écrit $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$ et $n\geqq 2+n(\chi_0^2)$]. En spécifiant ces conditions dans les différents cas possibles, on obtient la proposition. □

8. On conserve les mêmes hypothèses. Soit $\tilde{n}$ le plus petit entier $n\geqq\sup(2,\ n(\chi_0))$ tel que $\mathscr{B}_\mu(n)\neq\{0\}$.

PROPOSITION 13. — *Supposons $n=\tilde{n}$:*

(i) *si $n(\mu\chi_0)>0$ et $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$,*

$$\tilde{T}'_2\,F[n,\ 1]=2\tilde{\gamma}(2)\mu^{-1}(2)\,F[n,\ 1];$$

(ii) *si $n(\mu\chi_0)=0$ et $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$:*

$$\tilde{T}'_2\,F[n,\ 2^n]=2\tilde{\gamma}(2)\mu(2)\,F[n,\ 2^n];$$

(iii) *si $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$ et $n(\chi_0)\leqq 2$:*

$$\tilde{T}'_2\,F[2,\ 1]=2\tilde{\gamma}(2)\mu^{-1}(2)\,F[2,\ 1];$$

$$\tilde{T}'_2\,F[2,\ 2^2]=2\tilde{\gamma}(2)\mu(2)\,F[2,\ 2^2]+2^{-1}\tilde{\gamma}(2)\mu(2)(1+i\mu(-1))\,F[2,\ 1];$$

(iv) *si $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, et $n(\chi_0)=3$:*

$$\tilde{T}'_2\,F[3,\ 1]=2\tilde{\gamma}(2)\mu^{-1}(2)\,F[3,\ 1];$$

$$\tilde{T}'_2\,F[3,\ 2]=F[3,\ 1];$$

$$\tilde{T}'_2\,F[3,\ 2^3]=2\tilde{\gamma}(2)\mu(2)\,F[3,\ 2^3]+\tilde{\gamma}(2)\mu(2)(1+i\mu(-1))\,F[3,\ 2].$$

Démonstration. — Les deux premières assertions se démontrent comme dans le cas $p\neq 2$ (prop. 10). Pour (iii), on a des égalités :

$$\tilde{T}'_2 F[2, 1]=x F[2, 1]+y F[2, 2^2],$$
$$\tilde{T}'_2 F[2, 2^2]=x' F[2, 1]+y' F[2, 2^2].$$

La première égalité, prise en $\tau'(0)$ puis en $1=\tau''(0)$ donne (comme dans le cas $p\neq 2$);

$$x=2\tilde{\gamma}(2)\mu^{-1}(2), \qquad y=0.$$

La deuxième égalité, prise en 1 puis en $\tau'(0)$, donne :

$$y'=2\tilde{\gamma}(2)\mu(2),$$

$$\begin{aligned}x'=&\sum_{u\in\mathbb{Z}_2/4\mathbb{Z}_2} F[2, 2^2](\tau'(0)\underline{u}d(2))\\ &=\sum_u (u, 2u) F[2, 2^2]\left(\begin{pmatrix}2u^{-1} & -u^{-1}\\ 0 & 2^{-1}u\end{pmatrix}\tau''(4u^{-1})\right)\\ &\qquad=\sum_u (u, 2u)\tilde{\gamma}(2u^{-1})\mu(2u^{-1})|2u^{-1}|F[2, 2^2](\tau''(4u^{-1})).\end{aligned}$$

Par définition de $F''[2, 2^2]$, seuls les termes avec $v_2(u)=0$ interviennent :

$$\begin{aligned}x'=&\sum_{u=\pm 1}(u, 2u)\tilde{\gamma}(2u^{-1})\mu(2u^{-1})|2|\\ &=2^{-1}\mu(2)\tilde{\gamma}(2)[1+(-1, -1)\tilde{\gamma}(-1)\mu(-1)]=2^{-1}\mu(2)\tilde{\gamma}(2)(1+i\mu(-1))\end{aligned}$$

(II, 6). Dans le cas (iv), on a des égalités (prop. 12) :

$$\tilde{T}'_2 F[3, 1]=x F[3, 1]+y F[3, 2]+z F[3, 2^2], \tag{12}$$
$$\tilde{T}'_2 F[3, 2]=x' F[3, 1]+y' F[3, 2]+z' F[3, 2^3], \tag{13}$$
$$\tilde{T}'_2 F[3, 2^3]=x'' F[3, 1]+y'' F[3, 2]+z'' F[3, 2^3]. \tag{14}$$

L'égalité (12) prise en $\tau'(0)$, en 1, et en $\tau''(2)$, donne :

$$x=2\tilde{\gamma}(2)\mu^{-1}(2), \qquad z=0,$$

$$y=\sum_{u\in\mathbb{Z}_2/4\mathbb{Z}_2} F[3, 1](\tau''(2)\underline{u}d(2)).$$

On a :

$$\tau''(2)\underline{u}d(2)=\left[\begin{pmatrix}2(2u+1)^{-1} & 2^{-1}u\\ 0 & (2u+1)2^{-1}\end{pmatrix}, (2u+1, -1)\right]\tau''(8(2u+1)^{-1}.$$

Comme $F[3, 1]\,(\tau''(8(2u+1)^{-1}))=0$, pour tout $u, y=0$.

L'égalité (13) en $\tau'(0)$ donne :

$$x' = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2/4\mathbb{Z}_2} \mathrm{F}[3,\,2](\tau'(0)\underline{u}d(2)),$$

$$x' = \sum_u (u,\,2u)\tilde{\gamma}(2u^{-1})\mu(2u^{-1})|2u^{-1}|\,\mathrm{F}''[3,\,2](4u^{-1}).$$

Par définition de F″[3, 2], seul le terme $u=2$ intervient, et $x'=1$. Prise en $\tau''(2)$, l'égalité (13) donne :

$$\begin{aligned} y' &= \sum_u \mathrm{F}[3,\,2](\tau''(2)\underline{u}d(2) \\ &= \sum_u (2u+1,\,-1)\tilde{\gamma}(2(2u+1)^{-1})\mu(2(2u+1)^{-1})|2(2u+1)^{-1}|\,\mathrm{F}''[3,\,2](8(2u+1)^{-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prise en 1, l'égalité (13) donne $z'=0$.

L'égalité (14) en $\tau'(0)$ donne $x''=0$, car $\mathrm{F}''[3,\,2^3](4u^{-1})=0$ pour $0 \leqq v_2(u) \leqq 2$. Prise en $\tau''(2)$, elle donne :

$$\begin{aligned} y'' = \sum_u (2u+1,\,-1)\tilde{\gamma}(2(2u+1)^{-1}) \\ \times \mu(2(2u+1)^{-1})|2(2u+1)^{-1}|\,\mathrm{F}''[3,\,2^3](8(2u+1)^{-1}). \end{aligned}$$

On a $\mathrm{F}''[3,\,2^3]\,(8(2u+1)^{-1})=1$ pour tout u. En posant $t=2u+1$, on a :

$$y'' = |2|\mu(2)\tilde{\gamma}(2) \sum_{t \in \mathbb{Z}_2^\times/1+8\mathbb{Z}_2} (t,\,-2)\tilde{\gamma}(t)\mu(t).$$

Comme $n(\mu)=n(\chi_0)=3$, on a $n(\mu\chi_{-2}) \leqq 2$, d'où :

$$\begin{aligned} y'' &= \mu(2)\tilde{\gamma}(2) \sum_{t=\pm 1} (t,\,-2)\tilde{\gamma}(t)\mu(t) \\ &= \mu(2)\tilde{\gamma}(2)(1+(-1,\,-2)\tilde{\gamma}(-1)\mu(-1)) = \mu(2)\tilde{\gamma}(2)(1+i\mu(-1)). \end{aligned}$$

Enfin l'égalité (14) prise en 1 donne $z''=2\tilde{\gamma}(2)\mu(2)$. □

9. On conserve les mêmes hypothèses. Comme $\mu^{-1}\chi_0(-1)=1$, il existe quatre caractères ν_i, $i=1\ldots 4$, de $\mathbb{Z}_2^\times$ tels que $\nu_i^2 = \mu^{-1}\chi_0|_{\mathbb{Z}_2^\times}$. Soit I′ un système de représentants de $\cup\, 2^h\mathbb{Z}_2^\times/\mathbb{Z}_2^{\times 2}$, $h=1\ldots\infty$.

LEMME 26. — *Soient* $n \geqq \tilde{n}$, $f \in \mathscr{B}_\mu(n)$, $a \in \mathbb{Q}_2^\times$. *On a l'égalité :*

$$t_f(a) = \tilde{\gamma}(-1)\mu(-1)f'(0)\ \mathrm{car}\ (\mathbb{Z}_2,\,a) + \sum_{c \in \mathrm{I}'} 2^{-1}\tilde{\gamma}(-c)\mu(-c)f''(c)\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \eta(\nu_i,\,-ac^{-1}).$$

Démonstration. — Elle est essentiellement identique à celle du lemme 23. On ne sépare plus les cas $v(b) \leqq -n$ et $-n+1 \leqq v(b) \leqq -1$. □

LEMME 27. — *Soient* $c \in \mathrm{I}'$, $a \in \mathbb{Q}_2^\times$. *On a les égalités :*

(i) *si* $n(\mu\chi_0)=0$:

$$\sum_{u\in\mathbb{Z}_2^\times/\mathbb{Z}_2^{\times 2}} 2^{-1}\tilde{\gamma}(-cu)\mu(-cu)\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\eta(\nu_i, -ac^{-1}u^{-1})$$
$$=2^{-2}\tilde{\gamma}(-c)\mu(-c)[(1+i)\eta(\mu^{-1}\chi_c, -ac^{-1})+(1-i)\eta(\mu^{-1}\chi_{-c}, -ac^{-1})];$$

(ii) *si* $n(\mu\chi_0)=0$,

$$\sum_{u\in(1+4\mathbb{Z}_2)/\mathbb{Z}_2^{\times 2}} 2^{-1}\tilde{\gamma}(-cu)\mu(-cu)\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\eta(\nu_i, -ac^{-1}u^{-1})$$
$$=2^{-2}\tilde{\gamma}(-c)\mu(-c)[\eta(\mu^{-1}\chi_c, -ac^{-1})+\eta(\mu^{-1}\chi_{-c}, -ac^{-1})];$$

(iii) *si* $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$,

$$\sum_{u\in\mathbb{Z}_2^\times/\mathbb{Z}_2^{\times 2}} 2^{-1}\tilde{\gamma}(-2u)\mu(-2u)\chi_0\chi_2(u^{-1})\tilde{\gamma}(u)\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\eta(\nu_i, -a2^{-1}u^{-1})$$
$$=2^{-1}\tilde{\gamma}(-2)\mu(-2)\eta(1, a2^{-1}).$$

Démonstration. — Pour (i), on a les égalités :

$$\tilde{\gamma}(-cu)=\tilde{\gamma}(-c)\chi_{-c}(u)\tilde{\gamma}(u)=\tilde{\gamma}(-c)\frac{1}{2}[(1+i)\chi_c(u)+(1-i)\chi_{-c}(u)],$$
$$\mu(-cu)=\mu(-c)\mu(u),$$
$$\eta(\nu_i, -ac^{-1}u^{-1})=\nu_i(u)\eta(\nu_i, -ac^{-1}),$$

II, 6 et 7). Le membre de gauche est égal à :

$$2^{-2}\tilde{\gamma}(-c)\mu(-c)\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\eta(\nu_i, -ac^{-1})[(1+i)(\sum_u \nu_i\mu\chi_c(u))+(1-i)(\sum_u \nu_i\mu\chi_{-c}(u))].$$

Remarquons que les caractères $\nu_i\mu\chi_c$, resp. $\nu_i\mu\chi_{-c}$, décrivent tous les caractères quadratiques de $\mathbb{Z}_2^\times$, quand $i=1\ldots4$. En effet $(\nu_i\mu\chi_c)^2=\mu^{-1}\chi_0\mu^2=\mu\chi_0$ (sur $\mathbb{Z}_2^\times$), et $n(\mu\chi_0)=0$. Les sommes en u sont nulles si $\nu_i\mu\chi_c\neq 1$ (resp. $\nu_i\mu\chi_{-c}\neq 1$) et valent 4 si $\nu_i\mu\chi_c=1$ (resp. $\nu_i\mu\chi_{-c}=1$). Pour $\nu_i=\mu^{-1}\chi_c$, le terme entre crochet vaut $4(1+i)$. Pour $\nu_i=\mu^{-1}\chi_{-c}$, ce terme vaut $4(1-i)$. Pour les autres ν_i, ce terme est nul. D'où l'assertion.

Pour (ii), on a l'égalité $\tilde{\gamma}(-cu)=\tilde{\gamma}(-c)\chi_{-c}(u)$, car $u\in 1+4\mathbb{Z}_2$, et $\tilde{\gamma}(u)=1$. Le membre de gauche vaut :

$$2^{-1}\tilde{\gamma}(-c)\mu(-c)\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\eta(\nu_i, -ac^{-1})(\sum_u \nu_i\mu\chi_{-c}(u)).$$

On somme cette fois sur $u\in 1+4\mathbb{Z}_2$. La somme en u vaut 2 si $n(\nu_i\mu\chi_{-c})\leqq 2$, i. e. $\nu_i=\mu^{-1}\chi_{-c}$ ou $\nu_i=\mu^{-1}\chi_c$, et 0 sinon, d'où l'assertion.

Pour (iii), on a les égalités :

$$\tilde{\gamma}(-2u)\chi_2(u^{-1})\tilde{\gamma}(u)=\tilde{\gamma}(-2),$$
$$\mu(-2u)\chi_0(u^{-1})=\mu(-2).$$

Le membre de gauche vaut :

$$2^{-1}\tilde{\gamma}(-2)\mu(-2)\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\eta(\nu_i, a2^{-1})\Big(\sum_{u}\nu_i(-u)\Big).$$

La somme en u vaut 4 si $\nu_i=1$, 0 sinon (ici $\nu_i^2=\mu^{-1}\chi_0|_{\mathbb{Z}_2^\times}=1$), d'où l'assertion. □

10. On conserve les mêmes hypothèses. On note $t[n, c]$ l'image dans T_μ de $\mathrm{F}[n, c]$ quand cette fonction existe. On définit $\tilde{\rho}$, J, $\mathrm{J}(\tilde{\rho})$, $\mathrm{T}_\mu^{\mathrm{S}}(n)$ comme dans le cas $p\neq 2$ (VI, 5, 6).

Pour $\nu\in\mathbb{Q}_2^\times$, on définit la fonction $\gamma[\nu]$ comme en V, 4. On pose :

$$\gamma'[\nu]=\frac{1}{2}(\gamma[\nu]+\gamma[5\nu]).$$

Si $e\in\mathbb{Z}$, on définit les fonctions sur $\mathbb{Q}_2^\times$, $\underline{\gamma}''[e]$ et $\underline{\gamma}^0[e]$:

$$\underline{\gamma}''[e]=\mathrm{car}(2^e\mathbb{Z}_2^\times),$$

$$\underline{\gamma}^0[e](a)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad v_2(a)=e \quad\text{et}\quad (a, -1)=-\chi_0(-1), \quad \text{ou si}\ v_2(a)=e+1,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

On a déjà défini l'entier $\tilde{n}$ (VI, 8). On définit dans les cas suivants des ensembles $\mathrm{U}(e)$ de fonctions sur $\mathbb{Q}_2^\times$. Toutes ces fonctions sont à support dans $\mathbb{Z}_2$.

(1) Si $n(\mu\chi_0)>0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$, on a $\tilde{n}=n(\mu\chi_0)+n(\mu^{-1}\chi_0)+2$. Pour $e\geqq\tilde{n}$, on pose :

$$\mathrm{U}(e)=\{\gamma[\nu];\ \nu\in\mathrm{J}(\tilde{\rho}),\ v_2(\nu)=n-\tilde{n}\}.$$

(7) (*a*) Si $n(\mu\chi_0)=0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$, on a $\tilde{n}=n(\mu^{-1}\chi_0)+1$. On définit t_1 par :

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_1(a2^{2h})\mathrm{X}^h=\begin{cases}\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{2^{\tilde{n}}}, 1/2)(2^{\tilde{n}}, a)\\ \qquad\times\mu(a)\tilde{\gamma}(a.a(\mu\chi_{2^{\tilde{n}}}))(1-\mu(2^2)\mathrm{X})^{-1} & \text{si}\quad v_2(a)=0,\\ \varepsilon(\mu^{-1}\chi_{2^{\tilde{n}+1}}, 1/2)(2^{\tilde{n}+1}, a)\\ \qquad\times\mu(a)\tilde{\gamma}(a.a(\mu\chi_{2^{\tilde{n}+1}}))(1-\mu(2^2)\mathrm{X})^{-1} & \text{si}\quad v_2(a)=1,\end{cases}$$

[*voir* le lemme 1 pour la définition de $a(\mu)$].

(*b*) Si $n(\mu\chi_0)>0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, on a $\tilde{n}=n(\mu\chi_0)+1$. On pose $t_1=\mathrm{car}(\mathbb{Z}_2)$.

Dans les cas *a* et *b*, pour $e\geqq\tilde{n}$, on pose :

$$\mathrm{U}(e)=\begin{cases}\{t_1\} & \text{si}\quad e=\tilde{n},\\ \{t_1.\underline{\gamma}''[0]\} & \text{si}\quad e=\tilde{n}+1,\\ \{t_1.\underline{\gamma}''[1],\ t_1.\gamma'[1]\} & \text{si}\quad e=\tilde{n}+2,\\ \{t_1.\gamma''[e-n-1],\ t_1.\gamma'[2^{e-n-2}],\ \gamma[2^{e-n-3}],\ \gamma[-2^{e-n-3}]\},\end{cases}$$

si $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, $n(\chi_0)\leqq 2$, $\mu^2\neq|.|$, on a $\tilde{n}=2$. On pose :

$$t_1=\mathrm{car}(\mathbb{Z}_2),$$

éfinit t_2 par :

) si $\mu(2)\neq\mu^{-1}(2)$:

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_2(a\,2^{2h})X^h=\begin{cases}(1-(2,a)\mu(2)2^{1/2})(1-(2,a)\mu^{-1}(2)2^{1/2})^{-1}(1-\mu(2^2)X)^{-1},\\ \quad \text{si}\quad v_2(a)=0 \quad \text{et}\quad (a,-1)=\chi_0(-1),\\ (1-\mu(2^2)X)^{-1} \quad \text{si}\quad v_2(a)=0\quad\text{et}\quad (a,-1)=-\chi_0(-1),\\ \quad \text{ou si } v_2(a)=1;\end{cases}$$

) si $\mu(2)=\mu^{-1}(2)$:

$$t_2(a)=\begin{cases}(1-(2,a)\mu(2)2^{-1/2})^{-1} \quad \text{si}\quad v_2(a)=0\quad \text{et}\quad (a,-1)=\chi_0(-1),\\ 0\quad \text{si}\quad v_2(a)=0\quad\text{et}\quad (a,-1)=-\chi_0(-1),\quad \text{ou si}\ v_2(a)=1,\end{cases}$$

$$t_2(a\,2^2)=t_2(a)+t_1(a)\qquad \text{si}\quad v_2(a)\geqq 0.$$

ans les cas a et b, pour $e\geqq\tilde{n}$, on pose :

$$U(e)=\begin{cases}\{t_1,t_2\}\quad \text{si}\quad e=2,\\ \{\underline{\gamma}^0[0]\}\quad\text{si}\quad e=3,\\ \{\gamma'[-\chi_0(-1)],\gamma[\chi_0(-1)],\gamma[5\chi_0(-1)]\}\quad \text{si}\quad e=4,\\ \{\underline{\gamma}^0[2],\gamma[-\chi_0(-1)]\}\quad\text{si}\quad e=5,\\ \{\gamma'[-2^{e-4}\chi_0(-1)],\gamma'[2^{e-5}],\gamma[2^{e-4}\chi_0(-1)],\gamma[2^{e-4}5\chi_0(-1)]\},\\ \quad\text{si}\quad e\geqq 6 \text{ et } e \text{ est pair},\\ \{\underline{\gamma}^0[e-3],\gamma[-2^{e-5}\chi_0(-1)],\gamma[2^{e-6}],\gamma[-2^{e-6}]\},\\ \quad \text{si}\quad e\geqq 6\text{ et } e \text{ est impair.}\end{cases}$$

) Si $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, $n(\chi_0)\leqq 2$, $\mu=|.|^{1/2}\chi_\xi$, avec $\xi\in\mathbb{Q}_2^\times$, on a $\tilde{n}=2$. On définit t_2 me en 8, a. On pose $U(2)=\{t_2\}$. Pour $e\geqq 3$, on définit $U(e)$ comme dans le cas 8, en primant, pour e pair, l'élément $\gamma[2^{e-4}\chi_0(-1)]$ (resp. $\gamma[2^{e-4}5\chi_0(-1)]$) si $-1)\in\xi\,\mathbb{Q}_2^{\times 2}$ [resp. $5\chi_0(-1)\in\xi\,\mathbb{Q}_2^{\times 2}$].

0) Si $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, $n(\chi_0)=3$ et $\mu^2\neq|.|$, on a $\tilde{n}=3$. On pose $t_1=\mathrm{car}(\mathbb{Z}_2)$, on nit t_2 par :

) si $\mu(2)\neq\mu^{-1}(2)$:

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_2(a\,2^{2h})X^h=\begin{cases}\mu(2^{-2})(1-\mu(2^2)X)^{-1}\quad\text{si}\quad v_2(a)=0,\\ (1-\mu(2^2)X)^{-1}\quad \text{si}\quad v_2(a)=1\quad\text{et}\quad (a,-1)=-\chi_0(-1),\\ (1-(2,a)\mu(2)2^{1/2})(1-(2,a)\mu^{-1}(2)2^{1/2})^{-1}(1-\mu(2^2)X)^{-1},\\ \quad\text{si}\quad v_2(a)=1\quad\text{et}\quad (a,-1)=\chi_0(-1);\end{cases}$$

(*b*) si $\mu(2)=\mu^{-1}(2)$:

$$t_2(a)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad v_2(a)=0, \\ 1 & \text{si} \quad v_2(a)=1 \quad \text{et} \quad (a,\,-1)=-\chi_0(-1), \\ 3+(2,\,a)\mu(2)2^{1/2} & \text{si} \quad v_2(a)=1 \quad \text{et} \quad (-1,\,a)=\chi_0(-1). \end{cases}$$

Dans les cas *a* et *b*, pour $e\geqq\tilde{n}$, on pose :

$$\mathrm{U}(e)=\begin{cases} \{t_1,\,t_2,\,\underline{\gamma}''[0]\} \quad \text{si} \quad e=3, \\ \{\underline{\gamma}^0[1]\} \quad \text{si} \quad e=4, \\ \{\underline{\gamma}''[e-3],\,\gamma'[2^{e-5}],\,\gamma[2^{e-4}\chi_0(-1)],\,\gamma[2^{e-4}5\chi_0(-1)]\}, \\ \qquad \text{si} \quad e\geqq 5 \text{ et } e \text{ est impair}, \\ \{\underline{\gamma}^0[e-3],\,\gamma[-2^{e-5}\chi_0(-1)],\,\gamma[2^{e-6}],\,\gamma[-2^{e-6}]\}, \\ \qquad \text{si} \quad e\geqq 5 \ \textit{et } e \text{ est pair}. \end{cases}$$

(11) Si $n(\mu\chi_0)=n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, $n(\chi_0)=3$, $\mu=|.|^{1/2}\chi_\xi$, avec $\xi\in\mathbb{Q}_2^\times$, on a $\tilde{n}=3$. On définit t_2 comme en 10, *a*. On pose $\mathrm{U}(3)=\{t_2,\,\underline{\gamma}''[0]\}$. Pour $e\geqq 4$, on définit $\mathrm{U}(e)$ comme en 10, en supprimant, pour *e* impair, l'élément $\gamma[2^{e-4}\chi_0(-1)]$ (resp. $\gamma[2^{e-4}5\chi_0(-1)]$) si $2\chi_0(-1)\in\xi\mathbb{Q}_2^{\times 2}$ [resp. $2.5\,\chi_0(-1)\in\xi\mathbb{Q}_2^{\times 2}$].

On note $\overline{\mathrm{U}}(e)$ l'espace engendré par les éléments de $\mathrm{U}(e)$.

PROPOSITION 14. — *Supposons* $p=2$, $\mu(-1)=\chi_0(-1)$, *et soit* $n\in\mathbb{N}$:

(i) *si* $\mu^2\neq|.|$, *l'espace* $\mathrm{T}_\mu(n)$ *est non nul si et seulement si* $n\geqq\tilde{n}$. *Si* $n\geqq\tilde{n}$, *on a l'égalité :*

$$\mathrm{T}_\mu(n)=\oplus\overline{\mathrm{U}}(e), \qquad \tilde{n}\leqq e\leqq n;$$

(ii) *si* $\mu^2=|.|$, *les mêmes assertions sont vraies pour l'espace* $\mathrm{T}_\mu^{\mathrm{S}}(n)$.

Démonstration. — L'assertion concernant la nullité de $\mathrm{T}_\mu(n)$ résulte de la définition de $\tilde{n}$. On traite successivement les différents cas possibles.

Cas 1. — Supposons $\mu^2\neq|.|$. Soient $n\geqq\tilde{n}$, $h\in\mathbb{N}$, $n(\mu^{-1}\chi_0)+1\leqq h\leqq n-1-n(\mu\chi_0)$, et $c\in\mathrm{I}(n)$, $v_2(c)=h$. On a $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$, $n(\mu\chi_0)>0$, donc $n(\mu^{-1}\chi_0)\geqq 2$, $n(\mu\chi_0)\geqq 2$, et $3\leqq h\leqq n-3$. Par définition de $\mathrm{F}[n,\,c]$ et d'après le lemme 26, pour $a\in\mathbb{Q}_2^\times$, on a l'égalité :

$$t[n,\,c](a)=2^{-3}\tilde{\gamma}(-c)\mu(-c)\sum_{i=1}^{4}\eta(\nu_i,\,-ac^{-1}).$$

On a $n(\nu_i)=n(\mu^{-1}\chi_0)+1$. La fonction $t[n,\,c]$ est à support dans $2^{h-n(\mu^{-1}\chi_0)-1}\mathbb{Z}_2^\times$ (II, 7), et vérifie :

$$t[n,\,c](a\alpha^2)=\mu\chi_0^{-1}(\alpha)\,t[n,\,c](a),$$

pour tous $a\in\mathbb{Q}_2^\times$, $\alpha\in\mathbb{Z}_2^\times$. Une telle fonction appartient à l'espace engendré par les fonctions $\gamma[\nu]$ pour $\nu\in\mathrm{J}$, $v_p(\nu)=h-n(\mu^{-1}\chi_0)-1$. En comparant leurs dimensions (égales à 4), on voit que l'espace engendré par les fonctions $t[n, c]$, $c \in \mathrm{I}(n)$, $v_2(c)=h$, est égal à l'espace engendré par les fonctions $\gamma[\nu]$, $\nu \in \mathrm{J}$, $v_p(\nu)=h-n(\mu^{-1}\chi_0)-1$. La proposition 12, 1 démontre l'assertion (i). Si $\mu=|.|^{1/2}\chi_\xi$, on calcule de même $\mathrm{T}_\mu(n)$. Il reste à déterminer les fonctions $t \in \mathrm{T}_\mu(n)$ telles que $t(a)=0$ si $a \in \xi\,\mathbb{Q}_2^{\times 2}$, ce qui est immédiat.

Cas 7, *a*. — On a $n(\mu\chi_0)=0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)>0$. Cela implique $\mu^2|_{\mathbb{Z}_2^\times} \neq 1$, donc $\mu^2 \neq |.|$, et $n(\mu) \geqq 4$. Pour $n=\tilde{n}$, $\mathrm{T}_\mu(n)$ est engendré par $t[n, 2^n]$ (prop. 12, 3). Calculons $t[n, 2^n](a)$. On considère la formule du lemme 26. On a $n(\nu_i)=n(\mu^{-1}\chi_0)+1=\tilde{n}=n$.

— Si $v_2(a)=0$, seuls les termes pour $v_2(c)=n$ interviennent. Par le lemme 27, *i* :

$$t[n, 2^n](a)=2^{-2}\tilde{\gamma}(2^n)\mu(2^n)[(1-i)\eta(\mu^{-1}\chi_{2^n}, a2^{-n})+(1+i)\eta(\mu^{-1}\chi_{-2^n}, a2^{-n})].$$

D'après le lemme 1, 3 :

$$\eta(\mu^{-1}\chi_{-2^n}, 2^{-n})=\chi_{-1}(-a(\mu^{-1}\chi_{2^n}))\eta(\mu^{-1}\chi_{2^n}, 2^{-n})=\chi_{-1}(a(\mu\chi_{2^n}))\eta(\mu^{-1}\chi_{2^n}, 2^{-n}),$$

d'où :

$$\begin{aligned} t[n, 2^n](a) &= 2^{-2}\tilde{\gamma}(2^n)\mu(2^n)\mu\chi_{2^n}(a)\eta(\mu^{-1}\chi_{2^n}, 2^{-n})[(1-i)+(1+i)\chi_{-1}(a.a(\mu\chi_{2^n}))]\\ &= 2^{-n/2}\tilde{\gamma}(2^n)^{-1}\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{2^n}, 1/2)\mu\chi_{2^n}(a)\tilde{\gamma}(a.a(\mu\chi_{2^n})), \end{aligned}$$

(II, 6, 7), d'où, avec nos définitions :

$$t[n, 2^n](a)=2^{-n/2}\tilde{\gamma}(2^n)^{-1}t_1(a).$$

— Si $v_2(a)=1$, seuls les termes pour $v_2(c)=n+1$ interviennent. Par le même calcul :

$$\begin{aligned} t[n, 2^n](a) &= 2^{-2}\tilde{\gamma}(2^{n+1})\mu(2^{n+1})[(1-i)\eta(\mu^{-1}\chi_{2^{n+1}}, a2^{-n-1})\\ &\qquad +(1+i)\eta(\mu^{-1}\chi_{-2^{n+1}}, a2^{-n-1})]\\ &= 2^{-2}\tilde{\gamma}(2^{n+1})\mu(2^{n+1})\mu\chi_{2^{n+1}}(a/2)\eta(\mu^{-1}\chi_{2^{n+1}}, 2^{-n})[(1-i)\\ &\qquad +(1+i)\chi_{-1}(a.a(\mu\chi_{2^{n+1}}))],\\ &= 2^{-n/2}\tilde{\gamma}(2^n)^{-1}\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{2^{n+1}}, 1/2)\mu\chi_{2^{n+1}}(a)\tilde{\gamma}(a.a(\mu\chi_{2^{n+1}}))\\ &= 2^{-n/2}\tilde{\gamma}(2^n)^{-1}t_1(a). \end{aligned}$$

La proposition 13, ii, et le lemme 7 montrent que :

$$t[n, 2^n]=2^{-n/2}\tilde{\gamma}(2^n)^{-1}t_1,$$

donc $\mathrm{T}_\mu(\tilde{n})=\overline{\mathrm{U}}(\tilde{n})$. Soit maintenant $n \geqq \tilde{n}$. En considérant la définition des espaces $\overline{\mathrm{U}}(e)$, on voit que $\oplus\overline{\mathrm{U}}(e)$, $\tilde{n} \leqq e \leqq n$, n'est autre que l'espace E' des fonctions t' sur $\mathbb{Q}_2^\times$ de la forme $t'=t_1 t$, où t appartient à l'espace E des fonctions sur $\mathbb{Q}_2^\times$ telles que, pour $a \in \mathbb{Q}_2^\times$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2^\times$:

(i) $t(a)=0$, si $v_2(a)<0$;

(ii) $t(a\alpha^2)=t(a)$;

(iii) $t(a\alpha)=t(a)$, si $v_2(a)=n-\tilde{n}-2$, $\alpha \in 1+4\mathbb{Z}_2$;

(iv) $t(a\alpha)=t(a)$, si $v_2(a)=n-\tilde{n}-1$;

(v) $t(a)$ est constant pour $v_2(a) \geqq n-\tilde{n}$.

Montrons que $T_\mu(n)\subset E'$. Soit $c\in I(n)$, $\tilde{n}\leqq v_2(c)\leqq n$. On peut écrire $t[n, c]=t_1 t$, où t vérifie (i) (remarquons que t_1 ne s'annule en aucun point de $\mathbb{Z}_2$). D'après le lemme 7, ii, $t[n, c]$ et t_1 se transforment par le même caractère de $\mathbb{Z}_2^{\times 2}$, donc t vérifie (ii). Supposons $v_2(c)<n$. Alors (lemme 26) $t[n, c]$ et t sont à support dans $c\,2^{-\tilde{n}}\mathbb{Z}_2^\times$. En particulier, t vérifie (v). Si $v_2(c)\leqq n-3$, t vérifie (iii) et (iv) car $t(a)=0$ pour les valeurs de a en question. Si $v_2(c)=n-2$, t vérifie (iv) pour la même raison. Si $v_2(a)=n-\tilde{n}-2$ et $\alpha\in 1+4\mathbb{Z}_2$, on a (lemmes 26 et 27, ii) :

$$t[n, c](a\alpha)=2^{-2}\tilde{\gamma}(-c)\mu(-c)[\eta(\mu^{-1}\chi_c, -a\alpha c^{-1})+\eta(\mu^{-1}\chi_{-c}, -a\alpha c^{-1})]$$
$$=\mu\chi_c(\alpha)\,t[n, c](a)$$

(II, 7, et $\chi_{-1}(\alpha)=1$). La fonction $t[n, 2^{\tilde{n}}]$ se transforme par la même formule (lemmes 26 et 27, i). Comme t_1 est proportionnel à $t[\tilde{n}, 2^{\tilde{n}}]$, t vérifie (iv). Si $v_2(c)=n-1$, la condition (iii) est triviale. Pour $v_2(a)=n-\tilde{n}-1$, le lemme 26 montre que $t[n, c](a)$ et $t[\tilde{n}, 2^{\tilde{n}}](a)$ s'expriment par la même formule, i.e. $t[n, c](a)=t[\tilde{n}, 2^{\tilde{n}}](a)$. Donc t vérifie (iv). Si $v_2(c)<n$, on a donc $t[n, c]\in E'$. Comme $t[n, 2^n]$ est combinaison linéaire de $t[\tilde{n}, 2^{\tilde{n}}]$ et de fonctions $t[n, c]$, $\tilde{n}\leqq v_2(c)\leqq n-1$, $t[n, 2^n]\in E'$. Donc (prop. 12, 3) $T_\mu(n)\subset E'$. En comparant leurs dimensions, on obtient l'égalité $T_\mu(n)=E'$.

Cas 7, *b*. — On a $n(\mu\chi_0)>0$, $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$, donc $\mu^2\neq|\,.\,|$. Pour $n=\tilde{n}$, $T_\mu(n)$ est engendré par $t[n, 1]$ (prop. 12,2) et $t[n, 1]=\tilde{\gamma}(-1)\mu(-1)t_1$ (lemme 26), donc $T_\mu(\tilde{n})=\overline{U}(\tilde{n})$. Si $n\geqq\tilde{n}$, on voit que l'espace $\oplus\overline{U}(e)$, $\tilde{n}\leqq e\leqq n$, n'est autre que l'espace E défini ci-dessus. Soit $c\in I(n)$, $0\leqq v_2(c)\leqq n-\tilde{n}$. Si $c=1$, on vient de montrer que $t[n, c]\in E$. Si $v_2(c)\geqq 1$, $t[n, c]$ vérifie (i) et (ii) (lemme 7). Le lemme 26 montre que $t[n, c]$ est combinaison linéaire de fonctions :

$$a\mapsto\eta(\nu_i, -ac^{-1}),$$

où ν_i est un caractère quadratique de $\mathbb{Z}_2^\times$. On vérifie facilement qu'une telle fonction vérifie (iii), (iv), (v). Donc $t[n, c]\in E$, et $T_\mu(n)\subset E$ (prop. 12.2). On obtient l'égalité de ces espaces en comparant leurs dimensions.

Cas 8. — Pour $n=\tilde{n}=2$, $T_\mu(n)$ est engendré par $t[2, 1]$ et $t[2, 2^2]$ (prop. 12, 4). On a $t[2, 1]=\tilde{\gamma}(-1)\mu(-1)t_1$ (lemme 26). Calculons $t[2, 2^2](a)$. Remarquons d'abord que, puisque $n(\mu)\leqq 2$, on a $\mu|_{\mathbb{Z}_2^\times}=1$ ou $\chi_{-1|\mathbb{Z}_2^\times}$. En examinant les deux cas possibles, on vérifie que :

$$(15)\quad (1+i)\eta(\mu^{-1}\chi_c, a)+(1-i)\eta(\mu^{-1}\chi_{-c}, a)$$
$$=(1+i\mu(-1))\eta(\chi_c, a)+(1-i\mu(-1))\eta(\chi_{-c}, a),$$

pour $a, c\in\mathbb{Q}_2^\times$. Alors (lemmes 26, 27, i) :

$$t[2, 2^2](a)=\sum_{h=0}^{\infty}2^{-2}\tilde{\gamma}(2^h)\mu(2^{h+2})$$
$$\times[(1-i\mu(-1))\eta(\chi_{2^h}, a\,2^{-h-2})+(1+i\mu(-1))\eta(\chi_{-2^h}, a\,2^{-h-2})];$$

— si $v_2(a)=0$, il reste pour $h=0$ le terme contenant $\eta(\chi_{-1}, a\,2^{-2})$, et les termes en $h=1$:

$$t[2,\,2^2](a)=2^{-2}\mu(2^2)[(1+i\mu(-1))\eta(\chi_{-1},\,a2^{-2})+\tilde{\gamma}(2)\mu(2)$$
$$\times[(1-i\mu(-1))\eta(\chi_2,\,a2^{-3})+(1+i\mu(-1))\eta(\chi_{-2},\,a2^{-3})]]$$
$$=2^{-2}\mu(2^2)(1-i\mu(-1))\mu(-1)\chi_{-1}(a)[1+\chi_2(a)\mu(2)2^{-1/2}$$
$$\times(1+\chi_{-1}(a)\mu(-1))]$$

(II, 7). Si $\chi_{-1}(a)=\mu(-1)$, on obtient :

$$t[2,\,2^2](a)=2^{-2}\mu(2^2)(1-i\mu(-1))(1+\chi_2(a)\mu(2)2^{1/2}).$$

Si $\chi_{-1}(a)=-\mu(-1)$, on obtient :

$$t[2,\,2^2](a)=-2^{-2}\mu(2^2)(1-i\mu(-1));$$

– si $v_2(a)=1$, il reste le terme pour $h=0$ contenant $\eta(1,\,a2^{-2})$, d'où (II, 7) :

$$t[2,\,2^2](a)=-2^{-2}\mu(2^2)(1-i\mu(-1)).$$

Dans le cas a, i.e. $\mu(2)\neq\mu^{-1}(2)$, on peut diagonaliser $\tilde{T}'_2$ dans $T_\mu(2)$. Posons :

$$t'_2=(1-i\mu(-1))^{-1}(2-\mu(4))^{-1}[4(1-\mu(2^{-2}))t[2,\,2^2]+(1+i\mu(-1))t[2,\,1]].$$

Grâce à la proposition 13, on vérifie que $\tilde{T}'_2\,t'_2=2\tilde{\gamma}(2)\mu(2)t'_2$. Les formules ci-dessus permettent de calculer $t'_2(a)$ pour $v_2(a)=0$ ou 1. On obtient $t'_2(a)=t_2(a)$. Donc $t'_2=t_2$. Comme $T_\mu(2)$ est engendré par $t[2,\,1]$ et t'_2, on a l'égalité $T_\mu(2)=\overline{U}(2)$.

Dans le cas b, i.e. $\mu(2)=\mu^{-1}(2)$. $\tilde{T}'_2$ est unipotent dans $T_\mu(2)$. Posons :

$$t'_2=4(1-i\mu(-1))^{-1}t[2,\,2^2]+i\mu(-4)t[2,\,1].$$

On vérifie que $\tilde{T}'_2\,t'_2=2\tilde{\gamma}(2)\mu(2))(t'_2+t_1)$, puis que $t'_2=t_2$. Alors $T_\mu(2)=\overline{U}(2)$.

Soit $n\geqq 3$, n impair. Soit F l'espace des fonctions t sur $\mathbb{Q}_2^\times$ telles que pour $a\in\mathbb{Q}_2^\times$ et $\alpha\in\mathbb{Z}_2^\times$:

(i) $t(a)=0$, si $v_2(a)<0$;

(ii) $t(a\alpha^2)=t(a)$;

(iii) $t(a\alpha)=t(a)$, si $v_2(a)=n-4$;

(iv) $t(a)$ est constant pour $v_2(a)\geqq n-3$.

Soit F_1 l'espace engendré par F, t_2 *et* $\gamma^0[n-3]$. On vérifie facilement que l'espace $\oplus\overline{U}(e)$, $2\leqq e\leqq n$, est inclus dans F_1. En comparant leurs dimensions, on obtient l'égalité :

$$F_1=\oplus\overline{U}(e),\qquad 2\leqq e\leqq n.$$

Il faut montrer que $T_\mu(n)=F_1$. Calculons d'abord $t[n,\,2^{n-1}]$. On a (lemmes 26 et 27, i) :

$$t[n,\,2^{n-1}](a)=2^{-2}\tilde{\gamma}(2^{n-1})\mu(2^{n-1})$$
$$\times[(1+i)\eta(\mu^{-1}\chi_{-2^{n-1}},\,a2^{1-n})+(1-i)\eta(\mu^{-1}\chi_{2^{n-1}},\,a2^{1-n})].$$

Comme n est impair, $\tilde{\gamma}(2^{n-1})=1$, $\chi_{2^{n-1}}=1$, d'où (égalité 15) :

$$t[n,\, 2^{n-1}](a)=2^{-2}\mu(2^{n-1})[(1+i\mu(-1))\eta(\chi_{-1},\, a2^{1-n})+(1-i\mu(-1))\eta(1,\, a2^{1-n})],$$

$$4\mu(2^{1-n})\,t[n,\, 2^{n-1}](a)=\begin{cases} 1-i\mu(-1) & \text{si } v_2(a)\geqq n-1,\\ -(1-i\mu(-1)) & \text{si } v_2(a)=n-2,\\ \mu(-1)\chi_{-1}(a)(1-i\mu(-1)) & \text{si } v_2(a)=n-3,\\ 0, & \text{si } v_2(a)\leqq n-4.\end{cases}$$

Posons :

$$t=4\mu(2^{1-n})(1-i\mu(-1))^{-1}\,t[n,\, 2^{n-1}]-t_1+2\underline{\gamma}^0[n-3].$$

Alors :

$$t(a)=\begin{cases} 0 & \text{si } v_2(a)>n-4, \quad \text{ou } v_2(a)<0,\\ -1 & \text{si } 0\leqq v_2(a)\leqq n-4,\end{cases}$$

donc $t\in\mathrm{F}$, et $t[n,\, 2^{n-1}]\in\mathrm{F}_1$. La fonction $t[n,\, 2^n]$ est par construction combinaison linéaire de $t[2,\, 2^2]$ et des fonctions $t[n,\, c]$, $2\leqq v_2(c)\leqq n-1$. Pour $n=3$, cela démontre l'inclusion $\mathrm{T}_\mu(n)\subset\mathrm{F}_1$ (prop. 12, 4). Pour $n\geqq 5$, soit $c\in\mathrm{I}(n)$, $1\leqq v_2(c)\leqq n-2$. Il reste à montrer que $t[n,\, c]\in\mathrm{F}_1$. La fonction $t[n,\, c]$ vérifie en tout cas les conditions (i) et (ii) de la définition de F. Si $v_2(c)\leqq n-3$, $t[n,\, c]$ est combinaison linéaire de fonctions :

$$a\mapsto\eta(\nu_i,\, ac^{-1}),$$

pour $\nu_i^2=1$ (lemme 26). Ces fonctions vérifient (iii) et (iv), donc $t[n,\, c]\in\mathrm{F}$. Si $v_2(c)=n-2$, d'après la définition de $t[n,\, c]$ et les lemmes 26 et 27, ii, $t[n,\, c]$ est combinaison linéaire des fonctions :

$$a\mapsto\eta(\mu^{-1}\chi_c,\, ac^{-1}),\qquad a\mapsto\eta(\mu^{-1}\chi_{-c},\, ac^{-1}).$$

Or $v_2(c)$ est impair, $n(\mu^{-1}\chi_c)=n(\mu^{-1}\chi_{-c})=3$. Ces fonctions sont à support dans $2^{n-5}\mathbb{Z}_2^\times$, elles vérifient trivialement (iii) et (iv). Donc $t[n,\, c]\in\mathrm{F}$. On a donc l'inclusion $\mathrm{T}_\mu(n)\subset\mathrm{F}_1$. On obtient l'égalité de ces espaces en comparant leurs dimensions.

Soit maintenant $n\geqq 4$, n pair. Soit F' l'espace des fonctions t sur $\mathbb{Q}_2^\times$ telles que pour $a\in\mathbb{Q}_2^\times$ et $\alpha\in\mathbb{Z}_2^\times$:

(i) $t(a)=0$, si $v_2(a)<0$;

(ii) $t(a\alpha^2)=t(a)$;

(iii) $t(a\alpha)=t(a)$, si $v_2(a)=n-5$, $\alpha\in 1+4\mathbb{Z}_2$;

(iv) $t(a\alpha)=t(a)$, si $a=-2^{n-4}\chi_0(-1)$, $\alpha\in 1+4\mathbb{Z}_2$;

(v) $t(a\alpha)=t(a)$, si $v_2(a)=n-3$;

(vi) $t(a)$ est constant pour $v_2(a)\geqq n-2$.

Soit F'_1 l'espace engendré par F' et t_2. On vérifie encore que

$$\mathrm{F}'_1=\oplus\overline{\mathrm{U}}(e),\qquad 2\leqq e\leqq n,$$

et il faut montrer que $T_\mu(n)=F'_1$. Soit $c\in I(n)$. La fonction $t[n, c]$ vérifie en tout cas (i) et (ii). Si $1\leqq v_2(c)\leqq n-3$, $t[n, c]$ est combinaison linéaire de fonctions :

$$a\mapsto \eta(\nu_i, ac^{-1}),$$

pour $\nu_i^2=1$ (lemme 26). Ces fonctions vérifient les conditions (iii) à (vi), et $t[n, c]\in F'$. Si $v_2(c)=n-2$, $t[n, c]$ est combinaison linéaire des fonctions :

$$a\mapsto \eta(\mu^{-1}\chi_c, ac^{-1}), \qquad a\mapsto \eta(\mu^{-1}\chi_{-c}, ac^{-1})$$

(lemmes 26 et 27, ii). Or $v_2(c)$ est pair, $n(\mu^{-1}\chi_c)\leqq 2$, $n(\mu^{-1}\chi_{-c})\leqq 2$. Ces fonctions vérifient les conditions (iii) à (vi), et $t[n, c]\in F'$. Si $v_2(c)=n-1$:

$$t[n, 2^{n-1}](a)=2^{-2}\tilde{\gamma}(2^{n-1})\mu(2^{n-1})$$
$$\times[(1+i)\eta(\mu^{-1}\chi_{-2^{n-1}}, a2^{1-n})+(1-i)\eta(\mu^{-1}\chi_{2^{n-1}}, a2^{1-n})]$$

(lemmes 26 et 27, i) :

$$t[n, 2^{n-1}](a)=2^{-2}\tilde{\gamma}(2^{n-1})\mu(2^{n-1})$$
$$[(1+i\mu(-1))\eta(\chi_{-2}, a2^{1-n})+(1-i\mu(-1))\eta(\chi_2, a2^{1-n})]$$

(égalité 15, et parité de n). Donc $t[n, 2^{n-1}]$ est à support dans $2^{n-4}\mathbb{Z}_2^\times$, et vérifie (iii), (v), (vi). Si $v_2(a)=n-4$, d'après II, 7 :

$$t[n, 2^{n-1}](a)=2^{-5/2}\tilde{\gamma}(2^{n-1})\mu(2^{n-1})(1-i\mu(-1))\chi_2(a)(1+\mu(-1)\chi_{-1}(a)).$$

Si $a\in-\chi_0(-1)2^{n-4}(1+4\mathbb{Z}_2)$, $\chi_{-1}(a)=-\chi_0(-1)=-\mu(-1)$, donc $t[n, 2^{n-1}]\ (a)=0$. Donc $t[n, 2^{n-1}]$ vérifie (iv) et appartient à F'. Comme toujours, $t[n, 2^n]$ est combinaison linéaire de $t[2, 2^2]$ et de fonctions $t[n, c]$, $2\leqq v_2(c)\leqq n-1$. On obtient $T_\mu(n)\subset F'_1$, puis l'égalité.

Cas 9. — On a $\mu=|.|^{1/2}\chi_\xi$. Les calculs du cas 8, *a*, déterminent $T_\mu(n)$. On doit chercher les fonctions de l'espace $\overline{\oplus U}(e)$, $2\leqq e\leqq n$, décrit au 8, *a*, qui s'annulent sur $\xi\mathbb{Q}_2^{\times 2}$. Le nombre $v_2(\xi)$ est pair car $n(\mu)\leqq 2$. Je dis que $t_2\in T_\mu^S(2)$. En effet, soit $a\in\xi\mathbb{Q}_2^{\times 2}$. Alors :

$$(a, -1)=(\xi, -1)=\chi_\xi(-1)=\chi_0(-1),$$
$$(2, a)=(2, \xi)=\chi_\xi(2)=\mu(2)\ 2^{1/2},$$
$$\mu(4)=2^{-1},$$

et $t_2(a)=0$ d'après sa formule de définition. Pour $n>2$, on détermine facilement les autres fonctions de $T_\mu^S\ (n)$, en remarquant que si $a\in\xi\mathbb{Q}_2^{\times 2}$, $a=2^{2m}b$, avec $b\in\mathbb{Z}_2^\times$, $b\in\chi_0(-1)+4\mathbb{Z}_2$ [car $(b, -1)=\chi_0(-1)$].

Cas 10. — Pour $n=\tilde{n}=3$, $T_\mu(n)$ est engendré par $t[3, 1]$, $t[3, 2]$, $t[3, 2^3]$ (prop. 12,5). On a $t[3, 1]=\tilde{\gamma}(-1)\mu(-1)t_1$ (lemme 26). Pour $a\in\mathbb{Q}_2^\times$:

$$t[3, 2](a)=2^{-1}\tilde{\gamma}(-2)\mu(-2)\eta(1, -a/2)$$

(lemmes 26 et 27, iii), et $\tilde{\gamma}(-2)=\tilde{\gamma}(-1)$, d'où :

$$t[3,2](a)=\begin{cases} 2^{-1}\tilde{\gamma}(-1)\mu(-2) & \text{si } v_2(a)\geqq 1, \\ -2^{-1}\tilde{\gamma}(-1)\mu(-2) & \text{si } v_2(a)=0, \\ 0 \quad \text{si } v_2(a)<0. \end{cases}$$

D'où :

$$t[3,2]=2^{-1}\tilde{\gamma}(-1)\mu(-2)(t_1-2\underline{\gamma}''[0]).$$

Comme $n(\mu)=3$, on a $\mu=\chi_2$ ou $\mu=\chi_{-2}$ sur $\mathbb{Z}_2^\times$. En examinant les deux cas possibles, on vérifie que :

$$(1+i)\eta(\mu^{-1}\chi_c,a)+(1-i)\eta(\mu^{-1}\chi_{-c},a)$$
$$=(1+i\mu(-1))\eta(\chi_{2c},a)+(1-i\mu(-1))\eta(\chi_{-2c},a),$$

pour tous a, $c\in\mathbb{Q}_2^\times$. Alors (lemmes 26, 27, *i*) :

$$t[3,2^3](a)=\sum_{h\geq 0}^{\infty} 2^{-2}\tilde{\gamma}(2^{h+3})\mu(2^{h+3})$$
$$\times[(1-i\mu(-1))\eta(\chi_{2^h},a2^{-h-3})+(1+i\mu(-1))\eta(\chi_{-2^h},a2^{-h-3})];$$

- si $v_2(a)=0$, tous les termes s'annulent, $t[3,2^3](a)=0$;
- si $v_2(a)=1$, il reste le terme en $h=0$ contenant $\eta(\chi_{-1},a2^{-3})$, et les termes en $h=1$:

$$t[3,2^3](a)=2^{-2}\mu(2^3)[(1-i\mu(-1))\eta(\chi_{-1},a2^{-3})$$
$$+\mu(2)[(1-i\mu(-1))\eta(\chi_2,a2^{-4})+(1+i\mu(-1))\eta(\chi_{-2},a2^{-4})]]$$
$$=2^{-2}\mu(2^3)(1-i\mu(-1))\mu(-1)\chi_{-1}(a)$$
$$\times[1+\chi_2(a)\mu(2)2^{-1/2}\times(1+\chi_{-1}(a)\mu(-1))]$$

(II, 7). Si $\chi_{-1}(a)=\mu(-1)$, on obtient :

$$t[3,2^3](a)=2^{-2}\mu(2^3)(1-i\mu(-1))(1+\chi_2(a)\mu(2)2^{1/2}),$$

si $\chi_{-1}(a)=-\mu(-1)$, on obtient :

$$t[3,2^3](a)=-2^{-2}\mu(2^3)(1-i\mu(-1)).$$

Dans le cas a, i.e. $\mu(2)\neq\mu^{-1}(2)$, on peut diagonaliser $\tilde{T}'_2$ dans $T_\mu(3)$. Posons :

$$t'_2=\frac{4\mu^{-1}(4)(\mu(2)-\mu^{-1}(2))}{(2-\mu(4))(1-i\mu(-1))}t[3,2^3]$$
$$+\frac{2i\mu^{-1}(-4)(\mu(2)-\mu^{-1}(2))}{(2-\mu(4))}t[3,2]+\frac{i\mu^{-1}(-4)}{2-\mu(4)}t[3,1].$$

Grâce à la proposition 13, on vérifie que $\tilde{T}'_2 t'_2 = 2\tilde{\gamma}(2)\mu(2)t'_2$. Les formules ci-dessus permettent de calculer $t'_2(a)$ pour $v_2(a)=0$ ou 1. On obtient $t'_2(a)=t_2(a)$, donc $t'_2=t_2$. Comme $T_\mu(3)$ est engendré par $t[3,1]$, $t[3,2]$ et t'_2, on obtient l'égalité $T_\mu(3)=\overline{\overline{U}}(3)$.

Dans le cas b, i.e. $\mu(2)=\mu^{-1}(2)$, $\tilde{T}'_2$ est unipotent dans $T_\mu(3)$. Posons :

$$t'_2 = \frac{4i\mu(-2)}{1+i\mu(-1)}t[3,2^3]+2i\mu(-2)t[3,2]+i\mu(-1)t[3,1].$$

On vérifie que $\tilde{T}'_2 t'_2 = 2\tilde{\gamma}(2)\mu(2)(t'_2+t_1)$, puis $t'_2=t_2$. Alors $T_\mu(3)=\overline{\overline{U}}(3)$.

Soit $n\geqq 4$. Si n est impair, on vérifie que $\oplus\overline{U}(e)$, $3\leqq e\leqq n$, est égal à l'espace engendré par t_2 et l'espace F' décrit au cas 8. Si n est pair, il est égal à l'espace engendré par t_2, $\gamma^0[n-3]$ et l'espace F décrit au cas 8. Les mêmes arguments que dans le cas 8 démontrent l'égalité :

$$T_\mu(n)=\oplus\overline{U}(e), \qquad 3\leqq e\leqq n.$$

[bien sûr, on a ici $n(\mu)=3$, contrairement au cas 8. Mais, par rapport à ce cas, on a échangé les cas n pair et n impair, et les arguments restent valables].

Cas 11. — On déduit les résultats de ceux du cas 10 de la même façon qu'on a déduit les résultats du cas 9 de ceux du cas 8. □

VII. — Formule de passage dans le cas de la serie principale

On se place encore sur un corps local $\mathbb{Q}_p$.

1. Soient ρ une représentation admissible, unitaire, irréductible de $Z\backslash G$, $\mathscr{W}$ son modèle de Whittaker relatif au caractère ψ, ν un élément de $\mathbb{Q}_p^\times$, $\rho_\nu=\rho\otimes\chi_\nu$. On utilise les notations et définitions de IV. On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

(H_ν) 1. *$\tilde{\rho}_\nu(\rho)$ est irréductible.*

2. *Il existe un caractère μ de $\mathbb{Q}_p^\times$ tel que $\mu^2\neq|.|$ (resp. $\mu^2=|.|$) et $\tilde{\rho}_\nu(\rho)\sim\tilde{\pi}_\mu$ [resp. $\tilde{\rho}_\nu(\rho)\sim\tilde{\sigma}_\mu$].*

On supposera que $|\mu|_{\mathbb{C}}=|.|_p^r$, avec $r\geqq 0$. La deuxième hypothèse implique $\rho\sim\pi(\mu,\mu^{-1})$ [resp. $\rho\sim\sigma(\mu,\mu^{-1})$, et $\mu\neq|.|^{1/2}\chi_\nu$] [W], prop. 18. On a fixé en IV, 1, diverses mesures de Haar. Fixons les données suivantes :

(D_ν)
1. un élément $W^0\in\mathscr{W}$, non nul;
2. pour tout $\xi\in\mathbb{Q}_p^\times(\rho_\nu)-\mathbb{Q}_p^{\times 2}$, un élément $W_\nu^\xi\in\mathscr{W}_\nu$, non nul, invariant par O_ξ (sous ρ_ν).

Attention : contrairement à ce que pourrait faire penser la notation, W_ν^ξ n'est pas le produit par $\chi_\nu\circ\det$ d'un élément fixe W^ξ de $\mathscr{W}$.

La donnée 2 détermine des fonctions $u(W_\nu,\xi)$ pour tout $W\in\mathscr{W}$ (lemme 5).

Soit T le modèle T_μ (ou T_μ^S) de la représentation $\bar{\pi}_\mu$ (ou $\bar{\sigma}_\mu$) (VI, 1). On fixe un isomorphisme $i_v : T_v(\rho) \to T$. Si $f \in \mathscr{S}(H)$, on pose :

$$t[f] = [i_v \circ j_v(W^0)](f).$$

Il existe un scalaire $\lambda(v) \neq 0$, et, si $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times(\rho_v) - \mathbb{Q}_p^{\times 2}$, il existe un scalaire $\lambda(v, \xi) \neq 0$, tels que pour tout $f \in \mathscr{S}(H)$:

$$\int_{D\backslash G} R(g) f(x_1') u(W_v^0)(g)\, dg = \lambda(v)\, t[f](v),$$

$$\int_{O_\xi\backslash G} R(g) f(x_\xi) u(W_v^0, \xi)(g)\, dg = \lambda(v, \xi)\, t[f](v\xi),$$

(assertion 11). On définit les constantes suivantes :

(*a*) on munit H de la mesure de Haar dx autoduale pour ψ et q. Il existe une fonction $c : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $f \in \mathscr{S}(H)$:

$$\int_H f(x)\, dx = \int_{\mathbb{Q}_p} \int_{O_\xi\backslash G} R(g) f(x_\xi)\, dg\, c(\xi)\, d\xi.$$

On peut supposer c localement constante en définissant convenablement les mesures d_ξ;

(*b*) soient $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times$, $g \in G$, tel que $g = \underline{\underline{a}}nh$, avec $h \in O_\xi$. Il existe une constante $\delta(\xi)$ telle que :

$$dg = \delta(\xi)\, d^\times a\, dn\, d_\xi h;$$

(*c*) soit $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times(\rho_v) - \mathbb{Q}_p^{\times 2}$, on pose :

$$\omega_v(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mu\chi_v(a)\, |a|^{-1/2}\, W_v^\xi(\underline{\underline{a}})\, da$$

(on montre que cette intégrale converge [G], p. 1, 36).

Rappelons que si μ' est un caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$, on note $L(\mu', s)$, $\varepsilon(\mu', s)$, sa fonction L et son facteur ε.

PROPOSITION 15. — *Soit* $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times(\rho_v) - \mathbb{Q}_p^{\times 2}$:

(i) $\omega_v(\xi) \neq 0$;

(ii) *on a l'égalité :*

$$\lambda(v, \xi)\lambda(v)^{-1} = (1 - 1/p)\,|2\xi|\,\mu\chi_v(-2)\,[c(\xi)\delta(\xi)\omega_v(\xi)]^{-1}\,\varepsilon(\mu\chi_v, 1/2) \times L(\mu\chi_v, 1/2)\, L(\mu^{-1}\chi_v, 1/2)^{-1}.$$

La démonstration occupe le paragraphe suivant :

2. Si $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times - \mathbb{Q}_p^{\times 2}$, on note $m(\xi)$ la mesure de $Z\backslash O_\xi$.

LEMME 28. — *Soient* $\xi, \alpha \in \mathbb{Q}_p^\times$:

(i) *on a les égalités :*

$$x_{\xi\alpha^2} = \alpha \underline{\underline{\alpha}}^{-1} x_\xi \underline{\underline{\alpha}}, \qquad O_{\xi\alpha^2} = \underline{\underline{\alpha}}^{-1} O_\xi \underline{\underline{\alpha}}.$$

Supposons $\xi \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$:

(ii) *on a les égalités :*

$$c(\xi\alpha^2) = m(\xi\alpha^2)\, m(\xi)^{-1} |\alpha|\, c(\xi), \qquad \delta(\xi\alpha^2) = m(\xi)\, m(\xi\alpha^2)^{-1} |\alpha|\, \delta(\xi).$$

Supposons $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times(\rho_\nu) - \mathbb{Q}_p^{\times 2}$:

(iii) *il existe une constante* $b(\xi\alpha^2, \xi)$ *telle que :*

$$W_\nu^{\xi\alpha^2} = b(\xi\alpha^2, \xi)\, \rho_\nu(\underline{\underline{\alpha}}^{-1})\, W_\nu^\xi ;$$

(iv) *pour tous* $W \in \mathscr{W}$, $g \in G$, *on a l'égalité :*

$$u(W_\nu, \xi)(\underline{\underline{\alpha}}\, g) = m(\xi)\, m(\xi\alpha^2)^{-1}\, b(\xi\alpha^2, \xi)\, u(W_\nu, \xi\alpha^2)(g);$$

(v) *on a l'égalité :*

$$\lambda(\nu, \xi\alpha^2) = \mu^{-1} \chi_\nu(\alpha)\, |\alpha|^{-1/2}\, b(\xi\alpha^2, \xi)^{-1}\, \lambda(\nu, \xi).$$

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Donc $\rho_\nu(\underline{\underline{\alpha}}^{-1})\, W_\nu^\xi$ est invariant par $O_{\xi\alpha^2}$. L'unicité d'un tel vecteur implique (iii). Le (ii) résulte de (i) et d'un calcul de changement de variables dans les définitions de $c(\xi)$ et $\delta(\xi)$. Posons $\eta = \xi\alpha^2$. Pour (iv), soit $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$ tel que $W_\nu^\xi(\underline{\underline{\lambda}}) \neq 0$. Alors (lemme 5) :

$$u(W_\nu, \xi)(\underline{\underline{\alpha}}\, g) = W_\nu^\xi(\underline{\underline{\lambda}})^{-1} \int_{Z \backslash O_\xi} W_\nu(\underline{\underline{\lambda}}\, h\, \underline{\underline{\alpha}}\, g)\, d_\xi h.$$

Posons $h' = \underline{\underline{\alpha}}^{-1} h\, \underline{\underline{\alpha}} \in O_{\xi\alpha^2}$. Alors $d_\xi h = m(\xi)\, m(\eta)^{-1}\, d_\eta h'$:

$$\begin{aligned} u(W_\nu, \xi)(\underline{\underline{\alpha}}\, g) &= m(\xi)\, m(\eta)^{-1}\, W_\nu^\xi(\underline{\underline{\lambda}})^{-1} \int_{Z \backslash O_\eta} W_\nu(\underline{\underline{\lambda\alpha}}\, h'\, g)\, d_\eta h', \\ &= m(\xi)\, m(\eta)^{-1}\, W_\nu^\xi(\underline{\underline{\lambda}})^{-1}\, W_\nu^\eta(\underline{\underline{\lambda\alpha}})\, u(W_\nu, \eta)(g), \end{aligned}$$

et (iv) résulte de (iii). Pour (v), soit $f \in \mathscr{S}(H)$, $f' = r_{\psi'}(d(\alpha)) f$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda(\nu, \xi)\, t[f'](\nu\xi) &= \int_{O_\xi \backslash G} R(g)\, f'(x_\xi)\, u(W_\nu^0, \xi)(g)\, dg \\ &= \tilde{\gamma}(\alpha)\, \chi_\nu(\alpha)\, |\alpha|^{3/2} \int_{O_\xi \backslash G} R(g)\, f(\alpha x_\xi)\, u(W_\nu^0, \xi)(g)\, dg \\ &= \tilde{\gamma}(\alpha)\, \chi_\nu(\alpha)\, |\alpha|^{3/2} \int_{O_\eta \backslash G} R(\underline{\underline{\alpha}}^{-1} g)\, f(x_\eta)\, u(W_\nu^0, \xi)(g)\, dg, \end{aligned}$$

d'après (i). Posons $h=\underline{\underline{\alpha}}^{-1} g \in \mathrm{O}_\eta \backslash \mathrm{G}$. On a $dg=m(\eta)m(\xi)^{-1}\,dh$:

$$\lambda(\mathrm{v},\xi)\,t[f'](\mathrm{v}\xi)=m(\eta)m(\xi)^{-1}\tilde{\gamma}(\alpha)\chi_{\mathrm{v}}(\alpha)|\alpha|^{3/2}\int_{\mathrm{O}_\eta\backslash\mathrm{G}}\mathrm{R}(h)f(x_\eta)\,u(\mathrm{W}^0_{\mathrm{v}},\xi)(\underline{\underline{\alpha}}\,h)\,dh$$

$$=b(\eta,\xi)\tilde{\gamma}(\alpha)\chi_{\mathrm{v}}(\alpha)|\alpha|^{3/2}\int_{\mathrm{O}_\eta\backslash\mathrm{G}}\mathrm{R}(h)f(x_\eta)\,u(\mathrm{W}^0_{\mathrm{v}},\eta)(h)\,dh,$$

d'après (iv), d'où :

$$\lambda(\mathrm{v},\xi)\,t[f'](\mathrm{v}\xi)=b(\eta,\xi)\lambda(\mathrm{v},\eta)\tilde{\gamma}(\alpha)\chi_{\mathrm{v}}(\alpha)|\alpha|^{3/2}\,t[f](\mathrm{v}\eta).$$

D'autre part (lemme 19) :

$$t[f'](\mathrm{v}\xi)=\tilde{\rho}_\mu(d(\alpha))\,t[f](\mathrm{v}\xi)=\tilde{\gamma}(\alpha)|\alpha|\mu(\alpha)^{-1}\,t[f](\mathrm{v}\eta),$$

d'où (v) par comparaison de ces égalités. □

LEMME 29. — (i) *Soit* $\mathrm{W}\in\mathscr{W}'$. *Il existe une unique fonction* $\mathrm{F}(\mathrm{W}_{\mathrm{v}})$ *définie sur* $\mathrm{H}-\{x;\ q(x)=0\}$, *localement constante, intégrable sur tout compact de* H, *telle que pour tout* $f\in\mathscr{S}(\mathrm{H})$, *on ait l'égalité :*

$$j_{\mathrm{v}}(\mathrm{W})(f)(w)=\int_{\mathrm{H}} f(y)\,\mathrm{F}(\mathrm{W}_{\mathrm{v}})(y)\,dy;$$

(ii) *si* $\xi\in\mathbb{Q}_p^\times(\rho_{\mathrm{v}})-\mathbb{Q}_p^{\times 2}$, *pour tous* $\mathrm{W}\in\mathscr{W}'$, $g\in\mathrm{G}$, *on a l'égalité :*

$$\mathrm{F}(\mathrm{W}_{\mathrm{v}})(g^{-1}x_\xi g)=e_{\mathrm{v}}(\xi)\,u(\mathrm{W}_{\mathrm{v}},\xi)(g),$$

où $e_{\mathrm{v}}(\xi)=(1-1/p)^{-1}|\mathrm{v}|^{1/2}\gamma(\mathrm{v})\delta(\xi)|2\xi|^{-1}\,\mathrm{W}^\xi_{\mathrm{v}}(\underline{\underline{-2\mathrm{v}\xi}})$.

Démonstration. — C'est la proposition 16 de [W], sauf que dans cette proposition, on n'avait pas précisé la valeur de $e_{\mathrm{v}}(\xi)$. Reprenons le raisonnement. Il suffit de considérer le cas $\mathrm{W}_{\mathrm{v}}=\mathrm{W}^\xi_{\mathrm{v}}$. Soit $f\in\mathscr{S}(\mathrm{H})$, posons $\mathrm{I}=j_{\mathrm{v}}(\mathrm{W}^\xi_{\mathrm{v}}\times(\chi_{\mathrm{v}}\circ\det))(f)(w)$. Par définition :

$$\mathrm{I}=\int_{\mathrm{Z}\backslash\mathrm{G}} r_{\psi^{\mathrm{v}}}(w)\mathrm{R}(g)f(x'_1)\,\mathrm{W}^\xi_{\mathrm{v}}(g)\,dg$$

$$=\delta(\xi)\int_{\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p\times\mathrm{Z}\backslash\mathrm{O}_\xi} r_{\psi^{\mathrm{v}}}(w)\mathrm{R}(\underline{n}h)f(x'_1)\,\mathrm{W}^\xi_{\mathrm{v}}(\underline{\underline{a}}\,\underline{n}h)\,d^\times a\,dn\,d_\xi h.$$

Posons :

$$f_\xi=\int_{\mathrm{Z}\backslash\mathrm{O}_\xi}\mathrm{R}(h)f\,d_\xi h.$$

Par invariance de W_ν^ξ sous O_ξ :

$$I=\delta(\xi)\int_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p} r_{\psi^\nu}(w)\,R(\underline{n})\,f_\xi(x'_1)\,W_\nu^\xi(\underline{\underline{an}})\,d^\times a\,dn,$$

$$I=\delta(\xi)\gamma(\nu)|\nu|^{3/2}\int_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p}\int_H f_\xi(y)\,\psi(\nu\,q(\underline{n}^{-1}x'_1\,\underline{n},y))\,dy\;W_\nu^\xi(\underline{\underline{an}})\,d^\times a\,dn.$$

En considérant l'intégrale sur $\mathbb{Q}_p$ comme une limite d'intégrales sur $p^{-m}\mathbb{Z}_p$, on obtient :

$$I=\delta(\xi)\gamma(\nu)|\nu|^{3/2}\int_H f_\xi(y)\,F_1(y)\,dy,$$

où :

$$F_1(y)=\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{Q}_p^\times \times p^{-m}\mathbb{Z}_p} W_\nu^\xi(\underline{\underline{an}})\,\psi(\nu\,q(\underline{n}^{-1}x'_1\,\underline{n},y))\,d^\times a\,dn.$$

Par définition de f_ξ :

$$I=\delta(\xi)\gamma(\nu)|\nu|^{3/2}\int_H\int_{Z\backslash O_\xi} f(h^{-1}yh)\,F_1(y)\,d_\xi h\,dy=\int_H f(y)\,F(W_\nu^\xi)(y)\,dy,$$

avec :

$$F(W_\nu^\xi)(y)=\delta(\xi)\gamma(\nu)|\nu|^{3/2}\int_{Z\backslash O_\xi} F_1(hyh^{-1})\,d_\xi h.$$

Pour $y=x_\xi$, on obtient :

$$F(W_\nu^\xi)(x_\xi)=\delta(\xi)\gamma(\nu)|\nu|^{3/2}\,m(\xi)\,F_1(x_\xi).$$

Calculons $F_1(x_\xi)$. On a :

$$W_\nu^\xi(\underline{\underline{an}})=\psi(an)\,W_\nu^\xi(\underline{\underline{a}}),$$

$$q(\underline{n}^{-1}x'_1\,\underline{n},\,x_\xi)=2\,n\,\xi,$$

$$\int_{p^{-m}\mathbb{Z}_p}\psi(an+2\nu\xi\,n)\,dn=\begin{cases}p^m & \text{si}\quad a\in -2\nu\xi+p^m\mathbb{Z}_p,\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned}F_1(x_\xi)&=\lim_{m\to\infty}p^m\int_{a\in -2\nu\xi+p^m\mathbb{Z}_p}W_\nu^\xi(\underline{\underline{a}})\,d^\times a\\
&=\lim_{m\to\infty}p^m\,W_\nu^\xi(\underline{\underline{-2\nu\xi}})\,\mathrm{mes}(-2\nu\xi+p^m\mathbb{Z}_p)\\
&=W_\nu^\xi(\underline{\underline{-2\nu\xi}})\lim_{m\to\infty}p^m(1-1/p)^{-1}\,p^{-m}\,|2\nu\xi|^{-1}\\
&=(1-1/p)^{-1}\,|2\nu\xi|^{-1}\,W_\nu^\xi(\underline{\underline{-2\nu\xi}}),\end{aligned}$$

et :

$$\mathrm{F}(\mathrm{W}_{\nu}^{\xi})(x_{\xi})=\delta(\xi)\gamma(\nu)|\nu|^{3/2}m(\xi)(1-1/p)^{-1}|2\nu\xi|^{-1}\mathrm{W}_{\nu}^{\xi}(\underline{\underline{-2\nu\xi}}).$$

D'autre part, par définition (lemme 5) :

$$u(\mathrm{W}_{\nu}^{\xi},\xi)(1)=m(\xi).$$

En comparant ces deux expressions, on obtient la valeur de $e_{\nu}(\xi)$. □

On a défini une fonction de Bessel $\mathrm{J}(b, a)$ (VI, 1).

LEMME 30. — *Soit* $\xi\in\mathbb{Q}_p^{\times}(\rho_{\nu})-\mathbb{Q}_p^{\times 2}$. *Pour tout* $\alpha\in\mathbb{Q}_p^{\times}$, *on a l'égalité :*

$$\mu\chi_{\nu}(\alpha)|\alpha|^{-1/2}\mathrm{W}_{\nu}^{\xi}(\underline{\underline{-2\nu\xi\alpha}})\lambda(\nu,\xi)$$
$$=(1-1/p)^2\gamma(\nu)^{-1}|4\nu|^{1/2}|\xi|c(\xi)^{-1}\delta(\xi)^{-1}\mu(\alpha^2)\mathrm{J}(\nu\xi\alpha^2,\nu)\lambda(\nu).$$

Démonstration. — Soit $f\in\mathscr{S}(\mathrm{H})$. Pour $\eta\in\mathbb{Q}_p$, posons :

$$\mathrm{I}(\eta)=j_{\nu}(\mathrm{W}^0)(f)(u\,\underline{\eta}).$$

On a :

$$\mathrm{I}(\eta)=\int_{\mathrm{H}} r_{\psi^{\nu}}(\underline{\eta})f(y)\mathrm{F}(\mathrm{W}_{\nu}^{0})(y)\,dy$$
$$=\int_{\mathbb{Q}_p}\int_{\mathrm{O}_b\backslash\mathrm{G}} r_{\psi^{\nu}}(\underline{\eta})\mathrm{R}(g)f(x_b)\mathrm{F}(\mathrm{W}_{\nu}^{0})(g^{-1}x_b g)\,dg\,c(b)\,db$$
$$=\int_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{F}_1(b)\psi(\nu\eta b)\,db,$$

où :

$$\mathrm{F}_1(b)=c(b)\int_{\mathrm{O}_b\backslash\mathrm{G}}\mathrm{R}(g)f(x_b)\mathrm{F}(\mathrm{W}_{\nu}^{0})(g^{-1}x_b g)\,dg.$$

D'autre part :

$$\mathrm{I}(\eta)=\lambda(\nu)\tilde{\rho}_{\mu}(u\,\underline{\eta})t[f](\nu)=(1-1/p)\lambda(\nu)\int_{\mathbb{Q}_p}t[f](b)\psi(\eta b)\mathrm{J}(b,\nu)\,db$$

(lemme 19),

$$\mathrm{I}(\eta)=\int_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{F}_2(b)\psi(\nu\eta b)\,db,$$

où :

$$\mathrm{F}_2(b)=(1-1/p)|\nu|\lambda(\nu)t[f](\nu b)\mathrm{J}(\nu b,\nu).$$

En comparant ces deux expressions de $\mathrm{I}(\eta)$, on obtient, par transformation de Fourier, $\mathrm{F}_1=\mathrm{F}_2$ sur $\mathbb{Q}_p^{\times}$. Pour $b=\xi\alpha^2$, on a (lemme 29) :

$$\mathrm{F}_1(b)=c(b)e_{\nu}(b)\int_{\mathrm{O}_b\backslash\mathrm{G}}\mathrm{R}(g)f(x_b)u(\mathrm{W}_{\nu}^{0},b)(g)\,dg=c(b)e_{\nu}(b)\lambda(\nu,b)t[f](\nu b).$$

En comparant avec l'expression de $F_2(b)$, et compte tenu du fait qu'on peut trouver f tel que $t[f](\nu b)\neq 0$, on obtient :

$$c(b)e_\nu(b)\lambda(\nu, b)=(1-1/p)|\nu|\lambda(\nu)J(\nu b,\nu).$$

Il suffit maintenant d'utiliser les formules du lemme 29 exprimant $e_\nu(b)$, et du lemme 28 exprimant $\lambda(\nu, b)$, W_ν^b, etc., en fonction de $\lambda(\nu,\xi)$, W_ν^ξ, etc., pour obtenir la formule de l'énoncé. □

LEMME 31. — *Soit* $\xi\in\mathbb{Q}_p^\times(\rho_\nu)-\mathbb{Q}_p^{\times 2}$. *La fonction* $\alpha\mapsto\mu(\alpha^2)J(\nu\xi\alpha^2,\nu)$ *est intégrable sur* $\mathbb{Q}_p$. *On a l'égalité :*

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\mu(\alpha^2)J(\nu\xi\alpha^2,\nu)\,d\alpha=(1-1/p)^{-1}|\nu|^{-1}|2\xi|^{-1/2}\gamma(\nu)\mu^{-1}\chi_\nu(\nu\xi)$$
$$\times\varepsilon(\mu\chi_\nu, 1/2)\,L(\mu\chi_\nu, 1/2)\,L(\mu^{-1}\chi_\nu, 1/2)^{-1}.$$

Démonstration. — Par changement de variable dans la définition de J, on a l'égalité :

$$\mu(\alpha^2)J(\nu\xi\alpha^2,\nu)=J(\nu\xi,\nu\alpha^2).$$

D'après la démonstration de [W], lemme 8, cette fonction est intégrable sur $\mathbb{Q}_p$. Soit I la valeur de son intégrale. Alors :

$$I=\lim_{m\to\infty}\int_{p^{-m}\mathbb{Z}_p}J(\nu\xi,\nu\alpha^2)\,d\alpha=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times}\tilde\gamma(u)\mu^{-1}(u)\psi(\nu\xi u^{-1})\lim_{m\to\infty}\int_{p^{-m}\mathbb{Z}_p}\psi(\nu\alpha^2 u)\,d\alpha\,d^\times u.$$

Par définition du facteur de Weil :

$$\lim_{m\to\infty}\int_{p^{-m}\mathbb{Z}_p}\psi(\nu\alpha^2 u)\,d\alpha=|2\nu u|^{-1/2}\gamma(\nu u),$$
$$\tilde\gamma(u)\gamma(\nu u)=\gamma(\nu)\chi_\nu(u),$$

d'où :

$$I=\gamma(\nu)|2\nu|^{-1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times}\mu\chi_\nu(u)\psi(\nu\xi u)|u|^{1/2}\,d^\times u$$
$$=\gamma(\nu)|2\xi|^{-1/2}|\nu|^{-1}\mu^{-1}\chi_\nu(\nu\xi)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times}\mu\chi_\nu(u)|u|^{1/2}\psi(u)\,d^\times u.$$

Par définition des fonctions L et ε ([T], p. 322 et 346), on a l'égalité :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times}\mu\chi_\nu(u)|u|^{1/2}\psi(u)\,d^\times u=(1-1/p)^{-1}\varepsilon(\mu\chi_\nu, 1/2)L(\mu\chi_\nu, 1/2)L(\mu^{-1}\chi_\nu, 1/2)^{-1},$$

on en déduit l'égalité de l'énoncé. □

Intégrons l'égalité du lemme 30 sur $\mathbb{Q}_p$. Le membre de droite devient (lemme 31) :

$$(1-1/p)|2\xi|^{1/2}|\nu|^{-1/2}\mu^{-1}\chi_\nu(\nu\xi)c(\xi)^{-1}\delta(\xi)^{-1}\lambda(\nu)\varepsilon(\mu\chi_\nu, 1/2) \times L(\mu\chi_\nu, 1/2)L(\mu^{-1}\chi_\nu, 1/2)^{-1}.$$

Il est non nul. Le membre de gauche devient :

$$\lambda(\nu, \xi)\int_{\mathbb{Q}_p}\mu\chi_\nu(\alpha)|\alpha|^{-1/2}W_\nu^\xi(\underline{\underline{-2\nu\xi\alpha}})\,d\alpha=\lambda(\nu, \xi)|2\nu\xi|^{-1/2}\mu^{-1}\chi_\nu(-2\nu\xi)\omega_\nu(\xi).$$

En comparant ces deux expressions, on obtient la proposition 15.

3. Soient ρ comme au 1, ν, ν' deux éléments de $\mathbb{Q}_p^\times$. Posons $\xi=\nu'\nu^{-1}$. On suppose vérifiées les hypothèses (H_ν) et $(H_{\nu'})$.

LEMME 32. — (i) $\tilde{\rho}_\nu(\rho)\sim\tilde{\rho}_{\nu'}(\rho)$;

(ii) $\xi\in\mathbb{Q}_p^\times(\rho_\nu)$, $\xi^{-1}\in\mathbb{Q}_p^\times(\rho_{\nu'})$;

([W], prop. 18,3, lemme 41. *Voir* aussi les assertions 8 et 9). □

Fixons des données (D_ν).

LEMME 33. — *Supposons que* $\xi=\nu'\nu^{-1}\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}$. *La fonction* $\rho_\nu(\underline{\xi})W_\nu^\xi\times(\chi_\xi\circ\det)$ *appartient à* $\mathscr{W}_{\nu'}$ *et est invariante (sous* $\rho_{\nu'}$*) par* $O_{\xi^{-1}}$.

Démonstration. — Par construction, $\mathscr{W}_{\nu'}=\mathscr{W}_\nu\otimes\chi_\xi$, d'où la première assertion. Pour $g\in G$, $h\in O_{\xi^{-1}}$:

$$[\rho_\nu(\underline{\xi})W_\nu^\xi\times(\chi_\xi\circ\det)](gh)==W_\nu^\xi(gh\underline{\xi})\chi_\xi(\det gh).$$

D'après le lemme 28, i, $\underline{\underline{\xi^{-1}}}h\underline{\xi}\in O_\xi$, donc :

$$W_\nu^\xi(gh\underline{\xi})=W_\nu^\xi(g\underline{\xi})=\rho_\nu(\underline{\xi})W_\nu^\xi(g).$$

Posons $h=\begin{pmatrix} a & b \\ b\xi^{-1} & a\end{pmatrix}$. On a $\det h=a^2-b^2\xi^{-1}$, qui est une norme de $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\xi})$, donc $\chi_\xi(\det h)=1$. Alors :

$$[\rho_\nu(\underline{\xi})W_\nu^\xi\times(\chi_\xi\circ\det)](gh)=[\rho_\nu(\underline{\xi})W_\nu^\xi\times(\chi_\xi\circ\det)](g). \quad \square$$

Supposons que $\xi\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}$. On peut fixer des données $(D_{\nu'})$ (i.e. W^0 et des éléments $W_{\nu'}^{\xi'}$) en supposant que l'élément W^0 est le même dans les données (D_ν) et $(D_{\nu'})$ et que :

$$W_{\nu'}^{\xi^{-1}}=\rho_\nu(\underline{\xi})W_\nu^\xi\times(\chi_\xi\circ\det).$$

PROPOSITION 16. — *Sous ces hypothèses, on a l'égalité :*

$$\lambda(\nu, \xi)\lambda(\nu')\lambda(\nu', \xi^{-1})^{-1}\lambda(\nu)^{-1}=|\xi|^{-1/2}\mu^{-1}(\xi)(\xi, -2\nu)\varepsilon(\mu\chi_\nu, 1/2) \times L(\mu\chi_\nu, 1/2)L(\mu^{-1}\chi_{\nu'}, 1/2)\varepsilon(\mu\chi_{\nu'}, 1/2)^{-1}L(\mu^{-1}\chi_\nu, 1/2)^{-1}L(\mu\chi_{\nu'}, 1/2)^{-1}.$$

Démonstration. — On applique la proposition 15 aux couples (v, ξ), (v', ξ^{-1}) et on fait le rapport des égalités obtenues. Les termes c, δ disparaissent grâce au lemme 28, ii. Les termes ω disparaissent. En effet :

$$\omega_{\mathrm{v}'}(\xi^{-1}) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mu\chi_{\mathrm{v}\xi}(a)\,|a|^{-1/2}\,\mathrm{W}_{\mathrm{v}'}^{\xi^{-1}}(\underline{a})\,da = \int_{\mathbb{Q}_p} \mu\chi_{\mathrm{v}\xi}(a)\,|a|^{-1/2}\,\mathrm{W}_{\mathrm{v}}^{\xi}(\underline{\underline{a\xi}})\,\chi_{\xi}(a)\,da,$$

d'après notre hypothèse :

$$\omega_{\mathrm{v}'}(\xi^{-1}) = |\xi|^{-1/2}\,\mu^{-1}\,\chi_{\mathrm{v}}(\xi)\,\omega_{\mathrm{v}}(\xi). \quad \square$$

Le lemme suivant nous sera utile au IX.

LEMME 34. — *Sous ces hypothèses, pour tous* $\mathrm{W} \in \mathcal{W}'$ *et* $g \in \mathrm{G}$, *on a l'égalité :*

$$m(\xi^{-1})\,u(\mathrm{W}_{\mathrm{v}}, \xi)\,(\underline{\underline{\xi^{-1}}}\,g)\,\chi_{\xi}\,(\det g) = m(\xi)\,u(\mathrm{W}_{\mathrm{v}'}, \xi^{-1})(g).$$

Démonstration. — Soit $\lambda \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ tel que $\mathrm{W}_{\mathrm{v}}^{\xi}(\underline{\lambda}) \neq 0$. Alors (lemme 5) :

$$u(\mathrm{W}_{\mathrm{v}}, \xi)\,(\underline{\underline{\xi^{-1}}}\,g) = \mathrm{W}_{\mathrm{v}}^{\xi}(\underline{\lambda})^{-1} \int_{\mathrm{Z}\backslash\mathrm{O}_{\xi}} \mathrm{W}_{\mathrm{v}}(\underline{\lambda}\,h\,\underline{\underline{\xi^{-1}}}\,g)\,d_{\xi}h.$$

Posons $h' = \underline{\xi}\,h\,\underline{\underline{\xi^{-1}}} \in \mathrm{Z}\backslash\mathrm{O}_{\xi^{-1}}$. On a $d_{\xi}h = m(\xi)\,m(\xi^{-1})^{-1}\,d_{\xi^{-1}}h'$:

$$u(\mathrm{W}_{\mathrm{v}}, \xi)\,(\underline{\underline{\xi^{-1}}}\,g) = \mathrm{W}_{\mathrm{v}}^{\xi}(\underline{\lambda})^{-1}\,m(\xi)\,m\,(\xi^{-1})^{-1} \int_{\mathrm{Z}\backslash\mathrm{O}_{\xi^{-1}}} \mathrm{W}_{\mathrm{v}}\,(\underline{\underline{\lambda\xi^{-1}}}\,h'g)\,d_{\xi^{-1}}h',$$

$$\begin{aligned} m(\xi^{-1})\,u\,(\mathrm{W}_{\mathrm{v}}, \xi)\,(\underline{\underline{\xi^{-1}}}\,g)\,\chi_{\xi}\,(\det g) \\ = m(\xi)\,\mathrm{W}_{\mathrm{v}}^{\xi}\,(\underline{\lambda})^{-1} \int_{\mathrm{Z}\backslash\mathrm{O}_{\xi^{-1}}} \mathrm{W}_{\mathrm{v}}\,(\underline{\underline{\lambda\xi^{-1}}}\,h'\,g)\,\chi_{\xi}\,(\det g)\,d_{\xi^{-1}}\,h'. \end{aligned}$$

Or $\chi_{\xi}\,(\det h') = 1$, donc :

$$\mathrm{W}_{\mathrm{v}}(\underline{\underline{\lambda\xi^{-1}}}\,h'\,g)\,\chi_{\xi}\,(\det g) = \mathrm{W}_{\mathrm{v}'}\,(\underline{\underline{\lambda\xi^{-1}}}\,h'\,g)\,\chi_{\xi}\,(\lambda\xi).$$

De plus :

$$\chi_{\xi}(\lambda\xi)\,\mathrm{W}_{\mathrm{v}}^{\xi}\,(\underline{\lambda}) = \mathrm{W}_{\mathrm{v}'}^{\xi^{-1}}\,(\underline{\underline{\lambda\xi^{-1}}}),$$

d'où :

$$\begin{aligned} m\,(\xi^{-1})\,u\,(\mathrm{W}_{\mathrm{v}}, \xi)\,(\underline{\underline{\xi^{-1}}}\,g)\,\chi_{\xi}\,(\det g) &= m\,(\xi)\,\mathrm{W}_{\mathrm{v}'}^{\xi^{-1}}\,(\underline{\underline{\lambda\xi^{-1}}})^{-1} \\ &\quad \times \int_{\mathrm{Z}\backslash\mathrm{O}_{\xi^{-1}}} \mathrm{W}_{\mathrm{v}'}\,(\underline{\underline{\lambda\xi^{-1}}}\,h'\,g)\,d_{\xi^{-1}}\,h' \\ &= m\,(\xi)\,u\,(\mathrm{W}_{\mathrm{v}'}, \xi^{-1})\,(g). \quad \square \end{aligned}$$

VIII. — Définition des termes locaux

Soient k un entier impair, $k \geqq 3$, $\underline{\chi}$ un caractère de Dirichlet défini sur $\mathbb{Z}$, tel que $\underline{\chi}(-1)=1$. On pose $\underline{\chi}_0=\underline{\chi}\left(\frac{-1}{\cdot}\right)^{(k-1)/2}$.

1. Soit $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\chi}^2)$. On note M, λ_p, etc., les nombres notés M (φ_0), $\lambda_p(\varphi_0)$, etc., au III, A, 1, ρ_0 la représentation automorphe de $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}$ associée à φ_0, S l'ensemble des places v de $\mathbb{Q}$ telles que $\rho_{0,v}$ ne soit pas de la série principale irréductible. Soit p un nombre premier. On va définir un ensemble $\omega_p(\varphi_0) \subset \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2}$, un entier $\tilde{n}_p$ et, pour tout $e \in \mathbb{N}$, un ensemble $\mathrm{U}_p(e, \varphi_0)$ de fonctions définies sur $\mathbb{Q}_p^\times$.

2. On pose :

$$\omega_p(\varphi_0)=\{\nu \in \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2};\ \exists\ \mathrm{N} \geqq 1, \exists\ f \in S_{k/2}(\mathrm{N}, \underline{\chi}, \varphi_0), \exists\ n \geqq 1 \text{ tels que : (i) l'image de } n \text{ dans } \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2} \text{ est } \nu, \text{ (ii) } a_n(f) \neq 0\}.$$

On donnera plus tard (prop. 19) quelques propriétés de cet ensemble $\omega_p(\varphi_0)$.

3. (*a*) Supposons $p \neq 2$. Pour $\delta \in \mathbb{C}$, on définit les fonctions $c_p^0[\delta]$, $c_p^*[\delta]$, $c'_p[\delta]$, ${}'c_p[\delta]$, ${}''c_p[\delta]$, $c_p^s[\delta]$, ${}^sc_p[\delta]$. Ce sont des fonctions sur $\mathbb{Q}_p^\times$, à valeurs complexes, à support dans $\mathbb{Z}_p$.

Si $u \in \mathbb{Z}_p$, $v_p(u)=0$, on a les relations :

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_p^0[\delta](up^{2h})\,\mathrm{X}^h=(1-(p, u)_p\,\chi_{0,p}(p)\,p^{-1/2}\,\mathrm{X})\,(1-\delta\,\mathrm{X}+\chi_{0,p}(p^2)\,\mathrm{X}^2)^{-1},$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_p^*[\delta](up^{2h})\,\mathrm{X}^h=(1-\delta^2\,\mathrm{X})^{-1},$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} c'_p[\delta](up^{2h})\,\mathrm{X}^h=(1-(p, u)_p\,\chi_{0,p}(p)\,p^{-1/2}\,\delta^{-1})\,(1-\delta\mathrm{X})^{-1},$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} {}'c_p[\delta](up^{2h})\,\mathrm{X}^h=\sum_{h=0}^{\infty} {}^sc_p[\delta](up^{2h})\,\mathrm{X}^h=(1-\delta\,\mathrm{X})^{-1},$$

$${}''c_p[\delta](u)=0,$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_p^s[\delta](up^{2h})\,\mathrm{X}^h=\begin{cases}2^{1/2}\,(1-\delta\,\mathrm{X})^{-1} & \text{si } (p, u)_p=-p^{1/2}\,\chi_{0,p}(p^{-1})\,\delta,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Si $u \in \mathbb{Z}_p$, $v_p(u)=1$, on a les relations :

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_p^0[\delta](up^{2h})\,\mathrm{X}^h=(1-\delta\,\mathrm{X}+\chi_{0,p}(p^2)\,\mathrm{X}^2)^{-1},$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_p^*[\delta](up^{2h})\,\mathrm{X}^h=\delta\,(1-\delta^2\,\mathrm{X})^{-1},$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} c'_p[\delta](up^{2h})\,\mathrm{X}^h=\sum_{h=0}^{\infty} c_p^s[\delta](up^{2h})\,\mathrm{X}^h=(1-\delta\,\mathrm{X})^{-1},$$

$$\sum_{h=0}^{\prime} {}'c_p[\delta](up^{2h})\,X^h = (\delta - (p, u)_p\,\chi_{0,p}(p)\,p^{-1/2})\,(1-\delta X)^{-1},$$

$$''c_p[\delta](u) = \delta\,(p-1)^{-1},$$

$$\sum_{h=0}^{\prime} {}^s c_p[\delta](up^{2h})\,X^h = \begin{cases} 2^{1/2}\,\delta\,(1-\delta X)^{-1} & \text{si } (p, u)_p = -p^{1/2}\,\chi_{0,p}(p^{-1})\,\delta, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin pour $u \in \mathbb{Z}_p$, on a la relation de récurrence :

$$''c_p[\delta](up^2) = \delta\,(''c_p[\delta](u) + {}'c_p[\delta](u)).$$

(*b*) Supposons $p=2$. Pour $\delta \in \mathbb{C}$, on définit les fonctions $c_2^*[\delta]$, $c_2'[\delta]$, $c_2''[\delta]$, $c_2^s[\delta]$, ${}'c_2[\delta]$, $''c_2[\delta]$, ${}^s c_2[\delta]$, à support dans $\mathbb{Z}_2$. La fonction $c_2^*[\delta]$ est définie comme dans le cas $p \neq 2$. Si $u \in \mathbb{Z}_2$, $v_2(u) \in \{0, 1\}$, on a les relations :

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_2'[\delta](u\,2^{2h})\,X^h = \begin{cases} (\delta - (2, u)_2\,\chi_{0,2}(2)\,2^{-1/2})\,(1-\delta X)^{-1}, \\ \text{si } v_2(u)=0 \text{ et } (u, -1)_2 = \chi_{0,2}(-1), \\ (1-\delta X)^{-1}, \quad \text{sinon;} \end{cases}$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} {}'c_2[\delta](u\,2^{2h})\,X^h = \begin{cases} \delta^{-1}(1-\delta X)^{-1} \quad \text{si } v_2(u)=0, \\ (1-\delta X)^{-1} \quad \text{si } v_2(u)=1 \text{ et } (u, -1)_2 = -\chi_{0,2}(-1), \\ (\delta - (2, u)_2\,\chi_{0,2}(2)\,2^{-1/2})(1-\delta X)^{-1}, \\ \text{si } v_2(u)=1 \text{ et } (u, -1)_2 = \chi_{0,2}(-1); \end{cases}$$

$$c_2''[\delta](u) = \begin{cases} \delta, & \text{si } v_2(u)=0 \text{ et } (u, -1)_2 = \chi_{0,2}(-1), \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$''c_2[\delta](u) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } v_2(u)=0, \\ 1 \quad \text{si } v_2(u)=1 \text{ et } (u, -1)_2 = -\chi_{0,2}(-1), \\ 2\delta - \chi_{0,2}(2)(2, u)_2\,2^{-1/2}, \\ \text{si } v_2(u)=1 \text{ et } (u, -1)_2 = \chi_{0,2}(-1); \end{cases}$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_2^s[\delta](u\,2^{2h})\,X^h = \begin{cases} 0 \quad \text{si } v_2(u)=0,\ (u, -1)_2 = \chi_{0,2}(-1) \\ \qquad \text{et } (2, u)_2 = 2^{1/2}\,\chi_{0,2}(2^{-1})\,\delta, \\ 2^{1/2}\,\delta\,(1-\delta X)^{-1} \quad \text{si } v_2(u)=0,\ (u, -1)_2 = \chi_{0,2}(-1) \\ \qquad \text{et } (2, u)_2 = -2^{1/2}\,\chi_{0,2}(2^{-1})\,\delta, \\ (1-\delta X)^{-1}, \quad \text{sinon;} \end{cases}$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} {}^{s}c_2[\delta](u\,2^{2h})X^h=\begin{cases}\delta^{-1}(1-\delta X)^{-1} & \text{si}\quad v_2(u)=0,\\ (1-\delta X)^{-1} & \text{si}\quad v_2(u)=1\quad\text{et}\quad (u,-1)_2=-\chi_{0,2}(-1),\\ 2^{1/2}\delta(1-\delta X)^{-1} & \text{si}\quad v_2(u)=1\quad (u,-1)_2=\chi_{0,2}(-1)\\ & \qquad\text{et}\quad (2,u)_2=-2^{1/2}\chi_{0,2}(2^{-1})\delta,\\ 0 & \text{si}\quad v_2(u)=1\quad (u,-1)_2=\chi_{0,2}(-1)\\ & \qquad\text{et}\quad (2,u)_2=2^{1/2}\chi_{0,2}(2^{-1})\delta.\end{cases}$$

Enfin pour $u\in\mathbb{Z}_2$, on a les relations de récurrence :

$$c_2''[\delta](u\,2^2)=\delta(c_2''[\delta](u)+c_2'[\delta](u))$$
$$''c_2[\delta](u\,2^2)=\delta(''c_2[\delta](u)+'c_2[\delta](u)).$$

(c) On peut définir naturellement sur $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2}$ une « valuation » v_p à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $\nu\in\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2}$, $e\in\mathbb{Z}$, et si $v_p(\nu)\equiv e$ mod 2, on définit la fonction $\gamma[e,\nu]$ sur $\mathbb{Q}_p^\times$ par :

$$\gamma[e,\nu](u)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad u\in\nu\,\mathbb{Q}_p^{\times 2}\quad\text{et}\quad v_p(u)=e,\\ 0, & \text{sinon};\end{cases}$$

Si de plus $p=2$, on définit :

$$\gamma'[e,\nu]=(1/2)(\gamma[e,\nu]+\gamma[e,5\nu]);$$

et pour $e\in\mathbb{Z}$, $\gamma''[e]$ et $\gamma^0[e]$ par :

$$\gamma''[e](u)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad v_2(u)=e,\\ 0, & \text{sinon};\end{cases}$$

$$\gamma^0[e](u)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad v_2(u)=e\quad\text{et}\quad (u,-1)_2=-\chi_{0,2}(-1),\quad\text{ou si}\ v_2(u)=e+1,\\ 0, & \text{sinon}.\end{cases}$$

4. Définissons maintenant les ensembles $U_p(e,\varphi_0)$, pour $e\in\mathbb{N}$.

(1) Si $m_p\geqq 1$, $\lambda_p'=0$, on note $\tilde{n}_p$ le plus petit des nombres $m_p+2v_p(2)$, $m_p+2v_p(2)+1$ tel qu'il existe $\nu\in\omega_p(\varphi_0)$ avec $v_p(\nu)\equiv\tilde{n}_p-m_p$ mod 2. On pose :

$$U_p(e,\varphi_0)=\begin{cases}\emptyset & \text{si}\quad e<\tilde{n}_p,\\ \{\gamma[e-m_p-2v_p(2),\nu];\ \nu\in\omega_p(\varphi_0),\ v_p(\nu)\equiv e-m_p \bmod 2\}, & \\ \qquad\text{si}\quad e\geqq\tilde{n}_p.\end{cases}$$

Remarquons que $U_p(e,\varphi_0)$ peut être vide même si $e\geqq\tilde{n}_p$.

(2) Si $p\neq 2$, $m_p\geqq 1$, $\lambda_p'\neq 0$ et $p\notin S$, on pose $\tilde{n}_p=m_p$. On choisit $\beta_p\in\mathbb{C}$ tel que $\beta_p^2=\lambda_p'$. On définit :

$$U_p(e,\varphi_0)=\begin{cases}\emptyset & \text{si}\quad e<\tilde{n}_p,\\ \{c_p^*[\beta_p]\} & \text{si}\quad e=\tilde{n}_p,\\ \{\gamma[e-m_p-1,\nu];\ \nu\in\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2},\ v_p(\nu)\equiv e-m_p-1 \bmod 2\} & \\ \qquad\text{si}\quad e>\tilde{n}_p.\end{cases}$$

(3) Si $p \neq 2$, $m_p = 0$, et $\chi_{0,\,p}$ est non ramifié, on pose $\tilde{n}_p = m_p = 0$, et

$$U_p(e,\ \varphi_0) = \begin{cases} \{ c_p^0 [\lambda_p] \} & \text{si} \quad e = 0, \\ \{ c'_p [\alpha_p] \} & \text{si} \quad e = 1, \\ \{ \gamma [e-2,\ \nu];\ \nu \in \mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Q}_p^{\times 2},\ t_p(\nu) \equiv e \bmod 2 \} & \text{si} \quad e \geqq 2. \end{cases}$$

(4) Si $p \neq 2$, $m_p = 1$, $\chi_{0,\,p}$ est non ramifié, et $p \in S$, on pose $\tilde{n}_p = m_p = 1$,

$$U_p(e,\ \varphi_0) = \begin{cases} \varnothing & \text{si} \quad e = 0, \\ \{ c_p^s [\lambda'_p] \} & \text{si} \quad e = 1, \\ \{ \gamma [e-2,\ \nu];\ \nu \in \omega_p(\varphi_0),\ t_p(\nu) \equiv e \bmod 2 \} & \text{si} \quad e \geqq 2. \end{cases}$$

(5) Si $p \neq 2$, $m_p = 0$ et $\chi_{0,\,p}$ est ramifié, on pose $\tilde{n}_p = 1$, et :

$$U_p(e,\ \varphi_0) = \begin{cases} \varnothing & \text{si} \quad e = 0, \\ \begin{cases} \{ {}'c_p [\alpha_p],\ {}'c_p [\alpha'_p] \} & \text{si} \quad e = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_p \neq \alpha'_p, \\ \{ {}'c_p [\alpha_p],\ {}''c_p [\alpha_p] \} & \text{si} \quad e = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_p = \alpha'_p, \end{cases} \\ \{ \gamma [e-2,\ \nu];\ \nu \in \mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Q}_p^{\times 2},\ t_p(\nu) \equiv e \bmod 2 \} & \text{si} \quad e \geqq 2. \end{cases}$$

(6) Si $p \neq 2$, $m_p = 1$, $\chi_{0,\,p}$ est ramifié, et $p \in S$, on pose $\tilde{n}_p = 1$ et

$$U_p(e,\ \varphi_0) = \begin{cases} \varnothing & \text{si} \quad e = 0, \\ \{ {}^s c_p [\lambda'_p] \} & \text{si} \quad e = 1, \\ \{ \gamma [e-2,\ \nu];\ \nu \in \omega_p(\varphi_0),\ t_p(\nu) \equiv e \bmod 2 \} & \text{si} \quad e \geqq 2. \end{cases}$$

(7) Si $p = 2$, $m_2 \geqq 1$, $\lambda'_2 \neq 0$, et $2 \notin S$, on pose $\tilde{n}_2 = m_2 + 1$. On choisit $\beta_2 \in \mathbb{C}$ tel que $\beta_2^2 = \lambda'_2$, on définit :

$$U_2(e,\ \varphi_0) = \begin{cases} \varnothing & \text{si} \quad e < \tilde{n}_2, \\ \{ c_2^* [\beta_2] \} & \text{si} \quad e = \tilde{n}_2, \\ \{ \gamma'' [e - \tilde{n}_2 - 1] \} & \text{si} \quad e = \tilde{n}_2 + 1, \\ \{ \gamma'' [e - \tilde{n}_2 - 1],\ \gamma' [e - \tilde{n}_2 - 2,\ 1] \} & \text{si} \quad e = \tilde{n}_2 + 2, \\ \{ \gamma'' [e - \tilde{n}_2 - 1],\ \gamma' [e - \tilde{n}_2 - 2,\ 1],\ \gamma [e - \tilde{n}_2 - 3,\ 2],\ \gamma [e - \tilde{n}_2 - 3,\ -2] \}, & \\ \qquad \text{si} \quad e \geqq n_2 + 3 \quad \text{et} \quad e \equiv \tilde{n}_2 \bmod 2, & \\ \{ \gamma'' [e - \tilde{n}_2 - 1],\ \gamma' [e - \tilde{n}_2 - 2,\ 2],\ \gamma [e - \tilde{n}_2 - 3,\ 1],\ \gamma [e - \tilde{n}_2 - 3,\ -1] \}, & \\ \qquad \text{si} \quad e \geqq \tilde{n}_2 + 3 \quad \text{et} \quad e \equiv \tilde{n}_2 + 1 \bmod 2. & \end{cases}$$

(8) Si $p=2$, $m_2=0$ et $\chi_{0,2}(u)=1$ pour $u\in 1+4\mathbb{Z}_2$, on pose $\tilde{n}_2=2$ et :

$$\begin{cases} \emptyset & \text{si } e<2, \\ \{c_2'[\alpha_2], c_2'[\alpha_2']\} & \text{si } e=2 \text{ et } \alpha_2\neq\alpha_2', \\ \{c_2'[\alpha_2], c_2''[\alpha_2]\} & \text{si } e=2 \text{ et } \alpha_2=\alpha_2', \\ \{\gamma^0[e-3]\} & \text{si } e=3, \\ \{\gamma'[e-4, -\chi_{0,2}(-1)], \gamma[e-4, \chi_{0,2}(-1)], \gamma[e-4, 5\chi_{0,2}(-1)]\}, & \text{si } e=4, \\ \{\gamma^0[e-3], \gamma[e-5, -\chi_{0,2}(-1)]\} & \text{si } e=5, \\ \{\gamma'[e-4, -\chi_{0,2}(-1)], \gamma'[e-5, 2], \gamma[e-4, \chi_{0,2}(-1)], \gamma[e-4, 5\chi_{0,2}(-1)]\}, & \text{si } e\geqq 6,\ e \text{ pair}, \\ \{\gamma^0[e-3], \gamma[e-5, -\chi_{0,2}(-1)], \gamma[e-6, 2], \gamma[e-6, -2]\} & \text{si } e\geqq 6,\ e \text{ impair}. \end{cases}$$

(9) Si $p=2$, $m_2=1$, $\chi_{0,2}(u)=1$ pour $u\in 1+4\mathbb{Z}_2$, et $2\in S$, on pose $\tilde{n}_2=2$ et :

$$U_2(e, \varphi_0)=\begin{cases} \emptyset & \text{si } e<2, \\ \{c_2^s[\lambda_2']\} & \text{si } e=2. \end{cases}$$

Pour $e\geqq 3$, $U_2(e, \varphi_0)$ est défini comme dans le cas 8, à ceci près qu'on supprime la fonction $\gamma[e-4, \chi_{0,2}(-1)]$ (resp. $\gamma[e-4, 5\chi_{0,2}(-1)]$) si e est pair et $\chi_{0,2}(-1)\notin\omega_p(\varphi_0)$ [resp. $5\chi_{0,2}(-1)\notin\omega_p(\varphi_0)$].

(10) Si $p=2$, $m_2=0$ et $\chi_{0,2}$ est non trivial sur $1+4\mathbb{Z}_2$, on pose $\tilde{n}_2=3$ et :

$$U_2(e, \varphi_0)=\begin{cases} \emptyset & \text{si } e<3, \\ \{{}'c_2[\alpha_2], {}'c_2[\alpha_2'], \gamma''[e-3]\} & \text{si } e=3 \text{ et } \alpha_2\neq\alpha_2', \\ \{{}'c_2[\alpha_2], {}''c_2[\alpha_2], \gamma''[e-3]\} & \text{si } e=3 \text{ et } \alpha_2=\alpha_2', \\ \{\gamma^0[e-3]\} & \text{si } e=4, \\ \{\gamma''[e-3], \gamma'[e-5, 1], \gamma[e-4, 2\chi_{0,2}(-1)], \gamma[e-4, 10\chi_{0,2}(-1)]\}, & \text{si } e\geqq 5,\ e \text{ impair}, \\ \{\gamma^0[e-3], \gamma[e-5, -2\chi_{0,2}(-1)], \gamma[e-6, 1], \gamma[e-6, -1]\}, & \text{si } e\geqq 5,\ e \text{ pair}. \end{cases}$$

(11) Si $p=2$, $m_2=1$, $\chi_{0,2}$ est non trivial sur $1+4\mathbb{Z}_2$, et $2\in S$, on pose $\tilde{n}_2=3$ et :

$$U_2(e, \varphi_0)=\begin{cases} \emptyset & \text{si } e<3, \\ \{{}^sc_2[\lambda_2'], \gamma''[e-3]\} & \text{si } e=3. \end{cases}$$

our $e \geqq 4$, $U_2(e, \varphi_0)$ est défini comme dans le cas 10, à ceci près qu'on supprime la fonction $[e-4, 2\chi_{0,2}(-1)]$ (resp. $\gamma[e-4, 10\chi_{0,2}(-1)]$) si e est impair et $2\chi_{0,2}(-1) \notin \omega_p(\varphi_0)$ [resp. $)\chi_{0,2}(-1) \notin \omega_p(\varphi_0)$].

Par analogie, pour la place v réelle, on définit une fonction $c_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^\times$:

$$c_{\mathbb{R}}(u) = \begin{cases} u^{(k-2)/4} & \text{si} \quad u > 0, \\ 0 & \text{si} \quad u < 0, \end{cases}$$

on pose $U_{\mathbb{R}}(0, \varphi_0) = \{c_{\mathbb{R}}\}$.

5. On pose $\tilde{N} = \prod_p p^{\tilde{n}_p}$. Soient $\underline{A}$ une fonction de $\mathbb{N}^{sc}$ dans $\mathbb{C}(1, 4)$, et E un entier divisible ır $\tilde{N}$. Posons $e_p = v_p(E)$ pour tout nombre premier p, et $e_{\mathbb{R}} = 0$. Soit $\underline{c}_E = (c_v)$ un élément de $U_v(e_v, \varphi_0)$, le produit étant pris sur toutes les places v de $\mathbb{Q}$. Si $n \geqq 1$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z > 0$, on ›se :

$$a_n(\underline{c}_E, \underline{A}) = \underline{A}(n^{sc}) \prod_v c_v(n),$$

$$f(\underline{c}_E, \underline{A})(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\underline{c}_E, \underline{A})\, e^{2\pi i n z}.$$

n note $\overline{U}(E, \varphi_0, \underline{A})$ l'espace engendré par les fonctions $f(\underline{c}_E, \underline{A})$ pour $\underline{c}_E \in \prod_v U_v(e_v, \varphi_0)$.

IX. — Le théorème

Soient k, $\underline{\chi}$ et $\underline{\chi}_0$ comme en VIII.

1. Soient T un sous-espace irréductible de $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$, $\tilde{\rho}$ la représentation de $\tilde{\mathscr{H}}_A$ dans T. On ppose que la composante réelle $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}$ est de la série discrète de poids minimal $k/2$. Si N est un tier divisible par 4, tel que $\underline{\chi}$ soit défini modulo N, on se propose de déterminer l'espace $_2(N, \underline{\chi}, T)$ (III, B, 4). Soient $V = \mathscr{V}'(\psi, T)$ (IV, 4), $V_0 = V \otimes \chi_0$, ρ et ρ_0 les représentations $\mathscr{H}_A$ dans V et V_0, φ_0 l'élément de $S_{k-1}^{new}(\underline{\chi}^2)$ associé à V_0. On définit les nombres M, , etc. comme en VIII. Pour p premier, on pose $\omega_p(T) = \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ (IV, 4). On définit $\tilde{n}_p$, et ur tout $e \in \mathbb{N}$, un ensemble de fonctions $U_p(e, T)$, de la même façon qu'en VIII, à ceci près 'on remplace $\omega_p(\varphi_0)$ par $\omega_p(T)$ dans chaque définition. On pose $\tilde{N} = \prod_p p^{\tilde{n}_p}$. Pour une ıction $\underline{A} : \mathbb{N}^{sc} \to \mathbb{C}$ et un entier E divisible par $\tilde{N}$, on définit l'ensemble $\overline{U}(E, T, \underline{A})$ par alogie avec l'ensemble $\overline{U}(E, \varphi_0, \underline{A})$ de VIII, 5. On pose :

$$\mathbb{Q}_{loc}^\times(\tilde{\rho}) = \{ t \in \mathbb{Q}^\times;\ t \in \mathbb{Q}_v^\times(\tilde{\rho}_v) \text{ pour toute place } v \}.$$

THÉORÈME 2. — 1° *il existe* N *tel que* $S_{k,2}(N, \underline{\chi}, T) \neq \{0\}$ *si et seulement si, pour tout* p, $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_p) = \chi_{0,p}(-1)$;

2° *supposons cette condition vérifiée, ainsi que l'hypothèse* (H2). *Il existe une fonction* $\underline{A}^T : \mathbb{N}^{sc} \cap \mathbb{Q}^{\times}_{loc}(\tilde{\rho}) \to \mathbb{C}$ *telle que :*

(i) *si* $t \in \mathbb{N}^{sc} \cap \mathbb{Q}^{\times}_{loc}(\tilde{\rho})$, *on a l'égalité :*

$$\underline{A}^T(t)^2 = L(\rho \otimes \chi_t, 1/2)\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_t, 1/2);$$

(ii) *pour toute fonction* $\underline{A} : \mathbb{N}^{sc} \to \mathbb{C}$ *telle que* $\underline{A}$ *restreinte à* $\mathbb{N}^{sc} \cap \mathbb{Q}^{\times}_{loc}(\tilde{\rho})$ *soit égale à* $\underline{A}^T$, *pour tout entier* $N \geqq 1$, *on a l'égalité :*

$$S_{k,2}(N, \underline{\chi}, T) = \oplus \overline{U}(E, T, \underline{A}), \qquad \tilde{N} \mid E \mid N.$$

Soit S_1 l'ensemble des places p où $\tilde{\rho}_p$ est supercuspidale. Si $p \notin S_1$, soit μ_p le caractère de $\mathbb{Q}_p^{\times}$ tel que $\tilde{\rho}_p$ soit isomorphe à $\tilde{\pi}_{\mu_p}$ ou $\tilde{\sigma}_{\mu_p}$, $T_p = T_{\mu_p}$ ou $T^S_{\mu_p}$. Si $p \in S_1$, on fixe un caractère μ_p tel que $\mu_p(-1) = \underline{\omega}(\tilde{\rho}_p)$ et soit T_p un modèle de $\tilde{\rho}_p$ vérifiant les conditions de l'assertion 7, relatives à μ_p. On fixe un modèle $T_{\mathbb{R}}$ de $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}$, et divers isomorphismes comme en IV, 2, 3, 4. Soient $t^0_{\mathbb{R}}$ l'élément de $T_{\mathbb{R}}$ de poids minimal (sous l'action de $\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}$), $T_{\mathbb{R}}(0)$ la droite de $T_{\mathbb{R}}$ engendrée par $t^0_{\mathbb{R}}$. Soit $N = \prod p^{n_p}$ un entier divisible par 4. On a défini un sous-espace $T_p(n_p)$ de $T_p(V, 1)$. On pose $n_{\mathbb{R}} = 0$. On a alors l'égalité :

$$T_{k,2}(N, \chi_0) = \tau^{-1}\left(\bigotimes_v T_v(n_v)\right)$$

(III, B, 4), et :

$$S_{k,2}(N, \underline{\chi}, T) = s^{-1}(T_{k,2}(N, \chi_0)).$$

Le lemme 15 implique l'assertion 1 du théorème.

2. On suppose désormais que pour tout p, $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_p) = \chi_{0,p}(-1)$ et que φ_0 vérifie l'hypothèse (H2). Si $p \in S_1$ ($\tilde{\rho}_p$ supercuspidale), on dit que $\tilde{\rho}_p$ est du cas 1, on définit l'entier $\tilde{n}_p$ et les ensembles $U_p(e)$ comme en V, 4. Si $p \notin S_1$, on a défini au VI le cas (1 à 11) dans lequel se trouve la représentation $\tilde{\rho}_p$, ainsi que l'entier $\tilde{n}_p$ et les ensembles $U_p(e)$. Le paragraphe VIII nous fournit une autre classification, un entier $\tilde{n}_p$, et des ensembles $U_p(e, T)$.

LEMME 35. — *Les deux définitions de la classification et de l'entier* $\tilde{n}_p$ *coïncident. Pour tout entier* e, *il existe une bijection de* $U_p(e, T)$ *sur* $U_p(e)$.

Démonstration. — Un instant de réflexion et les formules du III, A, 3, montrent qu'il suffit de traiter la classification. Notons i_I, $i = 1, \ldots, 11$, les cas définis au VIII, et i_{II} les cas définis ci-dessus ($p \in S_1$) et au VI ($p \notin S_1$) :

1° Supposons $\tilde{\rho}_p$ supercuspidale, donc du cas 1_{II}. Alors ([W], prop. 18), $\rho_{0,p}$ est supercuspidale ou spéciale. Si $\rho_{0,p}$ est supercuspidale, il est clair que $m_p \geqq 1$ (lemme 2) et $\underline{\lambda}'_p = 0$, donc $\rho_{0,p}$ est du cas 1_I. Si $\rho_{0,p} \sim \sigma(\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1\mu_2^{-1} = |\cdot|_p$, on a vu dans la démonstration de la proposition 7 que, sous l'hypothèse $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_p) = \chi_{0,p}(-1)$, on a $\mu_1(-1) = \mu_2(-1) = -1$. En particulier $n(\mu_1) > 0$, $n(\mu_2) > 0$, donc $m_p \geqq 1$ et $\underline{\lambda}'_p = 0$ (III, A, 3), et $\rho_{0,p}$ est du cas 1_I;

2° si $\widetilde{\rho}_p$ n'est pas supercuspidale, la proposition 18 de [W] et les formules du III, A, 3 montrent facilement que les classifications coïncident. □

On fixe une bijection $s_p^e : U_p(e, T) \to U_p(e)$, préservant l'ordre dans lequel on a écrit au VIII et VI les éléments de ces ensembles. On demande aussi que $c \in U_p(e, T)$ et $s_p^e(c)$ aient même support dans $\mathbb{Q}_p^\times$. Dans le cas où $\widetilde{\rho}_p \sim \widetilde{\pi}_{\mu_p}$, avec $n(\chi_{0,p}\mu_p)=n(\chi_{0,p}\mu_p^{-1})=0$, on a $m_p=0$, et on fixe $\alpha_p=\chi_{0,p}\mu_p^{-1}(p)$, $\alpha'_p=\chi_{0,p}(p)\mu_p(p)$ (III, A, 1). Alors, dans un sens évident, s_p^e préserve les valeurs propres des opérateurs de Hecke (convenablement normalisés).

Comme $\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(-1)=1$, on peut choisir un caractère μ'_p de $\mathbb{Q}_p^\times$ tel que $\mu_p'^2=\mu_p\chi_{0,p}^{-1}$. On définit dans les différents cas une fonction C_p sur $\mathbb{Q}_p^\times$. Elle est à support dans $\mathbb{Z}_p$. Pour $a\in\mathbb{Z}_p$, $h\in\mathbb{N}$, on pose :

— cas 1;

$$C_p(a)=\mu'_p(a);$$

— cas 2 (a) si $n(\mu_p\chi_{0,p})=0$,

$$C_p(ap^{2h})=\begin{cases}\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(p^h)\mu_p(a)(p^n, a)\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^n}, 1/2) \quad \text{si} \quad v_p(a)=0,\\ \beta_p^{-1}\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(p^h)(p^n, p)\widetilde{\gamma}(-p)\mu_p(a)(p^{n+1}, a)\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^{n-1}}, 1/2)\\ \qquad \text{si} \quad v_p(a)=1,\end{cases}$$

où $n=\widetilde{n}_p$. Rappelons qu'on a choisi une racine β_p de λ'_p pour définir l'élément de $U_p(n, T)$;

(b) si $n(\mu_p^{-1}\chi_{0,p})=0$:

$$C_p(a)=\beta_p^{-v_p(a)};$$

— cas 3 :

$$C_p(ap^{2h})=\begin{cases}(1+(p, a)\mu_p(p)p^{-1/2})\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(p^h) & \text{si} \quad v_p(a)=0,\\ (1-\mu_p(p^2)p^{-1})\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(p^h) & \text{si} \quad v_p(a)=1;\end{cases}$$

— cas 4 :

$$C_p(ap^{2h})=\begin{cases}2^{1/2}(1-1/p)\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(p^h)\\ \qquad \text{si} \quad v_p(a)=0 \quad \text{et} \quad (p, a)_p=-\mu(p)p^{1/2},\\ 0 \quad \text{si} \quad v_p(a)=0 \quad \text{et} \quad (p, a)_p=\mu(p)p^{1/2},\\ (1-p^{-2})\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(p^h) \quad \text{si} \quad v_p(a)=1;\end{cases}$$

— cas 5 :

$$C_p(ap^{2h})=\begin{cases}\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(p^h) & \text{si} \quad v_p(a)=0,\\ (1-(p, a)\mu_p(p)p^{-1/2})^{-1}\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(p^{h+1}) & \text{si} \quad v_p(a)=1;\end{cases}$$

— cas 6 :

$$C_p(ap^{2h})=\begin{cases}\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(p^h) \quad \text{si} \quad v_p(a)=0,\\ 0 \quad \text{si} \quad v_p(a)=1 \quad \text{et} \quad (p, a)_p=\mu(p)p^{1/2},\\ 2^{1/2}(1+1/p)^{-1}\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(p^{h+1})\\ \qquad \text{si} \quad v_p(a)=1 \quad \text{et} \quad (p, a)_p=-\mu(p)p^{1/2};\end{cases}$$

— cas 7 : (*a*) si $n(\mu_2 \chi_{0,2})=0$,

$$C_2(a\,2^{2h})=\begin{cases} \mu_2 \chi_{0,2}^{-1}(2^h)\,\mu_2(a)(2^n, a)\,\tilde{\gamma}_2(a\,.\,a(\mu_2 \chi_{2^n}))\,\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{2^n}, 1/2), \\ \qquad \text{si} \quad v_2(a)=0, \\ \beta_2^{-1}\,\mu_2 \chi_{0,2}^{-1}(2^h)\,\mu_2(a)(2^{n+1}, a)\,\tilde{\gamma}_2(a\,.\,a(\mu_2 \chi_{2^{n+1}})) \\ \qquad \times\,\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{2^{n+1}}, 1/2) \quad \text{si} \quad v_2(a)=1, \end{cases}$$

où $n=\tilde{n}_2$:

(*b*) si $n(\mu_2^{-1}\chi_{0,2})=0$,

$$C_2(a)=\beta_2^{-v_2(a)};$$

— cas 8 :

$$C_2(a\,2^{2h})=\begin{cases} \mu_2 \chi_{0,2}^{-1}(2^{h+1})(1-(2, a)\,\mu_2(2)\,2^{-1/2})^{-1} \\ \qquad \text{si} \quad v_2(a)=0 \quad \text{et} \quad (a, -1)_2=\chi_{0,2}(-1), \\ \mu_2 \chi_{0,2}^{-1}(2^h) \quad \text{si} \quad v_2(a)=0 \quad \text{et} \quad (a, -1)_2=-\chi_{0,2}(-1), \quad \text{ou } v_2(a)=1; \end{cases}$$

— cas 9 :

$$C_2(a\,2^{2h})=\begin{cases} 2^{3/2}\,3^{-1}\,\mu_2 \chi_{0,2}^{-1}(2^{h+1}) \\ \text{si} \quad v_2(a)=0, \quad (a, -1)_2=\chi_{0,2}(-1) \quad \text{et} \quad (2, a)_2=-\mu_2(2)\,2^{1/2}, \\ 0 \quad \text{si} \quad v_2(a)=0, \quad (a, -1)_2=\chi_{0,2}(-1), \quad (2, a)_2=\mu_2(2)\,2^{1/2}, \\ \mu_2 \chi_{0,2}^{-1}(2^h) \quad \text{si} \quad v_2(a)=0 \quad \text{et} \quad (a, -1)_2=-\chi_{0,2}(-1), \\ \qquad \text{ou si } v_2(a)=1; \end{cases}$$

— cas 10 :

$$C_2(a\,2^{2h})=\begin{cases} \mu_2 \chi_{0,2}^{-1}(2^{h-1+v_2(a)}) \\ \text{si} \quad v_2(a)=0, \quad \text{ou si } v_2(a)=1 \quad \text{et} \quad (a, -1)_2=-\chi_{0,2}(-1), \\ \mu_2 \chi_{0,2}^{-1}(2^{h+1})(1-(2, a)\,\mu_2(2)\,2^{-1/2})^{-1} \\ \qquad \text{si} \quad v_2(a)=1 \quad \text{et} \quad (a, -1)_2=\chi_{0,2}(-1); \end{cases}$$

— cas 11 :

$$C_2(a\,2^{2h})=\begin{cases} \mu_2 \chi_{0,2}^{-1}(2^{h-1+v_2(a)}) \\ \text{si} \quad v_2(a)=0 \quad \text{ou si } v_2(a)=1 \quad \text{et} \quad (a, -1)_2=-\chi_{0,2}(-1), \\ 0 \quad \text{si } v_2(a)=1, \quad (a, -1)_2=\chi_{0,2}(-1), \quad (2, a)_2=\mu_2(2)\,2^{1/2}, \\ 2^{3/2}\,3^{-1}\,\mu_2 \chi_{0,2}^{-1}(2^{h+1}) \\ \text{si} \quad v_2(a)=1, \quad (a, -1)_2=\chi_{0,2}(-1) \quad \text{et} \quad (2, a)_2=-\mu_2(2)\,2^{1/2}. \end{cases}$$

LEMME 36. — (i) *Pour tous* $a, \alpha\in\mathbb{Z}_p$, $a\neq 0$, $\alpha\neq 0$, *on a l'égalité* :

$$C_p(a\alpha^2)=\mu_p \chi_{0,p}^{-1}(\alpha)\,C_p(a);$$

(ii) *pour tout* $a \in \mathbb{Q}_p^\times (\tilde{\rho}_p) \cap \mathbb{Z}_p$, $C_p(a) \neq 0$;

(iii) *pour tous* $e \in \mathbb{N}$, $c \in U_p(e, T)$, *il existe une constante* b *telle que* :

$$s_p^e(c) = b(c.C_p).$$

En particulier, si $U_p(0, T) \neq \{0\}$, *et* $c \in U_p(0, T)$, $s_p^0(c) = c.C_p$. C'est un simple calcul. □

3. Fixons $\varphi \in V$, $\varphi \neq 0$, tel que $e(\varphi) = \underset{t}{\otimes} W_t$ (IV, 3). Soit $\nu \in \mathbb{Q}^\times$ tel que l'espace des ψ^ν-ièmes coefficients de Fourier de T soit non nul. Comme $\tilde{\rho}_\infty$ est de la série discrète de poids minimal $k/2$, on a $\nu > 0$ ([W], lemme 12). Quitte à multiplier ν par un carré, on suppose $\nu \in \mathbb{N}^{sc}$, $\nu \geqq 1$. On a l'égalité $T_\nu(\rho) = T$ ([W], prop. 26, 27, iv, et th.). On fixe divers isomorphismes comme en IV, 2, 3, 4.

Pour toute place t, on pose :

$$d_t(\nu) = L(\rho_{\nu, t}, 1/2)^{-1}.$$

Si $g \in G_A$, on vérifie que $d_t(\nu)\, u(W_{\nu, t})(g) = 1$ pour presque tout t. Il existe un scalaire $b(\nu) \neq 0$ tel que pour tout $g \in G_A$:

$$\int_{\mathbb{Q}^\times \setminus A^\times} \varphi_\nu(\underline{a}g)\, d^\times a = b(\nu) \prod_t d_t(\nu)\, u(W_{\nu, t})(g)$$

([W], prop. 12). Pour tout p, il existe un scalaire $\lambda_p(\nu)$ tel que pour tout $t_p \in T_\nu(\rho_p)$:

$$t_p(1) = \lambda_p(\nu)\, i_{\nu, p}(t_p)(\nu)$$

(assertion 11). Pour toute place t et tout $\xi \in \mathbb{Q}_t^\times(\rho_{\nu, t}) - \mathbb{Q}_t^{\times 2}$, on fixe un élément non nul $W_{\nu, t}^\xi$ de $\mathscr{W}_{\nu, t}$ invariant par $O_{\xi, t}$ (sous $\rho_{\nu, t}$). Cela définit une fonction $u(W_{\nu, t}, \xi)$ sur G_t (lemme 5).

Soient $\nu' \in \mathbb{N}$, $\nu' \geqq 1$, ν'^{sc} l'unique élément de $\mathbb{N}^{sc} \cap \nu' \mathbb{Q}^{\times 2}$, $u \in \mathbb{N}$ tel que $\nu' = \nu'^{sc} u^2$, $\xi = \nu'^{sc} \nu^{-1}$. Supposons que pour toute place t, $\xi \in \mathbb{Q}_t^\times(\rho_{\nu, t})$. Soit t une place telle que $\xi \in \mathbb{Q}_t^{\times 2}$, $u_t \in \mathbb{Q}_t^\times$ tel que $u_t^2 = \xi$, $U_t = \begin{pmatrix} u_t & 1 \\ u_t & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie que :

$$O_{\xi, t} = U_t^{-1} D_t U_t.$$

Il existe un scalaire $m_t(\xi)$ tel que pour tout $\Phi \in L^1(D_t \setminus G_t)$:

$$m_t(\xi) \int_{O_{\xi, t} \setminus G_t} \Phi(U_t g)\, dg = \int_{D_t \setminus G_t} \Phi(g)\, dg.$$

Pour $g \in G_t$, on pose :

$$u(W_{\nu, t}, \xi)(g) = m_t(\xi)\, u(W_{\nu, t})(U_t g).$$

Cette fonction est invariante à gauche par $O_{\xi, t}$. Si maintenant $\xi \notin \mathbb{Q}_t^{\times 2}$, on a déjà défini $u(W_{\nu, t}, \xi)$. On note $m_t(\xi)$ la mesure de $Z_t \setminus O_{\xi, t}$. Pour toute place t, on choisit une constante $d_r(\nu, \xi)$ telle que $d_r(\nu, \xi)\, u(W_{\nu, r}, \xi)(1)=1$ pour presque tout r. Il existe une constante $b(\nu, \xi)$ telle que pour tout $g\in G_A$:

$$\int_{O_{\xi, \mathbb{Q}} Z_A \backslash O_{\xi, A}} \varphi_\nu(hg)\, d_\xi h = b(\nu, \xi) \prod_r d_r(\nu, \xi)\, u(W_{\nu, r}, \xi)(g)$$

([W], prop. 12). Pour tout p, il existe une constante $\lambda_p(\nu, \xi)$ telle que pour tout $f\in\mathscr{S}(H_p)$:

$$\int_{O_{\xi, p}\backslash G_p} R(g) f(x_\xi)\, u(W_{\nu, p}, \xi)(g)\, dg = \lambda_p(\nu, \xi)\, [i_{\nu, p}\circ j_{\nu, p}(W)](f)(\nu\xi).$$

Posons :

$$B_{\mathbb{R}}(\nu)=d_{\mathbb{R}}(\nu), \qquad B_{\mathbb{R}}(\nu, \xi)=d_{\mathbb{R}}(\nu, \xi)\,|\xi|_{\mathbb{R}}^{-1/4},$$

et pour tout p :

$$B_p(\nu)=d_p(\nu)\lambda_p(\nu)C_p(\nu), \qquad B_p(\nu, \xi)=d_p(\nu, \xi)\lambda_p(\nu, \xi)C_p(\nu\xi).$$

On pose :

$$B(\nu)=b(\nu)\prod_r B_r(\nu), \qquad B(\nu, \xi)=b(\nu, \xi)\prod_r B_r(\nu, \xi).$$

On verra au cours de la démonstration de la proposition suivante que ces produits convergent. Rappelons qu'on a défini une fonction $c_{\mathbb{R}}$ (VIII, 4).

PROPOSITION 17. — *Fixons* ν *comme ci-dessus. Soient* $E=\prod p^{e_p}$ *un entier divisible par* $\tilde{N}$, *pour tout* p, $c_p\in U_p(e_p, T)$:

$$F=s^{-1}\circ\tau^{-1}(t_{\mathbb{R}}^0\otimes(\otimes_p s_p^{e_p}(c_p)));$$

1° *soit* $\nu'\in\mathbb{N}$, $\nu'\geqq 1$. *S'il existe une place* r *telle que* $\nu'\notin\mathbb{Q}_r^\times(\tilde{\rho}_r)$, $a_{\nu'}(F)=0$;

2° *il existe une constante* $\delta\neq 0$ *telle que :*

(i) $a_\nu(F)=\delta B(\nu)\prod_r c_r(\nu)$;

(ii) *pour tout* $\nu'=\nu'^{sc}u^2$, *avec* $u\in\mathbb{N}$, $\nu'^{sc}\in\mathbb{N}^{sc}$, *tel que pour toute place* r, $\nu'\in\mathbb{Q}_r^\times(\tilde{\rho}_r)$, *on a l'égalité :*

$$a_{\nu'}(F)=\delta B(\nu, \xi)\prod_r c_r(\nu'),$$

où $\xi=\nu'^{sc}\nu^{-1}$.

Démonstration. — On pose $t=s(F)=\tau^{-1}(t_{\mathbb{R}}^0\otimes(\otimes_p s_p^{e_p}(c_p)))$. Le 1 est immédiat : si $\nu'\notin\mathbb{Q}_r^\times(\tilde{\rho}_r)$, $\tilde{\rho}_r$ n'admet pas de modèle de Whittaker relatif au caractère $\psi_r^{\nu'}$. *A fortiori* l'espace des $\psi^{\nu'}$-ièmes coefficients de Fourier de T est nul, et on applique le lemme 3.

Comme $t \in \mathrm{T} = \mathrm{T}_{\nu}(\rho)$, il existe $f \in \mathscr{S}_{\psi^{\nu}}(\mathrm{H_A})$ telle que $t = j_{\nu}(\varphi)(f)$ (IV, 3). On peut supposer $f = \underset{v}{\otimes} f_v$, $\tau(t) = \underset{v}{\otimes}(i_{\nu, v} \circ j_{\nu, v}(\mathrm{W}_v))(f_v)$ (IV, assertion 5). D'après [W], corollaire au lemme 24, et nos définitions, on a l'égalité :

$$(16)\quad \tilde{\mathrm{W}}(\nu, t, 1) = b(\nu) \prod_v \int_{\mathrm{D}_v \setminus \mathrm{G}_v} r_{\psi^{\nu}}(1) \mathrm{R}(g) f_v(x'_1)\, d_v(\nu)\, u(\mathrm{W}_{\nu, v})(g)\, dg$$

$$= b(\nu) \prod_v d_v(\nu)\, j_{\nu, v}(\mathrm{W}_v)(f_v)(1).$$

Si $v = p$ est finie :

$$j_{\nu, p}(\mathrm{W}_p)(f_p)(1) = \lambda_p(\nu)(i_{\nu, p} \circ j_{\nu, p}(\mathrm{W}_p))(f_p)(\nu) = \lambda_p(\nu)\, s_p^{\varepsilon_p}(c_p)(\nu).$$

Soit δ_p une constante telle que :

$$s_p^{\varepsilon_p}(c_p) = \delta_p\, c_p\, \mathrm{C}_p$$

(lemme 36). Alors :

$$j_{\nu, p}(\mathrm{W}_p)(f_p)(1) = \delta_p \lambda_p(\nu) \mathrm{C}_p(\nu) c_p(\nu).$$

Si v est réelle, la fonction $\sigma \mapsto j_{\nu, v}(\mathrm{W}_v)(f_v)(\sigma)$ (pour $\sigma \in \tilde{\mathrm{S}}_{\mathbb{R}}$) est un élément du modèle de Whittaker de $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}$ relatif à $\psi_{\mathbb{R}}^{\nu}$. C'est l'élément de poids minimal. Donc ([W], lemme 12), il existe une constante $\delta_{\mathbb{R}}$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^{\times}$:

$$j_{\nu, \mathbb{R}}(\mathrm{W}_{\mathbb{R}})(f_{\mathbb{R}})(d(\alpha)) = \delta_{\mathbb{R}}\, \alpha^{k/2} e^{-2\pi\nu\alpha^2}.$$

En particulier :

$$j_{\nu, \mathbb{R}}(\mathrm{W}_{\mathbb{R}})(f_{\mathbb{R}})(1) = \delta_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\nu} = \delta_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\nu} |\nu|_{\mathbb{R}}^{(2-k)/4} c_{\mathbb{R}}(\nu).$$

Alors :

$$\tilde{\mathrm{W}}(\nu, t, 1) = b(\nu) \delta_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\nu} |\nu|_{\mathbb{R}}^{(2-k)/4} \times d_{\mathbb{R}}(\nu) c_{\mathbb{R}}(\nu) \prod_p \delta_p d_p(\nu) \lambda_p(\nu) \mathrm{C}_p(\nu) c_p(\nu).$$

Comme le produit (16) converge, que $\delta_p = 1$ et $c_p(\nu) = 1$ pour presque tout p, on obtient :

$$\tilde{\mathrm{W}}(\nu, t, 1) = e^{-2\pi\nu} |\nu|_{\mathbb{R}}^{(2-k)/4} \Big(\prod_v \delta_v\Big)\, b(\nu) \Big(\prod_v \mathrm{B}_v(\nu)\Big)\Big(\prod_v c_v(\nu)\Big),$$

chaque produit étant convergent. Posons :

$$\delta = |\nu|_{\mathbb{R}}^{(2-k)/4} \prod_v \delta_v.$$

La formule ci-dessus et le lemme 3 montrent que :

$$a_{\nu}(\mathrm{F}) = \delta \mathrm{B}(\nu) \prod_v c_v(\nu).$$

Considérons (ii). On a l'égalité :

$$\tilde{W}(\nu', t, 1)=\tilde{W}(\nu' u^{-2}, t, d(u))=\tilde{W}(\nu\xi, t, d(u)).$$

D'après [W], corollaire au lemme 24 :

$$\tilde{W}(\nu\xi, t, d(u))=b(\nu, \xi)\prod_{v} d_v(\nu, \xi)\, I_v,$$

où :

$$I_v=\int_{O_{\xi, v}\backslash G_v} r_{\psi'}(d_v(u))\, R(g) f_v(x_\xi)\, u(W_{\nu, v}, \xi)(g)\, dg.$$

Si $v=p$ est finie :

$$\begin{aligned} I_p=\lambda_p(\nu, \xi)\, &[i_{\nu, p}\circ j_{\nu, p}(W_p)]\, (r_{\psi'}(d_p(u)) f_p)(\nu\xi) \\ &=\lambda_p(\nu, \xi)\, \tilde{\rho}_p(d_p(u))[i_{\nu, p}\circ j_{\nu, p}(W_p)(f_p)](\nu\xi) \\ &=\lambda_p(\nu, \xi)\, \tilde{\rho}_p(d_p(u))[s_p^{c_p}(c_p)](\nu\xi) \\ &=\lambda_p(\nu, \xi)\tilde{\gamma}_p(u)|u|_p \mu_p^{-1}(u)\, s_p^{c_p}(c_p)(\nu\xi u^2), \end{aligned}$$

d'après l'assertion 7. Donc :

$$I_p=\lambda_p(\nu, \xi)\tilde{\gamma}_p(u)|u|_p\mu_p^{-1}(u)\delta_p c_p(\nu\xi u^2) C_p(\nu\xi u^2).$$

D'après le lemme 36, i, et l'égalité $\nu\xi u^2=\nu'$, on obtient :

$$I_p=\delta_p\tilde{\gamma}_p(u)|u|_p\chi_{G, p}^{-1}(u)\lambda_p(\nu, \xi)\, C_p(\nu\xi)\, c_p(\nu').$$

Si v est la place réelle, on a $\xi>0$ car $\nu'\in\mathbb{Q}_v^\times(\tilde{\rho}_v)$. Soient $u_v\in\mathbb{R}_+^\times$ tel que $u_v^2=\xi$, et $U_v=\begin{pmatrix} u_v & 1 \\ u_v & -1\end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} I_v=m_v(\xi)\int_{O_{\xi, v}\backslash G_v} & r_{\psi'}(d_v(u))\, R(g) f_v(x_\xi)\, u(W_{\nu, v})(U_v g)\, dg \\ &=\int_{D_v\backslash G_v} r_{\psi'}(d_v(u))\, R(U_v^{-1} g) f_v(x_\xi)\, u(W_{\nu, v})(g)\, dg \\ &=\int_{D_v\backslash G_v} r_{\psi'}(d_v(u))\, R(g) f_v(u_v x_1')\, u(W_{\nu, v})(g)\, dg, \end{aligned}$$

car $U_v x_\xi U_v^{-1}=u_v x_1'$. Donc :

$$\begin{aligned} I_v=|u_v|^{-3/2}\int_{D_v\backslash G_v} & r_{\psi'}(d_v(uu_v))\, R(g) f_v(x_1')\, u(W_{\nu, v})(g)\, dg \\ &=|u_v|^{-3/2} j_{\nu, v}(W_v)(f_v)(d_v(uu_v)) \\ &=\delta_{\mathbb{R}}|u_v|^{-3/2}|uu_v|^{k/2}\exp(-2\pi\nu u^2 u_v^2). \end{aligned}$$

Comme $\nu u^2 u_i^2 = \nu'$, et $c_{\mathbb{R}}(\nu') = |\nu'|_{\mathbb{R}}^{(k-2)/4}$, on obtient :

$$l_{\mathbb{R}} = \delta_{\mathbb{R}} |\nu|_{\mathbb{R}}^{(2-k)/4} e^{-2\pi\nu'} |u|_{\mathbb{R}} |\xi|_{\mathbb{R}}^{-1/4} c_{\mathbb{R}}(\nu').$$

Alors, en remarquant que $\tilde{\gamma}_{\mathbb{R}}(u) = \chi_{0,\mathbb{R}}(u) = 1$, car $u > 0$:

$$\tilde{W}(\nu, t, 1) = e^{-2\pi\nu'} |\nu|_{\mathbb{R}}^{(2-k)/4} (\prod_i \delta_i)(\prod_i \tilde{\gamma}_i(u)|u|_i \chi_{0,i}^{-1}(u)) \times b(\nu, \xi)(\prod_i B_i(\nu, \xi))(\prod_i c_i(\nu')).$$

Comme $u \in \mathbb{Q}^\times$:

$$\prod_i \tilde{\gamma}_i(u)|u|_i \chi_{0,i}^{-1}(u) = 1.$$

D'après la définition de δ et le lemme 3, la formule ci-dessus montre que :

$$a_{\nu'}(F) = \delta B(\nu, \xi) \prod_i c_i(\nu'). \quad \square$$

4. Soient $\mathbb{Q}^\times(\tilde{\rho})$ l'ensemble des $\nu \in \mathbb{Q}^\times$ tels que l'espace des ψ^ν-ièmes coefficients de Fourier de T soit non nul, S_2 l'ensemble des places finies p telles que $\tilde{\rho}_p$ soit du cas 1, l et l_{loc} les applications naturelles :

$$l: \quad \mathbb{Q}^\times(\tilde{\rho}) \to \prod_{p \in S_2} \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)/\mathbb{Q}_p^{\times 2}$$

$$l_{\text{loc}}: \quad \mathbb{Q}_{\text{loc}}^\times(\tilde{\rho}) \to \prod_{p \in S_2} \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)/\mathbb{Q}_p^{\times 2}.$$

D'après le lemme 6, l est surjective. On peut choisir un ensemble $\underline{\nu} = \{\nu_i;\ i = 1 \ldots r\} \subset \mathbb{Q}^\times(\tilde{\rho}) \cap \mathbb{N}^{\text{sc}}$, tel que $l_{\underline{\nu}}$ soit bijective. Pour tout $i = 1 \ldots r$, fixons des racines carrées :

$$L(\rho \otimes \chi_{\nu_i}, 1/2)^{1/2}, \varepsilon(\chi_0^{-1} \chi_{\nu_i}, 1/2)^{1/2}.$$

Pour chaque $i = 1 \ldots r$, on peut effectuer les constructions du 3, pour $\nu = \nu_i$. Soit $t \in \mathbb{N}^{\text{sc}} \cap \mathbb{Q}_{\text{loc}}^\times(\tilde{\rho})$, $i \in \{1 \ldots r\}$ tel que $l(\nu_i) = l_{\text{loc}}(t)$, $\xi = t\nu_i^{-1}$. Posons :

$$\underline{A}^T(t) = B(\nu_i, \xi)\ B(\nu_i)^{-1} L(\rho \otimes \chi_{\nu_i}, 1/2)^{1/2} \varepsilon(\chi_0^{-1} \chi_{\nu_i}, 1/2)^{1/2}.$$

Remarquons que par construction et le lemme 36, ii, $B(\nu_i) \neq 0$. La formule ci-dessus définit une fonction $\underline{A}^T : \mathbb{N}^{\text{sc}} \cap \mathbb{Q}_{\text{loc}}^\times(\tilde{\rho}) \to \mathbb{C}$.

Assertion. — *La fonction $\underline{A}^T$ vérifie l'assertion 2, ii, du théorème 2.*

Démonstration. — Soit $\underline{A}$ une fonction comme dans ce théorème. Soient $E = \prod p^{e_p}$ un entier divisible par $\tilde{N}$, pour tout p, $c_p \in U_p(e_p, T)$,

$$F = s^{-1} \circ \tau^{-1}(t_{\mathbb{R}}^0 \otimes (\bigotimes_p s_p^{e_p}(c_p))).$$

Posons $\underline{c}_E=(c_i)\in\prod_i U_i(e_i, T)$ (VIII). Je dis que F est proportionnelle à $f(\underline{c}_E, \underline{A})$ (VIII). Il suffit de comparer leurs coefficients de Fourier. Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqq 1$. S'il existe une place v telle que $n\notin\mathbb{Q}_v^\times(\tilde{\rho}_v)$, en cette place $c_v(n)=0$ (VIII, 4), et $a_n(\underline{c}_E, \underline{A})=0$. De même $a_n(F)=0$ (prop. 17,1). Supposons que $n\in\mathbb{Q}_{\mathrm{loc}}^\times(\tilde{\rho})$. Remarquons que pour $p\in S_2$, le support de c_p est de la forme $\eta_p\mathbb{Z}_p^{\times 2}$, pour un $\eta_p\in\mathbb{Q}_p^\times$ (VIII, 4). Soit i tel que $l(\mathrm{v}_i)$ soit égal à l'image de $(\eta_p)_{p\in S_2}$ dans $\prod_{p\in S_2}\mathbb{Q}_p(\tilde{\rho}_p)/\mathbb{Q}_p^{\times 2}$, et δ la constante dont l'existence est affirmée par la proposition 17 appliquée à v_i. S'il existe $p\in S_2$ tel que $n\notin\eta_p\mathbb{Z}_p^{\times 2}$, on a $c_p(n)=0$, donc $a_n(\underline{c}_E, \underline{A})=0$. De même $a_n(F)=0$ d'après la proposition 17, ii. Supposons que pour tout $p\in S_2$, $n\in\eta_p\mathbb{Z}_p^{\times 2}$. Alors $l(\mathrm{v}_i)=l_{\mathrm{loc}}(n^{\mathrm{sc}})$. Par construction :

$$a_n(\underline{c}_E, \underline{A})=B(\mathrm{v}_i, n^{\mathrm{sc}}\mathrm{v}_i^{-1})\,B(\mathrm{v}_i)^{-1}\,L(\rho\otimes\chi_{\mathrm{v}_i}, 1/2)^{1/2}\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}_i}, 1/2)^{1/2}\prod_v c_v(n).$$

D'après la proposition 17, 2, ii :

$$a_n(F)=\delta B(\mathrm{v}_i, n^{\mathrm{sc}}\mathrm{v}_i^{-1})\prod_i c_i(n).$$

Donc :

$$a_n(\underline{c}_E, \underline{A})=\delta^{-1}B(\mathrm{v}_i)^{-1}L(\rho\otimes\chi_{\mathrm{v}_i}, 1/2)^{1/2}\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}_i}, 1/2)^{1/2}\,a_n(F),$$

d'où l'égalité :

$$f(\underline{c}_E, \underline{A})=\delta^{-1}B(\mathrm{v}_i)^{-1}L(\rho\otimes\chi_{\mathrm{v}_i}, 1/2)^{1/2}\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}_i}, 1/2)^{1/2}\,F.$$

Soit $N=\prod p^{n_p}\in\mathbb{N}$. D'après les propositions 6, 11, 14, on a l'égalité :

$$T_p(n_p)=\oplus\overline{U}_p(e_p),\qquad \tilde{n}_p\leqq e_p\leqq n_p,$$

[en effet, si $\tilde{\rho}_p$ est supercuspidale, l'hypothèse (H2) implique l'hypothèse (H') de la proposition 7]. Donc :

$$T_p(n_p)=\oplus s_p^{e_p}(\overline{U}_p(e_p, T)),\qquad \tilde{n}_p\leqq e_p\leqq n_p,$$

$$T_{k/2}(N, \chi_0)=\bigoplus_E\tau^{-1}(T_{\mathbb{K}}(0)\otimes(\otimes_p s_p^{e_p}\overline{U}_p(e_p, T))),\qquad \tilde{N}\,|\,E\,|\,N,$$

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T)=\bigoplus_E s^{-1}\circ\tau^{-1}(T_{\mathbb{K}}(0)\otimes(\otimes_p s_p^{e_p}\overline{U}_p(e_p, T))),\qquad \tilde{N}\,|\,E\,|\,N,$$

et d'après le résultat ci-dessus :

$$s^{-1}\circ\tau^{-1}(T_{\mathbb{K}}(0)\otimes(\otimes_p s_p^{e_p}\overline{U}_p(e_p, T)))=\overline{U}(E, T, \underline{A}).\quad\square$$

5. PROPOSITION 18. — *Soit* $t\in\mathbb{N}^{\mathrm{sc}}\cap\mathbb{Q}_{\mathrm{loc}}^\times(\tilde{\rho})$. *On a l'égalité :*

$$\underline{A}^T(t)^2=L(\rho\otimes\chi_t, 1/2)\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_t, 1/2).$$

Cette proposition achève la démonstration du théorème 2.

Démonstration. — Soit $i \in \{1 \ldots r\}$ tel que $l(\mathrm{v}_i)=l_{\mathrm{loc}}(t)$, posons $\mathrm{v}=\mathrm{v}_i$, $\xi=t\mathrm{v}^{-1}$.

Supposons $b(\mathrm{v}, \xi)=0$. Alors, par définition $\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}}(t)=0$. Supposons $\mathrm{L}(\rho\otimes\chi_t, 1/2)\neq 0$. Alors $\mathrm{T}_t(\rho)\neq\{0\}$ ([W], th. 1) et, comme $t\in\mathbb{Q}^{\times}_{\mathrm{loc}}(\tilde{\rho})$, $\mathrm{T}_t(\rho)=\mathrm{T}$ (IV, assertion 8, et théorème de multiplicité 1). L'espace des ψ^t-ièmes coefficients de Fourier de $\mathrm{T}_t(\rho)$, donc de T, est non nul ([W], th. 1). Alors $b(\mathrm{v}, \xi)\neq 0$ ([W], IV, 2). Contradiction, donc $\mathrm{L}(\rho\otimes\chi_t, 1/2)=0$.

Supposons $b(\mathrm{v}, \xi)\neq 0$. Alors $\mathrm{L}(\rho\otimes\chi_t, 1/2)\neq 0$ ([W], prop. 26, 27; ii, th. 1), et l'espace des ψ^t-ièmes coefficients de Fourier de T est non nul ([W], IV, 2). On se propose d'appliquer la proposition 17 aux deux couples (v, t) et (t, v). On fixe $\varphi\in\mathrm{V}$, $\varphi\neq 0$, avec $e(\varphi)=\bigotimes_v \mathrm{W}_v$ (le même φ pour les deux couples). Si v est une place de $\mathbb{Q}$ et $\xi\notin\mathbb{Q}_v^{\times 2}$, on fixe deux éléments $\mathrm{W}^{\xi}_{\mathrm{v},\,v}$, resp. $\mathrm{W}^{\xi^{-1}}_{\mathrm{v}\xi,\,v}$, non nuls de $\mathscr{W}_{\mathrm{v},\,v}$, resp. $\mathscr{W}_{\mathrm{v}\xi,\,v}$, invariants par $\mathrm{O}_{\xi,\,v}$, resp. $\mathrm{O}_{\xi^{-1},\,v}$. Remarquons que $v\notin\mathrm{S}_2$ par définition de v. En particulier $\tilde{\rho}_v$ n'est pas supercuspidale. De plus v n'est pas réelle. On suppose comme au VII, 3, que :

$$\mathrm{W}^{\xi^{-1}}_{\mathrm{v}\xi,\,v}=\rho_{\mathrm{v},\,v}(\underline{\xi})\,\mathrm{W}^{\xi}_{\mathrm{v},\,v}\times(\chi_{\xi,\,v}\circ\det).$$

Remarquons que si p est premier et $\xi\in\mathbb{Q}_p^{\times 2}$, on a en fait $\xi\in\mathbb{Z}_p^{\times 2}$ car v et vξ sont sans facteur carré.

Soit $p\in\mathrm{S}_2$. On peut trouver un entier e_p et $c_p\in\mathrm{U}_p(e_p, \mathrm{T})$ tel que $c_p(\mathrm{v})\neq 0$ (VIII, 4). Alors $c_p(\mathrm{v}\xi)\neq 0$. En effet comme $p\in\mathrm{S}_2$, on a $\xi\in\mathbb{Q}_p^{\times 2}$, donc $\xi\in\mathbb{Z}_p^{\times 2}$, et c_p est invariant par $\mathbb{Z}_p^{\times 2}$. Si $p\notin\mathrm{S}_2$, il est clair sur les formules du VIII, 4, qu'on peut trouver un entier e_p (égal à 0 pour presque tout p), et un élément $c_p\in\mathrm{U}_p(e_p, \mathrm{T})$ tel que $c_p(\mathrm{v})\neq 0$, $c_p(\mathrm{v}\xi)\neq 0$. Soit :

$$\mathrm{F}=s^{-1}\circ\tau^{-1}\Big(t^0_{\mathbb{R}}\otimes\big(\bigotimes_p s_p^{e_p}(c_p)\big)\Big).$$

D'après la proposition 17 appliquée successivement à nos deux couples, il existe deux constantes δ, $\delta'\neq 0$, telles que :

$$a_{\mathrm{v}}(\mathrm{F})=\delta\mathrm{B}(\mathrm{v})\prod_v c_v(\mathrm{v}),\qquad a_{\mathrm{v}\xi}(\mathrm{F})=\delta\mathrm{B}(\mathrm{v}, \xi)\prod_v c_v(\mathrm{v}\xi),$$
$$a_{\mathrm{v}\xi}(\mathrm{F})=\delta'\mathrm{B}(\mathrm{v}\xi)\prod_v c_v(\mathrm{v}\xi),\qquad a_{\mathrm{v}}(\mathrm{F})=\delta'\mathrm{B}(\mathrm{v}\xi, \xi^{-1})\prod_v c_v(\mathrm{v}).$$

Aucun des termes intervenant dans ces expressions n'est nul. Alors :

$$\mathrm{B}(\mathrm{v}, \xi)\mathrm{B}(\mathrm{v})^{-1}=a_{\mathrm{v}\xi}(\mathrm{F})\,a_{\mathrm{v}}(\mathrm{F})^{-1}\Big(\prod_v c_v(\mathrm{v})\,c_v(\mathrm{v}\xi)^{-1}\Big)=\mathrm{B}(\mathrm{v}\xi)\,\mathrm{B}(\mathrm{v}\xi, \xi^{-1})^{-1}.$$

On en déduit :

$$\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}}(t)^2=\mathrm{L}(\rho\otimes\chi_{\mathrm{v}}, 1/2)\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}}, 1/2)\,\mathrm{B}(\mathrm{v}, \xi)\,\mathrm{B}(\mathrm{v})^{-1}\,\mathrm{B}(\mathrm{v}\xi)\,\mathrm{B}(\mathrm{v}\xi, \xi^{-1})^{-1}.$$

Pour toute place v, posons :

$$\mathrm{I}_v=d_v(\mathrm{v}\xi, \xi^{-1})\,d_v(\mathrm{v}, \xi)^{-1}\,\mathrm{B}_v(\mathrm{v}, \xi)\,\mathrm{B}_v(\mathrm{v})^{-1}\,\mathrm{B}_v(\mathrm{v}\xi)\,\mathrm{B}_v(\mathrm{v}\xi, \xi^{-1})^{-1}.$$

Posons :

$$\mathrm{I}=b(\mathrm{v},\xi)\,b(\mathrm{v})^{-1}\,b(\mathrm{v}\xi)\,b(\mathrm{v}\xi,\xi^{-1})^{-1}\Big(\prod_v d_v(\mathrm{v},\xi)\,d_v(\mathrm{v}\xi,\xi^{-1})^{-1}\Big)$$

(on verra au lemme 38 que ce dernier produit converge). Alors :

$$\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}}(t)^2=\mathrm{L}(\rho\otimes\chi_{\mathrm{v}},1/2)\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_{\mathrm{v}},1/2)\,\mathrm{I}\Big(\prod_v \mathrm{I}_v\Big). \tag{17}$$

On va analyser I et I_v.

LEMME 37. — *Pour toute place v de $\mathbb{Q}$ et tout $g\in\mathrm{G}_v$, on a l'égalité :*

$$m_v(\xi^{-1})\,u(\mathrm{W}_{\mathrm{v},v},\xi)(\underline{\underline{\xi^{-1}}}\,g)\,\chi_{\xi,v}(\det g)=m_v(\xi)\,u(\mathrm{W}_{\mathrm{v}\xi,v},\xi^{-1})(g).$$

Démonstration. — Si $\xi\notin\mathbb{Q}_v^{\times 2}$, v est finie et $v\notin\mathrm{S}_2$. En particulier, $\tilde\rho_v$ n'est pas supercuspidale et on applique le lemme 34. Si $\xi\in\mathbb{Q}_v^{\times 2}$, soient $u_v\in\mathbb{Q}_v^\times$ tel que $u_v^2=\xi$:

$$\mathrm{U}_v=\begin{pmatrix}u_v & 1\\ u_v & -1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{U}'_v=\begin{pmatrix}u_v^{-1} & 1\\ u_v^{-1} & -1\end{pmatrix}.$$

Par définition :

$$u(\mathrm{W}_{\mathrm{v},v},\xi)(\underline{\underline{\xi^{-1}}}\,g)=m_v(\xi)\,u(\mathrm{W}_{\mathrm{v},v})(\mathrm{U}_v\underline{\underline{\xi^{-1}}}\,g),$$
$$u(\mathrm{W}_{\mathrm{v}\xi,v},\xi^{-1})(g)=m_v(\xi^{-1})\,u(\mathrm{W}_{\mathrm{v}\xi,v})(\mathrm{U}'_v g).$$

Mais $\mathrm{U}'_v=\mathrm{U}_v\underline{\underline{\xi^{-1}}}$, $\mathrm{W}_{\mathrm{v}\xi,v}=\mathrm{W}_{\mathrm{v},v}$, et $\chi_{\xi,v}(\det g)=1$, car $\xi\in\mathbb{Q}_v^{\times 2}$. □

LEMME 38. — *On a l'égalité :*

$$\mathrm{I}=\mathrm{L}(\rho\otimes\chi_{\mathrm{v}\xi},1/2)\,\mathrm{L}(\rho\otimes\chi_{\mathrm{v}},1/2)^{-1}.$$

Démonstration. — Il existe une constante $\delta\neq 0$ telle que :

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}}\varphi(\underline{n}g)\,\psi(-n)\,dn=\delta\prod_v \mathrm{W}_v(g).$$

Pour $s\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}s$ assez grand :

$$\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\varphi_{\mathrm{v}}(\underline{\underline{a}}g)\,|a|^{s-1/2}\,d^\times a=\delta\prod_v\int_{\mathbb{Q}_v^\times}\mathrm{W}_{\mathrm{v},v}(\underline{\underline{a}}g)\,|a|_v^{s-1/2}\,d_v^\times a$$
$$=\delta\mathrm{L}(\rho\otimes\chi_{\mathrm{v}},s)\prod_v\Big[\mathrm{L}(\rho_{\mathrm{v},v},s)^{-1}\int_{\mathbb{Q}_v^\times}\mathrm{W}_{\mathrm{v},v}(\underline{\underline{a}}g)\,|a|_v^{s-1/2}\,d_v^\times a\Big]$$

Pour presque tout v, le terme local du produit infini est égal à 1, ce produit se prolonge analytiquement au moins jusqu'au voisinage de $s=1/2$. Pour $s=1/2$, on obtient, d'après nos définitions :

$$\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\varphi_{\mathrm{v}}(\underline{\underline{a}}g)\,d^\times a=\delta\mathrm{L}(\rho\otimes\chi_{\mathrm{v}},1/2)\prod_v d_v(\mathrm{v})\,u(\mathrm{W}_{\mathrm{v},v})(g),$$

donc $b(\nu)=\delta L(\rho\otimes\chi_\nu, 1/2)$. De même $b(\nu\xi)=\delta L(\rho\otimes\chi_{\nu\xi}, 1/2)$.

On a l'égalité $O_{\xi^{-1}}=\underline{\xi}\, O_\xi\, \underline{\underline{\xi^{-1}}}$. Soit v une place de $\mathbb{Q}$. Il est facile de voir que pour tout $\Phi\in L^1(Z_v\backslash O_{\xi^{-1},v})$:

$$\int_{Z_v\backslash O_{\xi^{-1},v}} \Phi(h)\, d_{\xi^{-1},v}\, h = m_v(\xi^{-1})\, m_v(\xi)^{-1} \int_{Z_v\backslash O_{\xi,v}} \Phi(\underline{\xi}\, h\, \underline{\underline{\xi^{-1}}})\, d_{\xi,v}\, h.$$

Comme les mesures $d_{\xi^{-1},v}$ et $d_{\xi,v}$ définissent des mesures globales, le produit :

$$m=\prod_v m_v(\xi^{-1})\, m_v(\xi)^{-1}$$

est convergent. Alors :

$$\int_{O_{\xi^{-1},\mathbb{Q}} Z_A\backslash O_{\xi^{-1},A}} \varphi_{\nu\xi}(hg)\, d_{\xi^{-1}}\, h = m \int_{O_{\xi,\mathbb{Q}} Z_A\backslash O_{\xi,A}} \varphi_{\nu\xi}(\underline{\xi}\, h\, \underline{\underline{\xi^{-1}}}\, g)\, d_\xi\, h.$$

On a l'égalité :

$$\varphi_{\nu\xi}(\underline{\xi}\, h\, \underline{\underline{\xi^{-1}}}\, g)=\varphi_\nu(\underline{\xi}\, h\, \underline{\underline{\xi^{-1}}}\, g)\, \chi_\xi(\det g)\, \chi_\xi(\det h).$$

Si $h\in O_{\xi,A}$, $\det h$ est, en toute place v, une norme de l'extension $\mathbb{Q}_v(\sqrt{\xi})$, donc $\chi_\xi(\det h)=1$. De plus φ_ν est invariant à gauche par $\underline{\xi}$. Donc :

$$\int_{O_{\xi^{-1},\mathbb{Q}} Z_A\backslash O_{\xi^{-1},A}} \varphi_{\nu\xi}(hg)\, d_{\xi^{-1}}\, h = m \int_{O_{\xi,\mathbb{Q}} Z_A\backslash O_{\xi,A}} \varphi_\nu(h\, \underline{\underline{\xi^{-1}}}\, g)\, d_\xi\, h\ \ \chi_\xi(\det g).$$

D'après nos définitions, cette égalité devient :

$$b(\nu\xi, \xi^{-1})[\prod_v d_v(\nu\xi, \xi^{-1})\, u(W_{\nu\xi,v}, \xi^{-1})(g)]=b(\nu, \xi)[\prod_v d_v(\nu, \xi)$$
$$\times u(W_{\nu,v}, \xi)(\underline{\underline{\xi^{-1}}}\, g)\, m_v(\xi^{-1})\, m_v(\xi)^{-1}\, \chi_{\xi,v}(\det g)].$$

Donc (lemme 37) :

$$b(\nu, \xi)\, b(\nu\xi, \xi^{-1})^{-1}=\prod_v d_v(\nu\xi, \xi^{-1})\, d_v(\nu, \xi)^{-1},$$

ce produit étant convergent. On a calculé tous les termes intervenant dans la définition de I. On obtient l'égalité de l'énoncé. □

LEMME 39. — *Soit v une place de $\mathbb{Q}$ telle que $\xi\in\mathbb{Q}_v^{\times 2}$. On a l'égalité :*

$$I_v=|\xi|_v^{-1/2}\, \chi_{\xi,v}(2)\, \chi_{0,v}^{-1}(\xi)\, \varepsilon(\chi_{0,v}^{-1}\chi_{\nu\xi}, 1/2)\, \varepsilon(\chi_{0,v}^{-1}\chi_\nu, 1/2)^{-1}.$$

Démonstration. — Comme $\chi_{\xi,v}=1$, cette égalité se réduit à :

$$I_v=|\xi|_v^{-1/2}\, \chi_{0,v}^{-1}(\xi).$$

De plus $d_v(\nu)=d_v(\nu\xi)$, donc, par définition :

$$I_v=|\xi|_{\mathbb{R}}^{-1/4}\, |\xi^{-1}|_{\mathbb{R}}^{1/4},$$

si v est réelle,

$$I_p=\lambda_p(\nu,\xi)\lambda_p(\nu)^{-1}\lambda_p(\nu\xi)\lambda_p(\nu\xi,\xi^{-1})^{-1}C_p(\nu\xi)^2C_p(\nu)^{-2},$$

si $v=p$ est finie.

Si v est réelle, l'égalité à démontrer est immédiate ($\chi_{0,\mathbb{R}}(\xi)=1$ car $\xi>0$). Supposons $v=p$. Soient $u_p\in\mathbb{Q}_p^\times$ tel que $u_p^2=\xi$, et $f\in\mathscr{S}(H_p)$. Par le même argument que dans la démonstration de la proposition 17 (calcul de $I_{\mathbb{R}}$), on montre que :

$$\int_{O_{\xi,p}\setminus G_p}R(g)f(x_\xi)u(W_{\nu,p},\xi)(g)\,dg=|u_p|^{-3/2}\tilde{\gamma}_p(u_p)^{-1}\chi_\nu(u_p)j_{\nu,p}(W_p)[r_{\psi\nu}(d(u_p))f](1).$$

Soit J la valeur commune des deux membres. Par définition de $\lambda_p(\nu)$:

$$\begin{aligned}J&=|u_p|^{-3/2}\tilde{\gamma}_p(u_p)^{-1}\chi_\nu(u_p)\lambda_p(\nu)i_{\nu,p}\circ j_{\nu,p}(W_p)[r_{\psi\nu}(d(u_p))f](\nu)\\&=|u_p|^{-3/2}\tilde{\gamma}_p(u_p)^{-1}\chi_\nu(u_p)\lambda_p(\nu)\tilde{\rho}_p(d(u_p))[i_{\nu,p}\circ j_{\nu,p}(W_p)(f)](\nu)\\&=|u_p|^{-1/2}\chi_\nu(u_p)\mu_p^{-1}(u_p)\lambda_p(\nu)[i_{\nu,p}\circ j_{\nu,p}(W_p)(f)](\nu u_p^2),\end{aligned}$$

(assertion 7). Mais, par définition de J et $\lambda_p(\nu,\xi)$:

$$J=\lambda_p(\nu,\xi)[i_{\nu,p}\circ j_{\nu,p}(W_p)(f)](\nu\xi).$$

Comme $\nu\xi=\nu u_p^2$, on obtient :

$$\lambda_p(\nu,\xi)=\lambda_p(\nu)|u_p|^{-1/2}\mu_p^{-1}\chi_\nu(u_p).$$

De même :

$$\lambda_p(\nu\xi,\xi^{-1})=\lambda_p(\nu\xi)|u_p^{-1}|^{-1/2}\mu_p^{-1}\chi_\nu(u_p^{-1}),$$

d'où :

$$\lambda_p(\nu,\xi)\lambda_p(\nu)^{-1}\lambda_p(\nu\xi)\lambda_p(\nu\xi,\xi^{-1})^{-1}=|\xi|_p^{-1/2}\mu_p^{-1}(\xi).$$

Or $\xi\in\mathbb{Z}_p^{\times 2}$, donc (lemme 36, i) :

$$C_p(\nu\xi)^2=\mu_p\chi_{0,p}^{-1}(\xi)C_p(\nu)^2.$$

En regroupant ces deux égalités, on obtient la formule cherchée. □

Soit p un nombre premier tel que $\xi\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}$ (si v est réelle, on a $\nu>0$, $\nu\xi>0$, donc $\xi\in\mathbb{Q}_v^{\times 2}$). Par définition de ν, $p\notin S_2$, donc $\tilde{\rho}_p\sim\tilde{\pi}_{\mu_p}$, ou $\tilde{\rho}_p\sim\tilde{\sigma}_{\mu_p}$. Pour $a\in\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)\cap\mathbb{Z}_p$, posons :

$$J_p(a)=\mu_p(a)C_p(a)^{-2}\varepsilon(\mu_p\chi_a,1/2)L(\mu_p\chi_a,1/2)L(\mu_p^{-1}\chi_a,1/2)^{-1}L(\rho_{a,p},1/2).$$

LEMME 40. — *Soit p tel que $\xi\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}$:*

(i) *il existe une constante $\delta_p\neq 0$ telle que pour tout $a\in\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$ avec $v_p(a)\in\{0,1\}$, on a l'égalité :*

$$J_p(a)=\delta_p\chi_{0,p}(a)\varepsilon(\chi_{0,p}\chi_a,1/2);$$

(ii) *on a l'égalité :*

$$I_p = |\xi|_p^{-1/2} \chi_{\xi,p}(-2\nu) J_p(\nu) J_p(\nu\xi)^{-1};$$

(iii) *on a l'égalité :*

$$I_p = |\xi|_p^{-1/2} \chi_{\xi,p}(2\nu) \chi_{0,p}^{-1}(\xi) \varepsilon(\chi_{0,p}^{-1} \chi_{\nu\xi}, 1/2) \varepsilon(\chi_{0,p}^{-1} \chi_\nu, 1/2)^{-1}.$$

Démonstration. — On est dans la situation où on peut appliquer la proposition 16 au calcul de $\lambda_p(\nu, \xi)\lambda_p(\nu)^{-1}\lambda_p(\nu\xi)\lambda_p(\nu\xi, \xi^{-1})^{-1}$. La définition de I_p conduit à l'égalité (ii). Le (i) et les formules du II, 7, donnent alors (iii). Démontrons (i). On abandonne les indices p. Il s'agit d'un calcul cas par cas. Dans les cas 2, 3, 5, 7, 8, 10, on a $\rho_a \sim \pi(\mu\chi_a, \mu^{-1}\chi_a)$, donc :

$$L(\rho_a, 1/2) = L(\mu\chi_a, 1/2) L(\mu^{-1}\chi_a, 1/2),$$
$$J(a) = \mu(a) C(a)^{-2} \varepsilon(\mu\chi_a, 1/2) L(\mu\chi_a, 1/2)^2.$$

Cas 2. — Le caractère μ^2 est ramifié, donc $n(\mu\chi_a) > 0$ et $L(\mu\chi_a, 1/2) = 1$. Posons $n = \tilde{n}_p = n(\mu) = n(\chi_0)$:

(a) Supposons $n(\mu\chi_0) = 0$;

— si $v_p(a) = 0$, χ_a est non ramifié. On a les égalités :

$$C(a)^{-2} = \mu^{-2}(a) \varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^n}, 1/2)^{-2},$$
$$\varepsilon(\mu\chi_a, 1/2) = \chi_a(p^n) \varepsilon(\mu, 1/2),$$
$$\varepsilon(\chi_0\chi_a, 1/2) = \chi_a(p^n) \varepsilon(\chi_0, 1/2),$$
$$\varepsilon(\chi_0, 1/2) = \varepsilon(\chi_0 \mu\mu^{-1}, 1/2) = \mu\chi_0(p^{-n}) \varepsilon(\mu^{-1}, 1/2) = \mu\chi_0(p^{-n}) \mu(-1) \varepsilon(\mu, 1/2)^{-1},$$
$$\mu(a) = \chi_0(a)^{-1}.$$

On obtient :

$$J(a) = \delta_0 \chi_0(a) \varepsilon(\chi_0\chi_a, 1/2),$$

où :

$$\delta_0 = \mu\chi_0(p^n) \mu(-1) \varepsilon(\mu, 1/2)^2 \varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^n}, 1/2)^{-2}.$$

— Si $v_p(a) = 1$, on écrit $a = (ap^{-1})p$, avec $\chi_{ap^{-1}}$ non ramifié. On a :

$$C(a)^{-2} = \mu\chi_0(p)(p, -1) \mu^{-2}(a) \varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^{n+1}}, 1/2)^{-2},$$
$$\varepsilon(\mu\chi_a, 1/2) = \chi_{ap^{-1}}(p^n) \varepsilon(\mu\chi_p, 1/2),$$
$$\varepsilon(\chi_0\chi_a, 1/2) = \chi_{ap^{-1}}(p^n) \varepsilon(\chi_0\chi_p, 1/2),$$
$$\varepsilon(\chi_0\chi_p, 1/2) = \mu\chi_0(p^{-n}) \varepsilon(\mu^{-1}\chi_p, 1/2) = \mu\chi_0(p^{-n}) \mu(-1)(p, -1) \varepsilon(\mu\chi_p, 1/2)^{-1},$$
$$\mu(ap^{-1}) = \chi_0(ap^{-1})^{-1}.$$

On obtient :

$$J(a) = \delta_1 \chi_0(a) \varepsilon(\chi_0\chi_a, 1/2),$$

où :

$$\delta_1 = \mu\chi_0(p^n) \mu(-1) \varepsilon(\mu\chi_p, 1/2)^2 \varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^{n+1}}, 1/2)^{-2}.$$

– Il reste à montrer que $\delta_0=\delta_1$, i.e. :

$$\varepsilon(\mu, 1/2)^2\,\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^n}, 1/2)^{-2}=\varepsilon(\mu\chi_p, 1/2)^2\,\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{p^{n+1}}, 1/2)^{-2}.$$

Grâce aux formules du II, 7, cette égalité devient :

$$\varepsilon(\mu, 1/2)^2\,\varepsilon(\mu\chi_{p^n}, 1/2)^2=\varepsilon(\mu\chi_p, 1/2)^2\,\varepsilon(\mu\chi_{p^{n+1}}, 1/2)^2.$$

Si n est impair, $\chi_{p^n}=\chi_p$, $\chi_{p^{n+1}}=1$, l'égalité ci-dessus est triviale. Si n est pair, on a $n\geqq 2$, i.e. $n(\mu)\geqq 2$, et on applique le lemme 1, 3 :

$$\varepsilon(\mu\chi_p, 1/2)=\chi_p(-a(\mu)\,p^{-n})\,\varepsilon(\mu, 1/2),$$

d'où :

$$\varepsilon(\mu\chi_p, 1/2)^2=\varepsilon(\mu, 1/2)^2.$$

(*b*) Supposons $n(\mu^{-1}\chi_0)=0$. On a les égalités :

$$\mathrm{C}(a)^{-2}=\mu^{-1}\chi_0(p^{v_p(a)}),$$

$$\varepsilon(\mu\chi_a, 1/2)=\varepsilon(\mu\chi_0^{-1}\chi_0\chi_a, 1/2)=\mu\chi_0^{-1}(p^{-n})\,\varepsilon(\chi_0\chi_a, 1/2),$$

$$\mu(ap^{-v_p(a)})=\chi_0(ap^{-v_p(a)}),$$

d'où :

$$\mathrm{J}(a)=\delta\chi_0(a)\,\varepsilon(\chi_0\chi_a, 1/2),$$

avec :

$$\delta=\mu\chi_0^{-1}(p^{-n}).$$

Cas 3. – Si $v_p(a)=0$, μ, χ_0, $\mu\chi_a$ sont non ramifiés. On a :

$$\mathrm{C}(a)^{-2}=(1+\mu\chi_a(p)\,p^{-1/2})^{-2}=(1-\mu(p^2)\,p^{-1})^{-2}(1-\mu\chi_a(p)\,p^{-1/2})^2$$
$$=(1-\mu(p^2)\,p^{-1})^{-2}\,\mathrm{L}(\mu\chi_a, 1/2)^{-2},$$

$$\varepsilon(\mu\chi_a, 1/2)=\varepsilon(\chi_0\chi_a, 1/2)=1,$$

$$\mu(a)=\chi_0(a)=1;$$

– si $v_p(a)=1$, on a $n(\mu\chi_a)=1$ et :

$$\mathrm{C}(a)^{-2}=(1-\mu(p^2)\,p^{-1})^{-2},$$

$$\mathrm{L}(\mu\chi_a, 1/2)=1,$$

$$\varepsilon(\mu\chi_a, 1/2)=\varepsilon(\mu\chi_0^{-1}\chi_0\chi_a, 1/2)=\mu^{-1}\chi_0(p)\,\varepsilon(\chi_0\chi_a, 1/2),$$

$$\mu(ap^{-1})=\chi_0(ap^{-1}).$$

Dans les deux cas :

$$\mathrm{J}(a)=\delta\chi_0(a)\,\varepsilon(\chi_0\chi_a, 1/2),$$

avec :

$$\delta=(1-\mu(p^2)\,p^{-1})^{-2}.$$

Cas 5. — Ici $\mu|_{\mathbb{Z}_p^\times}=\chi_0|_{\mathbb{Z}_p^\times}=\chi_p|_{\mathbb{Z}_p^\times}$. Si $v_p(a)=0$, on a $n(\mu\chi_a)=1$, et :

$$C(a)=L(\mu\chi_a,\ 1/2)=1,$$
$$\varepsilon(\mu\chi_a,\ 1/2)=\varepsilon(\mu\chi_0^{-1}\chi_0\chi_a,\ 1/2)=\mu^{-1}\chi_0(p)\,\varepsilon(\chi_0\chi_a,\ 1/2),$$
$$\mu(a)=\chi_0(a).$$

Si $v_p(a)=1$, $\mu\chi_a$ est non ramifié :

$$C(a)^{-2}=\mu^{-1}\chi_0(p^2)(1-\mu\chi_a(p)p^{-1/2})^2=\mu^{-1}\chi_0(p^2)\,L(\mu\chi_a,\ 1/2)^{-2},$$
$$\varepsilon(\mu\chi_a,\ 1/2)=\varepsilon(\chi_0\chi_a,\ 1/2)=1,$$
$$\mu(ap^{-1})=\chi_0(ap^{-1}).$$

Dans les deux cas :

$$J(a)=\delta\chi_0(a)\,\varepsilon(\chi_0\chi_a,\ 1/2),$$

où $\delta=\mu^{-1}\chi_0(p)$.

Cas 7. — Le caractère μ^2 est ramifié, donc $n(\mu)\geqq 4$, $n(\mu\chi_a)\geqq 4$, et $L(\mu\chi_a,\ 1/2)=1$. Posons $n=\tilde{n}_2=n(\mu)$:

(a) Supposons $n(\mu\chi_0)=0$;

— si $v_2(a)=0$, on a $n(\chi_a)\leqq 2$, on peut utiliser le lemme 1, 3 :

$$C(a)^{-2}=\mu^{-2}(a)(a.a(\mu\chi_{2^n}),\ -1)\,\varepsilon(\mu^{-1}\chi_{2^n},\ 1/2)^{-2}$$
$$=\mu^{-2}(a)(a.a(\mu\chi_{2^n}),\ -1)\,\varepsilon(\mu\chi_{2^n},\ 1/2)^2,$$
$$\varepsilon(\mu\chi_a,\ 1/2)=\chi_a(-a(\mu)2^n)\,\varepsilon(\mu,\ 1/2),$$
$$\varepsilon(\chi_0\chi_a,\ 1/2)=\chi_a(-a(\chi_0)2^n)\,\varepsilon(\chi_0,\ 1/2),$$
$$\varepsilon(\chi_0,\ 1/2)=\mu\chi_0(2^{-n})\,\mu(-1)\,\varepsilon(\mu,\ 1/2)^{-1},$$
$$\mu(a)=\chi_0(a)^{-1}.$$

Comme $\chi_0|_{\mathbb{Z}_2^\times}=\mu^{-1}|_{\mathbb{Z}_2^\times}$, on a $a(\chi_0)=-a(\mu)$, d'où :

$$J(a)=\delta_0\,\chi_0(a)\,\varepsilon(\chi_0\chi_a,\ 1/2),$$

avec :

$$\delta_0=\mu\chi_0(2^n)\,\mu(-1)(a(\mu\chi_{2^n}),\ -1)\,\varepsilon(\mu,\ 1/2)^2\,\varepsilon(\mu\chi_{2^n},\ 1/2)^2;$$

— si $v_2(a)=1$, on écrit $a=(a2^{-1})2$, avec $n(\chi_{a2^{-1}})\leqq 2$. Alors :

$$C(a)^{-2}=\mu\chi_0(2)(a.a(\mu\chi_{2^{n+1}}),\ -1)\,\varepsilon(\mu\chi_{2^{n+1}},\ 1/2)^2,$$
$$\varepsilon(\mu\chi_a,\ 1/2)=\chi_{2a}(-a(\mu\chi_2)2^n)\,\varepsilon(\mu\chi_2,\ 1/2),$$
$$\varepsilon(\chi_0\chi_a,\ 1/2)=\chi_{2a}(-a(\chi_0\chi_2)2^n)\,\varepsilon(\chi_0\chi_2,\ 1/2),$$
$$\varepsilon(\chi_0\chi_2,\ 1/2)=\mu\chi_0(2^{-n})\,\mu\chi_2(-1)\,\varepsilon(\mu\chi_2,\ 1/2)^{-1}=\mu\chi_0(2^{-n})\,\mu(-1)\,\varepsilon(\mu\chi_2,\ 1/2)^{-1},$$
$$\mu(a2^{-1})=\chi_0(a2^{-1})^{-1}.$$

On obtient :

$$J(a)=\delta_1\,\chi_0(a)\,\varepsilon(\chi_0\chi_a,\ 1/2),$$

avec :

$$\delta_1 = \mu\chi_0(2^n)\,\mu(-1)(a(\mu\chi_{2^{n+1}}),\ -1)\,\varepsilon(\mu\chi_2,\ 1/2)^2\,\varepsilon(\mu\chi_{2^{n+1}},\ 1/2)^2.$$

Il reste à montrer que $\delta_0 = \delta_1$, i.e. :

$$(a(\mu\chi_{2^n}),\ -1)\,\varepsilon(\mu,\ 1/2)^2\,\varepsilon(\mu\chi_{2^n},\ 1/2)^2 = (a(\mu\chi_{2^{n+1}}),\ -1)\,\varepsilon(\mu\chi_2,\ 1/2)^2\,\varepsilon(\mu\chi_{2^{n+1}},\ 1/2)^2.$$

Si n est impair, $n \geqq 5$, donc la partie entière de $(n+1)/2$ est $\geqq 3$, i.e. $\geqq n(\chi_2)$. Alors $a(\mu\chi_2) = a(\mu)$, et la formule est immédiate. Si n est pair et $n \geqq 6$, on a de même $a(\mu\chi_2) = a(\mu)$, et, d'après le lemme 1, 3, $\varepsilon(\mu\chi_2,\ 1/2)^2 = \varepsilon(\mu,\ 1/2)^2$, d'où l'égalité ci-dessus. Supposons $n = 4$. Pour $u \in \mathbb{Z}_2$, $\chi_2(1+4u) = \psi(u\,2^{-1})$. On en déduit :

$$a(\mu\chi_2) = a(\mu) + 2,$$
$$(a(\mu\chi_2),\ -1) = -(a(\mu),\ -1).$$

Le lemme 1, 2, montre que :

$$\varepsilon(\mu,\ 1/2) = \mu(-a(\mu)\,2^{-4})\,\psi(-2^{-4}\,a(\mu)),$$
$$\varepsilon(\mu\chi_2,\ 1/2) = \mu\chi_2(-[a(\mu)+2]\,2^{-4})\,\psi(-[a(\mu)+2]\,2^{-4}),$$

d'où :

$$\varepsilon(\mu\chi_2,\ 1/2)^4 = \varepsilon(\mu,\ 1/2)^4\,\mu(1+2\,a(\mu)^{-1})^4\,\psi(-2^{-3})^4.$$

Or $(1+2\,a(\mu)^{-1})^4 \in 1 + 2^4\,\mathbb{Z}_2$, donc :

$$\mu(1+2\,a(\mu)^{-1})^4 = 1.$$

De plus $\psi(-2^{-3})^4 = \psi(-2^{-1}) = -1$, d'où :

$$\varepsilon(\mu\chi_2,\ 1/2)^4 = -\varepsilon(\mu,\ 1/2)^4.$$

On en déduit l'égalité à démontrer.

(*b*) Si $n(\mu^{-1}\chi_0) = 0$, le calcul est analogue à celui du cas 2, *b*.

Cas 8. — Si $v_2(a) = 0$, et $(a,\ -1) = \chi_0(-1)$, $\mu\chi_a$ est non ramifié. Alors :

$$\mathrm{C}(a)^{-2} = \chi_0\,\mu^{-1}(2^2)(1-\mu\chi_a(2)\,2^{-1/2})^2 = \chi_0\,\mu^{-1}(2^2)\,\mathrm{L}(\mu\chi_a,\ 1/2)^{-2},$$
$$\varepsilon(\mu\chi_a,\ 1/2) = \varepsilon(\chi_0\,\chi_a,\ 1/2) = 1,$$
$$\mu(a) = \chi_0(a);$$

— si $v_2(a) = 0$, et $(a,\ -1) = -\chi_0(-1)$, ou si $v_2(a) = 1$, on a $n(\mu\chi_a) = 2 + v_2(a)$. Alors :

$$\mathrm{C}(a) = 1,$$
$$\mathrm{L}(\mu\chi_a,\ 1/2) = 1,$$
$$\varepsilon(\mu\chi_a,\ 1/2) = \varepsilon(\mu\chi_0^{-1}\,\chi_0\,\chi_a,\ 1/2) = \mu^{-1}\,\chi_0(2^{2+v_2(a)})\,\varepsilon(\chi_0\,\chi_a,\ 1/2),$$
$$\mu(a\,2^{-v_2(a)}) = \chi_0(a\,2^{-v_2(a)}).$$

Dans les deux cas :

$$\mathrm{J}(a) = \delta\chi_0(a)\,\varepsilon(\chi_0\,\chi_a,\ 1/2),$$

avec :

$$\delta=\chi_0\,\mu^{-1}(2^2).$$

Cas 10. — Si $v_2(a)=0$, ou $v_2(a)=1$ et $(a,\,-1)=-\chi_0(-1)$, $\chi_0\,\chi_a$ est ramifié et $n(\chi_0\,\chi_a)=3-v_2(a)$. On a :

$$C(a)^{-2}=\chi_0\,\mu^{-1}(2^{-2+2v_2(a)}),$$
$$L(\mu\chi_a,\,1/2)=1,$$
$$\varepsilon(\mu\chi_a,\,1/2)=\mu^{-1}\,\chi_0(2^{3-v_2(a)})\,\varepsilon(\chi_0\,\chi_a,\,1/2),$$
$$\mu(a\,2^{-v_2(a)})=\chi_0(a\,2^{-v_2(a)});$$

— si $v_2(a)=1$ et $(a,\,-1)=\chi_0(-1)$, $\chi_0\,\chi_a$ est non ramifié. On a :

$$C(a)^{-2}=\chi_0\,\mu^{-1}(2^2)(1-\mu\chi_a(2)\,2^{-1/2})^2=\chi_0\,\mu^{-1}(2^2)\,L(\mu\chi_a,\,1/2)^{-2},$$
$$\varepsilon(\mu\chi_a,\,1/2)=\varepsilon(\chi_0\,\chi_a,\,1/2)=1,$$
$$\mu(a\,2^{-1})=\chi_0(a\,2^{-1}).$$

Dans les deux cas :

$$J(a)=\delta\chi_0(a)\,\varepsilon(\chi_0\,\chi_a,\,1/2),$$

avec :

$$\delta=\chi_0\,\mu^{-1}(2).$$

Cas 4, 6, 9, 11. — Ici $\rho_a\sim\sigma(\mu\chi_a,\,\mu^{-1}\,\chi_a)$, donc :

$$L(\rho_a,\,1/2)=L(\mu\chi_a,\,1/2),$$
$$J(a)=\mu(a)\,C(a)^{-2}\,\varepsilon(\mu\chi_a,\,1/2)\,L(\mu\chi_a,\,1/2)^2\,L(\mu^{-1}\,\chi_a,\,1/2)^{-1}.$$

Je dis que pour $a\in\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)\cap\mathbb{Z}_p$, cette expression a même valeur que l'expression de $J(a)$ dans les cas resp. 3, 5, 8, 10. Notons $C(a)$, $C'(a)$, les fonctions C du cas resp. 4, 6, 9, 11, et du cas resp. 3, 5, 8, 10. Il s'agit de montrer que :

$$C(a)^{-2}\,L(\mu^{-1}\,\chi_a,\,1/2)^{-1}=C'(a)^{-2}.$$

Si $\mu^{-1}\,\chi_a$ est ramifié, $L(\mu^{-1}\,\chi_a,\,1/2)=1$, et on vérifie sur les formules de définition que $C(a)=C'(a)$. Si $\mu^{-1}\,\chi_a$ est non ramifié, on a $\mu^{-1}\,\chi_a(p)=-p^{1/2}$ [en effet, $\mu^2=|.|$ et $\mu\chi_a\neq|.|^{1/2}$ puisque $a\in\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_p)$]. Alors :

$$L(\mu^{-1}\,\chi_a,\,1/2)=(1-\mu^{-1}\,\chi_a(p)\,p^{-1/2})^{-1}=2^{-1}.$$

On vérifie sur les formules que $C(a)=2^{1/2}\,C'(a)$. D'où l'égalité désirée. Le calcul dans les cas 4, 6, 9, 11, est donc le même que celui des cas 3, 5, 8, 10. $\square$

Les lemmes 38, 39, 40, et l'égalité 17, montrent que :

$$\underline{A}^T(t)^2=L(\rho\otimes\chi_{\nu\xi},\,1/2)\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\,\chi_{\nu\xi},\,1/2)\,[\prod_v|\xi|_v^{-1/2}\,\chi_{\xi,\,v}(2\nu)\,\chi_{0,\,v}^{-1}(\xi)].$$

Comme ξ, $\nu\in\mathbb{Q}^\times$, le produit infini est égal à 1. Comme $\nu\xi=t$, on obtient l'égalité de la proposition 18. $\square$

6. On revient au problème du I. Soient $\varphi_0\in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\chi}^2)$, V_0 le sous-espace irréductible de $\mathscr{A}_0(\chi^2)$ associé à φ_0, $V=V_0\otimes\chi_0^{-1}$, ρ_0 et ρ les représentations de $\mathscr{H}_A$ dans V_0 et V.

LEMME 41. — *Soit* N *un entier tel que* $4\mid N$, $\underline{\chi}$ *est défini modulo* N. *On a l'égalité :*

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)=\sum S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T_\nu(\rho)),$$

sommé sur les $\nu\in\mathbb{Q}^\times$ *tels que :*

(i) $\nu>0$;

(ii) $T_\nu(\rho)\neq\{0\}$;

(iii) *pour tout* p, $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_\nu(\rho_p))=\chi_{0,\,p}(-1)$.

Démonstration. — Soit T un sous-espace irréductible de $\mathscr{A}_{00}$ tel que $\mathscr{V}'(\psi, T)=V$ et $S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T)\neq\{0\}$. Soit $\nu\in\mathbb{Q}^\times$ tel que l'espace des ψ^ν-ièmes coefficients de Fourier de T soit non nul. Alors $\mathscr{V}(\psi^\nu, T)\neq\{0\}$ ([W], prop. 26), et $\mathscr{V}(\psi^\nu, T)=V\otimes\chi_\nu$ ([W], V, 4), donc $T=T_\nu(\rho)$ ([W], prop. 27, iv, et théorème de multiplicité 1). Comme $S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T)\neq\{0\}$, on a :

1° $\tilde{\rho}_\nu(\rho_{\mathbb{R}})$ est de la série discrète de poids minimal $k/2$, donc $\nu>0$ ([W], prop. 20);

2° pour tout p, $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_\nu(\rho_p))=\chi_{0,\,p}(-1)$ (th. 2, 1).

Réciproquement $\mathscr{V}'(\psi, T_\nu(\rho))=V$ pour tout $\nu\in\mathbb{Q}^\times$ tel que $T_\nu(\rho)\neq\{0\}$ ([W], prop. 29). Le lemme résulte alors du corrollaire à la proposition 4. $\square$

PROPOSITION 2 (Flicker). — *Il existe* N *tel que* $S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)\neq\{0\}$ *si et seulement si l'hypothèse* (H1) *est vérifiée.*

Démonstration. — Soit S l'ensemble des places v telles que $\rho_{0,\,v}$ n'est pas de la série principale irréductible. Si $p\notin S$, il existe un caractère μ_p de $\mathbb{Q}_p^\times$ tel que $\rho_{0,\,p}\sim\pi(\mu_{1,\,p}, \mu_{2,\,p})$, où $\mu_{1,\,p}=\mu_p\chi_{0,\,p}$, $\mu_{2,\,p}=\mu_p^{-1}\chi_{0,\,p}$. On a $\mu_{1,\,p}(-1)=\mu_{2,\,p}(-1)=\mu_p\chi_{0,\,p}(-1)$, et $\rho_p\sim\pi(\mu_p, \mu_p^{-1})$. S'il existe N tel que $S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)\neq\{0\}$, il existe $\nu\in\mathbb{Q}^\times$ tel que $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_\nu(\rho_p))=\chi_{0,\,p}(-1)$ pour tout p (lemme 41). Pour $p\notin S$:

$$\underline{\omega}(\tilde{\rho}_\nu(\rho_p))=\chi_{\nu,\,p}(-1)\,\varepsilon(\rho_{\nu,\,p}, 1/2)$$

(assertion 10). Or $\rho_{\nu,\,p}\sim\pi(\mu_p\chi_{\nu,\,p}, \mu_p^{-1}\chi_{\nu,\,p})$ et $\varepsilon(\rho_{\nu,\,p}, 1/2)=\mu_p\chi_{\nu,\,p}(-1)$ ([JL], p. 105). On en déduit $\chi_{0,\,p}(-1)=\mu_p(-1)$, donc $\mu_{1,\,p}(-1)=\mu_{2,\,p}(-1)=1$.

Supposons que pour tout $p\notin S$, $\mu_{1,\,p}(-1)=\mu_{2,\,p}(-1)=1$. Soient $\mu'_{1,\,p}$, $\mu'_{2,\,p}$ des caractères de $\mathbb{Q}_p^\times$ tels que $\mu'^2_{1,\,p}=\mu_{1,\,p}$, $\mu'^2_{2,\,p}=\mu_{2,\,p}$. Notons $\tilde{G}_A$ le groupe métaplectique revêtement de degré 2 de G_A, $\underline{\tilde{\mathscr{H}}}_A$ son algèbre de Hecke. Il existe un sous-espace $\underline{T}$ irréductible de l'espace des formes automorphes paraboliques sur le groupe $\tilde{G}_A$, de caractère central χ_0, tel que pour tout $p\notin S$, $\tilde{\pi}_p\sim\tilde{\pi}(\mu'_{1,\,p}, \mu'_{2,\,p})$, où $\tilde{\pi}=\bigotimes_v\tilde{\pi}_v$ est la représentation de $\underline{\tilde{\mathscr{H}}}_A$ dans $\underline{T}$ ([F], th. 5, 3). Rappelons que pour $p\neq 2$, le groupe $K_p=GL_2(\mathbb{Z}_p)$ est scindé dans $\tilde{G}_p$, ce qui permet de l'identifier à un sous-groupe de $\tilde{G}_p$.

LEMME 42. — *Il existe un entier* N *divisible par* 4, *tel que* $\underline{x}$ *soit défini modulo* N, *et* $\underline{t}\in\underline{\mathrm{T}}$, $\underline{t}\neq 0$, *tels que :*

(i) *si* $p\nmid \mathrm{N}$, *pour tout* $k\in \mathrm{K}_p$, $\tilde{\pi}_p(k)\underline{t}=\underline{t}$;

(ii) *si* $p\mid \mathrm{N}$, $p\neq 2$, *pour tout* $k=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{K}_p(v_p(\mathrm{N}))$, $\tilde{\pi}_p(k)\underline{t}=\chi_{0,\,p}(d)\underline{t}$;

(iii) *pour tous* $a\in 1+4\mathbb{Z}_2$, $b\in\mathbb{Z}_2$, $c\in \mathrm{N}\mathbb{Z}_2$, $d\in\mathbb{Z}_2^{\times}$, *on a les égalités :*

$$\tilde{\pi}_2\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\underline{t}=\tilde{\pi}_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1\end{pmatrix}\underline{t}=\underline{t},\qquad \tilde{\pi}_2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}\underline{t}=\chi_{0,\,2}(d)\underline{t},$$

(iv) *pour tout* $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\tilde{\pi}_{\mathbb{R}}(\tilde{k}(\theta))\underline{t}=e^{ik\theta/2}\underline{t}.$$

Démonstration. — Les assertions (i) et (iv) sont immédiates : pour presque tout p, $\tilde{\pi}_p$ est de classe un, et $\tilde{\pi}_{\mathbb{R}}$ est de la série discrète de poids $k/2$ ([F], 5, 3). Choisissons pour toute place p un modèle de Whittaker $\underline{\mathrm{T}}_p$ de $\tilde{\pi}_p$ relatif à ψ_p [GPS], et considérons l'espace des fonctions $a\mapsto \underline{t}_p(\underline{a})$, pour $\underline{t}_p\in\underline{\mathrm{T}}_p$. Par des arguments standards, cet espace contient l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^{\times})$. Soit $\underline{t}_p\in\underline{\mathrm{T}}_p$ tel que $\underline{t}_p(\underline{\underline{a}})=\mathrm{car}(\mathbb{Z}_p^{\times}, a)$. En remplaçant au besoin $\underline{t}_p$ par :

$$\int_{\mathbb{Z}_p^{\times}\times\mathbb{Z}_p}\tilde{\pi}_p(\underline{\underline{ab}})\,\underline{t}_p\,d^{\times}a\,db,$$

on peut supposer que $\underline{t}_p$ est invariante par $\tilde{\pi}_p(\underline{b})$ et $\tilde{\pi}_p(\underline{\underline{a}})$ pour $b\in\mathbb{Z}_p$, $a\in\mathbb{Z}_p^{\times}$. Si $d\in\mathbb{Z}_p^{\times 2}$, on a l'égalité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}=\underline{\underline{d^{-1}}}\,z(d),$$

et $z(d)$ appartient au centre de $\tilde{\mathrm{G}}_{\mathrm{A}}$. Alors $\tilde{\pi}_p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}\underline{t}_p=\chi_{0,\,p}(d)\,\underline{t}_p$. Posons $\mathrm{U}_p=\mathbb{Z}_p^{\times}$, si $p\neq 2$, $\mathrm{U}_2=1+4\mathbb{Z}_2$. L'ensemble :

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix};\ a\in\mathrm{U}_p,\ d\in\mathbb{Z}_p^{\times}\right\},$$

est un groupe abélien, contenant :

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix};\ a\in\mathrm{U}_p,\ d\in\mathbb{Z}_p^{\times 2}\right\},$$

comme sous-groupe d'indice fini. D'après les propriétés de $\underline{t}_p$, il est clair par induction qu'il existe un caractère η de $\mathbb{Z}_p^{\times}$ tel que $\eta^2=\chi_{0,\,p\mid\mathbb{Z}_p^{\times}}^2$ et :

$$\int_{\mathrm{U}_p\times\mathbb{Z}_p^{\times}}\tilde{\pi}_p\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}\underline{t}_p\,\eta^{-1}(d)\,d^{\times}a\,d^{\times}d\neq 0.$$

Remplaçons $\underline{t}_p$ par cette intégrale. Alors pour tous $b \in \mathbb{Z}_p$, $a \in \mathrm{U}_p$, $d \in \mathbb{Z}_p^\times$:

$$\tilde{\pi}_p(\underline{b})\underline{t}_p = \underline{t}_p, \qquad \tilde{\pi}_p\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\underline{t}_p = \eta(d)\underline{t}_p.$$

Il existe $\nu \in \mathbb{Q}_p^\times$ tel que $\eta = \chi_{0,p}\chi_{\nu|\mathbb{Z}_p^\times}$. On peut supposer $v_p(\nu) \leqq 0$. En remplaçant $\underline{t}_p$ par $\hat{\pi}_p(\underline{\underline{\nu}})\ t_p$, on peut supposer $\eta = \chi_{0,p|\mathbb{Z}_p^\times}$. Comme $\hat{\pi}_p$ est admissible, il existe un entier n_p *tel* que $\underline{t}_p$ soit invariant par $\tilde{\pi}_p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ pour tout c tel que $v_p(c) \geqq n_p$. En choisissant N divisible par p^{n_p}, $\underline{t}_p$ vérifie la condition (ii) ou (iii) de l'énoncé. □

LEMME 43. — *Soient $\underline{t}$ et* N *vérifiant les conditions du lemme précédent, t la restriction de $\underline{t}$ à* $\tilde{\mathrm{S}}_\mathrm{A} \subset \tilde{\mathrm{G}}_\mathrm{A}$. *Alors* $t \neq 0$, *et* $t \in \tilde{\mathscr{A}}'_{k/2}(\mathrm{N}, \chi_0)$.

Démonstration. — Comme $\underline{t} \neq 0$, il existe $g \in \tilde{\mathrm{G}}_\mathrm{A}$ tel que $\underline{t}(g) \neq 0$. Comme $\mathrm{A}^\times = \mathbb{Q}^\times(\mathbb{R}_+^\times \times \prod_p \mathbb{Z}_p^\times)$, il existe $a \in \mathbb{Q}^\times$ tel que $a^{-1}\det g = (d_v)$, où $d_\mathbb{R} \in \mathbb{R}_+^\times$, $d_p \in \mathbb{Z}_p^\times$ pour tout p. Soient $u = \sqrt{d_\mathbb{R}}$, g' l'élément de $\tilde{\mathrm{G}}_\mathrm{A}$ de composante réelle $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, de composante en p $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_p \end{pmatrix}$. Il existe $\sigma \in \tilde{\mathrm{S}}_\mathrm{A}$ tel que $g = \underline{\underline{a}}\sigma g'$. Or $\underline{t}$ est invariante à gauche par $\underline{\underline{a}}$ et se transforme sous g' par un scalaire non nul (lemme 42, et $g'_\mathbb{R}$ est dans le centre de $\tilde{\mathrm{G}}_\mathbb{R}$). Donc $\underline{t}(\sigma) \neq 0$, et $t \neq 0$. Il est clair que $t \in \tilde{\mathscr{A}}_0$. Considérons les conditions (i) à (v) définissant $\tilde{\mathscr{A}}'_{k/2}(\mathrm{N}, \chi_0)$. Il est clair que t les vérifie, sauf peut-être (iii). En $p=2$, on a $\tilde{\rho}_2(d(\alpha))t = \tilde{\gamma}_2(\alpha)\chi_{0,2}(\alpha)^{-1}t$, pour $\alpha \in 1+4\mathbb{Z}_2$ (lemme 42, iii), et il faut voir que cette relation est vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2^\times$. Comme $\mathbb{Z}_2^\times/1+4\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$, il s'agit de prouver l'égalité :

$$\tilde{\rho}_2(d_2(-1))t = \tilde{\gamma}_2(-1)\chi_{0,2}(-1)t.$$

On a $d_2(-1) = z_2(-1)$, et pour tout v, $z_v(-1)$ est central dans $\tilde{\mathrm{S}}_v$. Pour $\sigma \in \tilde{\mathrm{S}}_\mathrm{A}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_2(d_2(-1))t(\sigma) = t(\sigma z_2(-1)) = t(z_2(-1)\sigma)\\ = t([z(-1), (-1,-1)_2](\prod_{v\neq 2} z_v(-1))\sigma)\\ = (-1,-1)_2\, t(\sigma(\prod_{v\neq 2} z_v(-1))) = -\tilde{\rho}(\prod_{v\neq 2} z_v(-1))t(\sigma),\end{aligned}$$

par invariance de t sous $\mathrm{S}_\mathbb{Q}$. Pour $p \neq 2$:

$$\tilde{\rho}_p(z_p(-1))t = \chi_{0,p}(-1)t$$

et :

$$\tilde{\rho}_\mathbb{R}(z_\mathbb{R}(-1))t = \tilde{\rho}_\mathbb{R}(\tilde{k}(\pi))t = e^{ik\pi/2}t.$$

Mais :

$$\prod_{p\neq 2}\chi_{0,p}(-1) = \chi_{0,2}(-1)\chi_{0,\mathbb{R}}(-1),$$

$$\chi_{0,\mathbb{R}}(-1)=\chi_{\mathbb{R}}(-1)(-1)^{(k-1)/2}=(-1)^{(k-1)/2},$$
$$e^{ik\pi/2}=e^{i\pi/2}(-1)^{(k-1)/2}=-\tilde{\gamma}_2(-1)(-1)^{(k-1)/2},$$

d'où :

$$\tilde{\rho}(\prod_{v\neq 2} z_v(-1))\,t=-\tilde{\gamma}_2(-1)\chi_{0,2}(-1)\,t,$$

et :

$$\tilde{\rho}_2(d_2(-1))\,t(\sigma)=\tilde{\gamma}_2(-1)\chi_{0,2}(-1)\,t(\sigma). \quad \square$$

LEMME 44. — *Soit* $f=s^{-1}(t)$. *Alors* $f\in S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)$.

Démonstration. — Soit S′ un ensemble fini de places contenant S, tel que pour $p\notin S'$, $\underline{t}$ soit invariant par K_p. Soit $p\notin S'$. Comme $\tilde{\pi}_p\sim\tilde{\pi}(\mu'_{1,p}, \mu'_{2,p})$, un calcul classique montre que :

$$\sum_{u\in\mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p}\tilde{\pi}_p\left(\underline{u}\begin{pmatrix}p^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\underline{t}+\sum_{u\in(\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)^\times}(p, u)_p\tilde{\pi}_p\left(\underline{up^{-1}}\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\right)\underline{t}$$
$$+\tilde{\pi}_p\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^2\end{pmatrix}\underline{t}=p(\mu_{1,p}(p)+\mu_{2,p}(p))\underline{t}.$$

On a les égalités :

$$\left.\begin{pmatrix}p^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|_p=[z_p(p), (p, -1)_p]\,d_p(p),$$
$$\left.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^2\end{pmatrix}\right|_p=[z_p(p), (p, -1)_p]\,d_p(p^{-1}).$$

Posons :

$$\underline{t}'=\sum_{u\in\mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p}\tilde{\pi}_p(\underline{u}\,d_p(p))\underline{t}+\sum_{u\in(\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p)^\times}(p, -u)_p\tilde{\pi}_p(\underline{up^{-1}})\underline{t}+\tilde{\pi}_p(d_p(p^{-1}))\underline{t}.$$

Alors :

$$(p, -1)_p\tilde{\pi}_p(z_p(p))\underline{t}'=p(\mu_{1,p}(p)+\mu_{2,p}(p))\underline{t}.$$

Soit $\sigma\in\tilde{S}_A$. Les éléments $z_v(p)$ commutent à σ. Par le même argument qu'au lemme 43 :

$$\tilde{\pi}_p(z_p(p))\underline{t}'(\sigma)=(-1, p)_p\tilde{\pi}(\prod_{v\neq p} z_v(p^{-1}))\underline{t}'(\sigma).$$

Soit $\varepsilon\in\{\pm 1\}$ tel que $p\in\varepsilon+4\mathbb{Z}_2$. Alors $z_2(p^{-1})=z_2(\varepsilon)z_2(\varepsilon p^{-1})$, et $\varepsilon p^{-1}\in 1+4\mathbb{Z}_2$. D'après le lemme 42, et puisque $z_{\mathbb{R}}(p^{-1})$ est central :

$$\tilde{\pi}(\prod_{v\neq p} z_v(p^{-1}))\underline{t}'=(\prod_{v\neq p}\chi_{0,v}(p^{-1}))\chi_{0,2}(\varepsilon)\tilde{\pi}_2(z_2(\varepsilon))\underline{t}'=\chi_{0,p}(p)\chi_{0,2}(\varepsilon)\tilde{\pi}_2(z_2(\varepsilon))\underline{t}'.$$

Par ailleurs, $\mu_{1,p}(p)+\mu_{2,p}(p)=\lambda_p=\lambda_p(\varphi_0)$ (III, A, 3). On obtient :

$$\chi_{0,p}(p)\chi_{0,2}(\varepsilon)\underline{t}'(\sigma z_2(\varepsilon))=p\lambda_p\underline{t}(\sigma).$$

Pour $\sigma\in\tilde{S}_A$, $\underline{t}(\sigma)=t(\sigma)$, $\underline{t}'(\sigma)=\tilde{T}_p\,t(\sigma)$. Donc :

$$\tilde{T}_p\,t(\sigma z_2(\varepsilon))=p\chi_{0,p}(p^{-1})\chi_{0,2}(\varepsilon)\lambda_p\,t(\sigma).$$

Mais $t \in \mathscr{A}'_{k/2}(\mathrm{N}, \chi_0)$, donc $\tilde{\mathrm{T}}_p t \in \mathscr{A}'_{k/2}(\mathrm{N}, \chi_0)$, donc :

$$\tilde{\rho}_2(z_2(\varepsilon))\tilde{\mathrm{T}}_p t = \tilde{\gamma}_2(\varepsilon)\chi_{0,2}(\varepsilon)\tilde{\mathrm{T}}_p t.$$

Par réciprocité, $\tilde{\gamma}_2(\varepsilon) = \tilde{\gamma}_2(p) = \tilde{\gamma}_p(p)^{-1}$, et finalement :

$$\tilde{\mathrm{T}}_p t(\sigma) = p\chi_{0,p}(p^{-1})\tilde{\gamma}_p(p)\lambda_p t(\sigma).$$

D'après le lemme 4, $f \in \mathrm{S}_{k/2}(\mathrm{N}, \underline{\chi}, \varphi_0)$. □

Donc $\mathrm{S}_{k/2}(\mathrm{N}, \underline{\chi}, \varphi_0) \neq \{0\}$, ce qui démontre la proposition 2. □

PROPOSITION 19. — *Supposons l'hypothèse* (H1) *vérifiée. Alors pour tout p :*

(i) $\omega_p(\varphi_0) \neq \emptyset$;

(ii) *si* $p \notin \mathrm{S}$, $\omega_p(\varphi_0) = \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2}$;

(iii) *si* $\rho_{0,p} \sim \sigma(\mu_{1,p}, \mu_{2,p})$ *et* $\mu_{1,p}(-1) = \mu_{2,p}(-1) = 1$, $\omega_p(\varphi_0) = \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2} - \{\nu\}$, *où* ν *est tel que* $\mu_{1,p}\chi_{0,p}^{-1} = \chi_\nu|\cdot|_p^{1/2}$;

(iv) *si* $\rho_{0,p} \sim \sigma(\mu_{1,p}, \mu_{2,p})$ *et* $\mu_{1,p}(-1) = \mu_{2,p}(-1) = -1$, $\omega_p(\varphi_0) = \{\nu\}$, *où* ν *est défini comme au* (iii).

Démonstration. — Comme $\mathrm{S}_{k/2}(\mathrm{N}, \underline{\chi}, \varphi_0) \neq \{0\}$ (prop. 2), le (i) est évident par définition. D'après le lemme 41, il existe $\nu_0 \in \mathbb{Q}^\times$ tel que $\mathrm{T}_{\nu_0}(\rho) \neq \{0\}$ et $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_{\nu_0}(\rho_p)) = \chi_{0,p}(-1)$. Les lemmes 6 et 41 montrent alors que :

$$\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_{\nu_0}(\rho_p)) \subset \omega_p(\varphi_0) \subset \bigcup_{\nu_1} \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p)),$$

union prise sur les $\nu_1 \in \mathbb{Q}_p^\times$ tels que $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p)) = \chi_{0,p}(-1)$. Il suffit de démontrer que pour tout ν_1 vérifiant cette égalité, $\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p))$ est l'ensemble défini dans l'énoncé. Pour tout p tel que $\rho_{0,p} \sim \pi(\mu_{1,p}, \mu_{2,p})$ ou $\sigma(\mu_{1,p}, \mu_{2,p})$, posons $\mu_p = \mu_{1,p}\chi_{0,p}^{-1}$. Soit $\nu_1 \in \mathbb{Q}_p^\times$ comme ci-dessus.

Si $p \notin \mathrm{S}$, $\rho_p \sim \pi(\mu_p, \mu_p^{-1})$, et $\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p) \sim \tilde{\pi}_{\mu_p}$ ([W], prop. 18). Alors $\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p)) = \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2}$ (assertion 8 et [W], prop. 18).

Si $\rho_p \sim \sigma(\chi_\nu|\cdot|^{1/2}, \chi_\nu|\cdot|^{-1/2})$, avec $\chi_\nu(-1) = \chi_{0,p}(-1)$, on a $\rho_{\nu_1,p} \sim \sigma(\chi_{\nu\nu_1}|\cdot|^{1/2}, \chi_{\nu\nu_1}|\cdot|^{-1/2})$. Alors :

$$\underline{\omega}(\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p)) = \chi_{\nu_1}(-1)\varepsilon(\rho_{\nu_1,p}, 1/2)$$

(assertion 10), donc :

$$\underline{\omega}(\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p)) = \begin{cases} \chi_\nu(-1) & \text{si } \nu\nu_1 \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \\ -\chi_\nu(-1) & \text{si } \nu\nu_1 \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \end{cases}$$

([JL], prop. 3,6). Comme $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p)) = \chi_{0,p}(-1)$, on a $\nu\nu_1 \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$. Alors $\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p) \sim \tilde{\sigma}_{\mu_p}$, et $\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p)) = \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2} - \{\nu\}$ ([W], prop. 18, et assertion 8).

Si $\rho_p \sim \sigma(\chi_\nu|\cdot|^{1/2}, \chi_\nu|\cdot|^{-1/2})$, avec $\chi_\nu(-1) = -\chi_{0,p}(-1)$, on a de même $\nu\nu_1 \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$, $\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p)$ est supercuspidale et $\mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_{\nu_1}(\rho_p)) = \{\nu\}$. □

LEMME 45. — *Soient* ν_1, ν_2 *deux éléments de* $\mathbb{Q}^\times$ *tels que* $T_{\nu_1}(\rho)\neq\{0\}$, $T_{\nu_2}(\rho)\neq\{0\}$. *Si* $T_{\nu_1}(\rho)\neq T_{\nu_2}(\rho)$, *les ensembles* $\mathbb{Q}^\times_{\mathrm{loc}}(\tilde\rho_{\nu_1}(\rho))$ *et* $\mathbb{Q}^\times_{\mathrm{loc}}(\tilde\rho_{\nu_2}(\rho))$ *sont disjoints.*

Démonstration. — S'ils ne sont pas disjoints, soit u appartenant à leur intersection. Pour $i=1$ ou 2, et toute place v, $\mathscr{V}'(\psi, T_{\nu_i}(\rho))=V$, $u\in\mathbb{Q}^\times_v(\tilde\rho_{\nu_i}(\rho_v))$, donc $\tilde\rho_{\nu_i}(\rho_v)\sim\tilde\rho_u(\rho_v)$ (assertion 8). Donc $\tilde\rho_{\nu_1}(\rho_v)\sim\tilde\rho_{\nu_2}(\rho_v)$, et $T_{\nu_1}(\rho)=T_{\nu_2}(\rho)$ d'après le théorème de multiplicité un. □

Soit $t\in\mathbb{N}^{sc}$. S'il existe $\nu\in\mathbb{Q}^\times$, tel que $\nu>0$, $T_\nu(\rho)\neq\{0\}$, $\underline{\omega}(\tilde\rho_\nu(\rho_p))=\chi_{0,p}(-1)$ pour tout p, et $t\in\mathbb{Q}^\times_{\mathrm{loc}}(\tilde\rho_\nu(\rho))$, on pose $\underline{A}(t)=\underline{A}^T(t)$, où $T=T_\nu(\rho)$ (th. 2). Ce nombre est bien défini d'après le lemme ci-dessus. Sinon on choisit une racine carrée arbitraire $\underline{A}(t)$ de $L(\rho\otimes\chi_t, 1/2)\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_t, 1/2)$. On a ainsi défini une fonction $\underline{A}:\mathbb{N}^{sc}\to\mathbb{C}$.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\varphi_0\in S^{\mathrm{new}}_{k-1}(\underline{\chi}^2)$. *Supposons que* φ_0 *vérifie les hypothèses* (H1) *et* (H2). *La fonction* $\underline{A}$ *définie ci-dessus vérifie les propriétés :*

(i) *pour tout* $t\in\mathbb{N}^{sc}$:

$$\underline{A}(t)^2=L(\rho_0\otimes\chi_0^{-1}\chi_t, 1/2)\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_t, 1/2);$$

(ii) *pour tout entier* $N\geqq 1$:

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)=\oplus\overline{U}(E, \varphi_0, \underline{A})$$

sommé sur les entiers E *tels que* $\tilde N\,|\,E\,|\,N$.

(*Voir* I, III, A et VIII pour les notations.) Dans la suite, on pourra noter $\underline{A}^{\varphi_0}$ la fonction $\underline{A}$ ci-dessus.

Démonstration. — Le (i) est clair d'après les définitions et le théorème 2,2, i. Soit $\nu\in\mathbb{Q}^\times$, tel que $\nu>0$, $T_\nu(\rho)\neq\{0\}$, $\underline{\omega}(\tilde\rho_\nu(\rho))=\chi_{0,p}(-1)$ pour tout p. Pour un nombre premier p, on a :

$$\mathbb{Q}_p^\times(\tilde\rho_\nu(\rho_p))\subset\omega_p(\varphi_0),$$

d'après les lemmes 6 et 41, i.e. :

$$\omega_p(T_\nu(\rho))\subset\omega_p(\varphi_0),$$

avec les notations du théorème 2. Pour tout $e\in\mathbb{N}$, on a donc :

$$U_p(e, T_\nu(\rho))\subset U_p(e, \varphi_0).$$

Comme $\underline{A}(t)=\underline{A}^T(t)$ pour $t\in\mathbb{Q}^\times_{\mathrm{loc}}(\tilde\rho_\nu(\rho))$ [avec $T=T_\nu(\rho)$], on a l'inclusion :

$$\overline{U}(E, T_\nu(\rho), \underline{A})\subset\overline{U}(E, \varphi_0, \underline{A})$$

pour tout $E\geqq 1$, et :

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T_\nu(\rho))\subset\bigoplus_{E|N}\overline{U}(E, \varphi_0, \underline{A})$$

d'après le théorème 2,2, ii. Donc (lemme 41) :

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0) \subset \bigoplus_{E|N} \overline{U}(E, \varphi_0, \underline{A}).$$

Réciproquement, soit $E = \prod_v p^{e_v} \geq 1$, $\underline{c}_E = (c_v) \in \prod_v U_v(e_v, \varphi_0)$. Supposons $f(\underline{c}_E, \underline{A}) \neq 0$. Il existe un entier n tel que $a_n(f) \neq 0$. Posons $v = n^{sc}$. On a $v > 0$. Comme $a_n(f) \neq 0$, $\underline{A}(v) \neq 0$, donc $L(\rho \otimes \chi_v, 1/2) \neq 0$ et $T_v(\rho) \neq \{0\}$ ([W], th. 1). Soit p un nombre premier. On a $c_p(n) \neq 0$, donc $n \in \omega_p(\varphi_0)$. D'après le lemme 41, il existe $v' \in \mathbb{Q}^\times$ tel que $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_{v'}(\rho_p)) = \chi_{0,p}(-1)$, et $n \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_{v'}(\rho_p))$. Comme $v \in n\,\mathbb{Q}^{\times 2}$, $v \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_{v'}(\rho_p))$, donc $\tilde{\rho}_v(\rho_p) \sim \tilde{\rho}_{v'}(\rho_p)$ (assertion 8). Alors $\underline{\omega}(\tilde{\rho}_v(\rho_p)) = \chi_{0,p}(-1)$, et v vérifie les conditions du lemme 41. De plus $n \in \mathbb{Q}_p^\times(\tilde{\rho}_v(\rho_p)) = \omega_p(T_v(\rho))$ pour tout p. Si φ_0 n'est pas du cas 1, $U_p(e_p, \varphi_0) = U_p(e_p, T_v(\rho))$ par définition. Si φ_0 est du cas 1, nécessairement $c_p = \operatorname{car}(n\,\mathbb{Z}_p^{\times 2})$, puisque $c_p(n) \neq 0$, donc $c_p \in U_p(e_p, T_v(\rho))$ puisque $n \in \omega_p(T_v(\rho))$. En tout cas $c_p \in U_p(e_p, T_v(\rho))$. Donc (th. 2,2, ii) :

$$f(\underline{c}_E, \underline{A}) \in S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T_v(\rho)),$$

et, d'après le lemme 41 :

$$f(\underline{c}_E, \underline{A}) \in S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0). \quad \square$$

7. En fait, on peut conjecturer les assertions suivantes [1] :

QUESTION 1. — *Soient v une place de $\mathbb{Q}$, $\xi \in \mathbb{Q}_v^\times - \mathbb{Q}_v^{\times 2}$, ρ une représentation admissible irréductible de $\mathscr{H}_v$ dans un espace* V *de dimension infinie, de caractère central trivial. Alors* V *possède un élément non nul invariant par $O_{\xi, v}$ si et seulement si :*

$$\varepsilon(\rho \otimes \chi_\xi, 1/2) = \chi_\xi(-1)\,\varepsilon(\rho, 1/2).$$

Si ρ n'est pas supercuspidale, cette assertion est facilement démontrable.

QUESTION 2. — *Soient T_1, T_2, deux sous-espaces irréductibles de $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$, $\hat{\rho}_1$ et $\hat{\rho}_2$ les représentations de $\tilde{\mathscr{H}}_A$ dans T_1 et T_2. Supposons que pour toute place v, $\underline{\omega}(\hat{\rho}_{1,v}) = \underline{\omega}(\hat{\rho}_{2,v})$, et que pour presque toute place v, $\hat{\rho}_{1,v} \sim \hat{\rho}_{2,v}$. Alors $T_1 = T_2$.*

La conjecture 2 résulte de la conjecture 1 et des assertions 8, 9, 10. Si la conjecture 2 est vraie, il n'y a plus qu'un seul sous-espace irréductible de $\tilde{\mathscr{A}}_{00}$ intervenant dans la décomposition du lemme 41, et le théorème 1 se confond avec le théorème 2.

8. COROLLAIRE 1. — *Soit* N *un entier divisible par* 4. *Si le conducteur de $\underline{\chi}$ n'est pas divisible par* 16, *on suppose que* N *n'est pas divisible par* 8. *On a alors la décomposition :*

$$S_{k/2}(N, \underline{\chi}) = \bigoplus_{\varphi_0, E} \overline{U}(E, \varphi_0, \underline{A}^{\varphi_0}),$$

sommé sur les $\varphi_0 \in S_{k-1}^{new}(\underline{\chi}^2)$ vérifiant l'hypothèse (H1) *et sur les entiers* $E \geq 1$ *tels que* $\tilde{N}(\varphi_0) \mid E \mid N$.

[1] Ces assertions sont maintenant démontrées.

Démonstration. — On utilise la proposition 1 et le théorème 1. Le seul point à voir est que si $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\chi^2)$ est tel que $S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0) \neq \{0\}$, alors φ_0 vérifie (H2). Si le conducteur de $\underline{\chi}$ est divisible par 16, c'est évident. Sinon, par hypothèse $v_2(N)=2$. Il existe ν tel que $S_{k/2}(N, \underline{\chi}, T_\nu(\rho))=0$ (lemme 41), où ρ est associée à φ_0. La proposition 7, i, montre que $\tilde{\rho}_\nu(\rho_2)$ n'est pas supercuspidale, donc $\rho_{0,2}$ ne l'est pas non plus, et φ_0 vérifie (H2). □

COROLLAIRE 2. — *Soient $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\chi^2)$ vérifiant l'hypothèse* (H1), $N \geqq 1$, $f \in S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^{\text{sc}}$. *On suppose que $n_1/n_2 \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ pour tout $p \mid N$. Alors on a l'égalité :*

$$a_{n_1}(f)^2 \,L(\rho_0 \otimes \chi_0^{-1}\chi_{n_2}, 1/2)\,\underline{\chi}(n_2/n_1)\, n_2^{k/2-1} = a_{n_2}(f)^2\, L(\rho_0 \otimes \chi_0^{-1}\chi_{n_1}, 1/2)\, n_1^{k/2-1}.$$

Démonstration. — Supposons que φ_0 vérifie (H2), posons $\underline{A} = \underline{A}^{\varphi_0}$. Soient E un entier, $\tilde{N}(\varphi_0) \mid E \mid N$, $\underline{c}_E \in \prod_v U_v(e_v, \varphi_0)$, supposons $f = f(\underline{c}_E, \underline{A})$. Alors :

$$a_{n_1}(f) = \underline{A}(n_1^{\text{sc}}) \prod_v c_v(n_1),$$
$$a_{n_2}(f) = \underline{A}(n_2^{\text{sc}}) \prod_v c_v(n_2).$$

Si $p \mid N$, $n_1/n_2 \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$. Comme n_1 et n_2 sont sans facteur carré, $n_1/n_2 \in \mathbb{Z}_p^{\times 2}$. Alors par définition $c_p(n_1) = c_p(n_2)$. Si $p \nmid N$, il est clair que φ_0 est du cas 3, et $e_p = 0$, $c_p = c_p^0[\lambda_p]$. Alors $c_p(n_1) = c_p(n_2) = 1$. Si v est réelle, $c_v(n_1) = n_1^{(k-2)/4}$, $c_v(n_2) = n_2^{(k-2)/4}$, d'où :

$$a_{n_1}(f)\,\underline{A}(n_2^{\text{sc}})\, n_2^{(k-2)/4} = a_{n_2}(f)\,\underline{A}(n_1^{\text{sc}})\, n_1^{(k-2)/4}.$$

Par linéarité, cette relation est vraie pour tout $f \in S_{k/2}(N, \underline{\chi}, \varphi_0)$. En l'élevant au carré :

$$(18) \quad a_{n_1}(f)^2\, L(\rho_0 \otimes \chi_0^{-1}\chi_{n_2}, 1/2)\, \varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_{n_2}, 1/2)\, \varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_{n_1}, 1/2)^{-1}\, n_1^{k/2-1}$$
$$= a_{n_2}(f)^2\, L(\rho_0 \otimes \chi_0^{-1}\chi_{n_1}, 1/2)\, n_1^{k/2-1}.$$

Si v est réelle, ou si $v \mid N$, $\chi_{n_1, v} = \chi_{n_2, v}$, car $n_1/n_2 \in \mathbb{Q}_v^{\times 2}$, et $\varepsilon(\chi_{0,v}^{-1}\chi_{n_2,v}, 1/2) = \varepsilon(\chi_{0,v}^{-1}\chi_{n_1,v}, 1/2)$. Si $p \nmid N$, $\chi_{0,p}$ est non ramifié, et $p \neq 2$. Pour $i = 1, 2$, on a :

$$\varepsilon(\chi_{0,p}^{-1}\chi_{n_i,p}, 1/2) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_p(n_i) = 0, \\ \chi_{0,p}\chi_{n_i,p}(p)\,\tilde{\gamma}_p(p)^{-1} & \text{si } v_p(n_i) = 1, \end{cases}$$

(II, 7), en tout cas :

$$\varepsilon(\chi_{0,p}^{-1}\chi_{n_i,p}, 1/2) = \chi_{0,p}\chi_{n_i,p}(n_i)\,\tilde{\gamma}_p(n_i)^{-1}.$$

Alors :

$$\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_{n_2}, 1/2)\,\varepsilon(\chi_0^{-1}\chi_{n_1}, 1/2)^{-1} = \Big[\prod_{p \nmid N} \chi_{0,p}(n_2/n_1)\Big]\Big[\prod_{p \nmid N} \tilde{\gamma}_p(n_1)\,\tilde{\gamma}_p(n_2)^{-1}\,\chi_{n_1,p}(n_1)\,\chi_{n_2,p}(n_2)\Big].$$

Le deuxième produit peut être pris sur toutes les places de F car si $v \mid N$ ou si v est réelle, $n_2/n_1 \in \mathbb{Q}_v^{\times 2}$, et le terme en v de ce produit est égal à un. Par réciprocité, il disparaît. Le premier produit est égal à $\underline{\chi}(n_2/n_1)$. La formule (18) est celle de l'énoncé. En analysant la démonstration du th. 2, on se convainc que l'hypothèse (H2) n'est utilisée que pour comparer des coefficients de Fourier a_{n_1}, a_{n_2}, quand n_1 et n_2 ne sont pas dans la même classe modulo $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$. Ici par hypothèse $n_1/n_2 \in \mathbb{Q}_2^{\times 2}$ et l'hypothèse (H2) est superflue. □

9. PROPOSITION 20. — *Soient* V *un sous-espace irréductible de* $\mathscr{A}_0$, ρ *la représentation de* $\mathscr{H}_{\mathbb{A}}$ *dans* V. *Supposons que la composante réelle* $\rho_{\mathbb{R}}$ *est de la série discrète. Alors il existe* $v \in \mathbb{Q}^\times$ *tel que* $L(\rho \otimes \chi_v, 1/2) \neq 0$.

Démonstration. — Soient k tel que $\rho_{\mathbb{R}}$ est de poids $k-1$, S l'ensemble des places v telles que ρ_v ne soit pas de la série principale irréductible, S_1 l'ensemble des places p telles que $\rho_p \sim \pi(\mu_p, \mu_p^{-1})$, avec $\mu_p(-1) = -1$. Comme $S \neq \emptyset$ (la place réelle appartient à S), il existe un caractère χ de $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times$ tel que $\chi_v(-1) = -1$ pour $v \in S_1$, $\chi_v(-1) = 1$ pour $v \notin S \cup S_1$. Choisissons un tel caractère χ et supposons d'abord que $\chi_{\mathbb{R}}(-1) = 1$. Soit $\varphi_0 \in S_{k-1}^{\text{new}}(\underline{\chi}^2)$ l'élément associé à $\rho \otimes \chi_0 \left[\text{où } \chi_0 = \underline{\chi}\left(\dfrac{-1}{\cdot}\right)^{(k-1)/2} \right]$. En appliquant la proposition 2 et le lemme 41 au couple $\varphi_0, \underline{\chi}$, il existe $v \in \mathbb{Q}^\times$ tel que $T_v(\rho) \neq \{0\}$. Donc $L(\rho \otimes \chi_v, 1/2) \neq 0$ ([W], th. 1). Il est clair que la restriction $\chi_{\mathbb{R}}(-1) = 1$ n'a été faite que parce qu'on a considéré tout au long de l'article des formes modulaires holomorphes de poids demi-entier. On peut démontrer des analogues du lemme 41 et de la proposition 2 pour un caractère $\underline{\chi}$ tel que $\underline{\chi}(-1) = -1$ et les formes modulaires anti-holomorphes de poids demi-entier. Alors la restriction $\chi_{\mathbb{R}}(-1) = 1$ est superflue dans le raisonnement ci-dessus. □

BIBLIOGRAPHIE

[D] P. DELIGNE, *Formes modulaires et représentations de* GL(2), in *Modular Functions of One Variable II* (*Springer Lecture Notes*, n° 349, 1973).

[GPS] S. GELBART et I. PIATETSKI-SHAPIRO, *On Shimura's Correspondence for Modular Forms of Half Integral Weight* (*Proc. Int. Coll. Auto. Forms, Rep. Theory and Arith.*, Bombay, 1979).

[G] R. GODEMENT, *Notes on Jacquet-Langlands' Theory*, preprint I.A.S. 1972.

[JL] H. JACQUET et R. P. LANGLANDS, *Automorphic Forms on* GL(2) (*Springer Lecture Notes*, n° 114, 1970).

[Li] W. LI, *Newforms and Functional Equations* (*Math. Ann.*, vol. 212, 1975, p. 285-315).

[S] G. SHIMURA, *Modular Forms of Half Integral Weight*, in *Modular Functions of One Variable I* (*Springer Lecture Notes*, n° 320, 1973).

[Sh] T. SHINTANI, *On Construction of Holomorphic Cusp Forms of Half Integral Weight* (*Nagoya Math. J.*, vol. 58, 1975, p. 83-126).

[T] J. TATE, *Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions*, in *Algebraic Number Theory*, CASSELS et FRÖHLICH, éd., Academic Press, 1967.

[W] J. L. WALDSPURGER, *Correspondance de Shimura* (*J. Math. pures et appl.*, n° 60, 1980, p. 1-132).

[Weil] A. WEIL, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires* (*Acta Math.*, n° 111, 1964).

(Manuscrit reçu en juillet 1980.)

J.-L. WALDSPURGER
9, rue Victor-Considérant,
75014 Paris.