Matemática 2

Segundo Cuatrimestre — 2012

Práctica 7: Espacios con producto interno

1. Sea V un espacio vectorial sobre $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

a) Mostrar que existe exactamente un producto interno sobre V que hace de $\mathcal{B}$ una base ortonormal.

b) Determinar ese producto interno explícitamente en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^2$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,-2)\}$;

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$;

iii) $V = \mathbb{C}^4$, $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0,i), (0,1,0,i), (i,i,i,0), (0,2,0,0)\}$;

iv) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{x^i\}_{i=0}^3$;

2. Determinar para qué valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la forma bilineal

$$\langle x, y \rangle = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1+b)x_3y_3 + cx_1y_3$$

resulta un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

3. Sea $w : [-1,1] \to \mathbb{R}^+$ una función continua y positiva. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $V = \mathbb{R}[X]_n$, y definamos

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\, dx.$$

a) Mostrar que $\langle -, - \rangle$ es un producto interno sobre V.

b) Realizar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ cuando $n = 3$ y $w(x) \equiv 1$.

4. Hallar los complementos ortogonales de los siguientes subespacios, describiendo bases ortonormales de los mismos:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$, con respecto al producto interno usual;

b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1,2,1) \rangle$,

i) con respecto al producto interno canónico,

ii) con respecto al producto interno dado por

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1;$$

c) $V = \mathbb{R}[X]_4$, $S = \langle x^2, x^4 + x^2 + 1 \rangle$, con respecto al producto interno dado por $\langle p, q \rangle = \int_0^1 pq\, \mathrm{d}x$;

d) $V = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset C^\infty(\mathbb{R})$ con $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$ y $f_3(x) = x^2$, $S = \langle f_1 + f_2 \rangle$, y $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \frac{1}{2}f(1)g(1) + f(\frac{1}{2})g(\frac{1}{2})$;

5. *a*) Sea $V = \mathbb{R}^3[x]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1 \rangle$.

b) Sea $V = \mathcal{C}^\infty[-1,1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \mathsf{sen}(\pi x)$.
Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = \langle 1, x, x^2, x^3, \mathsf{sen}(\pi x) \rangle$.

c) Sea $V = \mathcal{C}^\infty[0,\pi]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\, dx$.

i) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{1, \cos(x), \mathsf{sen}(x)\}$.

ii) Sea S el subespacio de V generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

6. Sea p la proyección ortogonal de $V = \mathbb{R}^3$ sobre su subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : 2x_1 - x_2 = 0\}$ con respecto al producto interno usual.

a) Encontrar todas las rectas $L \subset V$ tales que $p(L) = \{(1,2,1)\}$.

b) Encontrar una recta $L_1 \subset V$ tal que $p(L_1) = L_2$, si $L_2 = \{x \in V : 2x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$.

7. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea p un proyector en V. Entonces

$$\mathsf{im}\, p \perp \mathsf{ker}\, p \iff \|p(x)\| \le \|x\| \text{ para todo } x \in V.$$

8. Determinar f^* si

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$;

b) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$;

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que si $\mathcal{B} = \{(1,2,-1), (1,0,0), (0,1,1)\}$, entonces

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

d) $f : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3$ tal que $f(p) = p'$, con respecto a los productos internos dados por $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$;

e) $f : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ tal que $f(A) = PAP^{-1}$, para una matriz inversible fija $P \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ y el producto interno $\langle A, B \rangle = \mathsf{tr}\, AB^*$ en $M_n(\mathbb{C})$.

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ con un producto interno y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que $\mathsf{im}(f^*) = (\mathsf{ker}(f))^\perp$.

10. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita con un producto interno, y $S \subset V$ un subespacio. Mostrar que la proyección ortogonal de V en S es un endomorfismo autoadjunto de V. Determine sus autovalores.

11. *a*) Encontrar en cada caso una matriz $O \in \mathsf{O}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que OAO^t sea diagonal, si

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

iii) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$;

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Encontrar en cada caso una matriz $U \in \mathsf{U}_n(\mathbb{C})$ unitaria tal que UAU^* sea diagonal, si

i) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$;

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.