Matemática 2

Segundo Cuatrimestre — 2012

Práctica 6: Forma normal de Jordan

1. Hallar la forma y una base de Jordan para la siguiente matriz en $M_9(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

2. Describir todas las formas de Jordan posibles de un endomorfismo nilpotente de un espacio vectorial de dimensión a lo sumo 6.

3. Sea $f \in \mathsf{End}(V)$ con $\dim V = 6$, de polinomio minimal X^6, y supongamos que $\{v_1, \ldots, v_6\}$ es base de Jordan para f. Encontrar la forma de Jordan para f^2, f^3, f^4 y f^5, y bases que las realicen.

4. Hallar una base en la que se realice la forma normal de Jordan, y la forma de Jordan, de la matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, con

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j; \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

5. Decidir si existen endomorfismos tales que

a) $f \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^8)$, nilpotente, y

$$(\operatorname{rk} f, \operatorname{rk} f^2, \operatorname{rk} f^3, \operatorname{rk} f^4, \operatorname{rk} f^5) = (6, 4, 3, 1, 0);$$

b) $f \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^{16})$, $m_f = X^5$, y

$$(\operatorname{rk} f, \operatorname{rk} f^2, \operatorname{rk} f^3, \operatorname{rk} f^4, \operatorname{rk} f^5) = (9, 5, 3, 1, 0).$$

En caso afirmativo, escribir sus matrices en forma de Jordan.

6. ¿Es cierto el siguiente enunciado?

Para todo n, dos endomorfismos nilpotentes de $\mathbb{C}^n$ con el mismo polinomio minimal y con el mismo rango son semejantes.

7. Determinar la forma normal de Jordan y una base de Jordan para las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Sea $V \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $\partial : V \to V$ la transformación lineal definida por $\partial(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para ∂.

9. Sea $A \in M_{15}(\mathbb{C})$ una matrix con autovalores λ_1 , λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

$$\mathrm{rk}(A - \lambda_1 Id) = 13,\ \mathrm{rk}(A - \lambda_1 Id)^2 = 11,\ \mathrm{rk}(A - \lambda_1 Id)^3 = 10,\ \mathrm{rk}(A - \lambda_1 Id)^4 = 10,$$

$$\mathrm{rk}(A - \lambda_2 Id) = 13,\ \mathrm{rk}(A - \lambda_2 Id)^2 = 11,\ \mathrm{rk}(A - \lambda_2 Id)^3 = 10,\ \mathrm{rk}(A - \lambda_2 Id)^4 = 9,$$

$$\mathrm{rk}(A - \lambda_3 Id) = 13,\ \mathrm{rk}(A - \lambda_3 Id)^2 = 12,\ \mathrm{rk}(A - \lambda_3 Id)^3 = 11.$$

Hallar su forma de Jordan.

10. Sea $A \in M_5(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar la forma de Jordan y calcular una base de Jordan para A.

b) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

†**11.** Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta$$

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Hallar una fórmula general para el término a_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

†**12.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$a_{ij} = \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.