Matemática 2
Segundo Cuatrimestre — 2012

Práctica 5: Autovalores y diagonalización

1. *a*) Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de las siguientes matrices, considerando por separado el caso en que los coeficientes están en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$;

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

iii) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

iv) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

v) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;

vi) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$;

vii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$;

viii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ix) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En todos los casos, $a \in \mathbb{K}$.

b) Interprete cada una de las matrices del ítem anterior como la matriz de una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente) con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$, y encuentre, cuando es posible, una base $\mathcal{B}$ de manera tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ es diagonal; en ese caso, encuentre la matriz de cambio de base $C(\mathcal{E}, \mathcal{B})$.

2. *a*) Sean $A, D \in M_n(k)$ y $C \in \mathsf{GL}_n(k)$ tales que $A = CDC^{-1}$. Mostrar que $A^k = CD^kC^{-1}$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$.

b) Calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

c) El objetivo de esta parte es encontrar una formula cerrada para la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0 = a_1 = 1$ y, si $n \geq 0$,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Considere el endomorfismo $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que, en la base canónica, está representado por la matriz

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Muestre que, para cada $n \geq 0$ es

$$f\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Encuentre ahora una base que diagonalice a f y use la primera parte de este ejercicio y el hecho de que

$$f^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

para obtener una fórmula cerrada para a_n en esos casos.

3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales x(0) = 3, y(0) = -1.

4. Sea $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) = f'$, la transformación lineal derivación. Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de D asociado al autovalor λ (en particular, D tiene infinitos autovalores).

5. Determinar qué matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in k$, $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, son diagonalizables.

6. *a*) Sea $A \in M_2(\mathbb{C})$ tal que todos sus coeficientes son reales y tal que $\binom{1+i}{2-i}$ es un autovector correspondiente al autovalor $1 + 3i$. Mostrar que A es diagonalizable, encontrar una base de autovectores, y determinar A.

b) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\binom{1}{-1}$ es un autovector de autovalor $\sqrt{2}$, y tal que $\chi_A \in \mathbb{Q}[t]$. Determinar si A es diagonalizable. ¿Cuántas matrices satisfacen estas condiciones?.

7. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $\chi_A(t) = (t-a)(t-z)(t-\overline{z})$, con $a \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sea $g_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal $g_A(x) = Ax^t$.

a) Probar que existe v_1, autovector de g_A de autovalor a, con todas sus coordenadas reales.

b) Sea $w = v_2 + iv_3$, con $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, un autovector de g_A asociado al autovalor z. Probar que $\overline{w} = v_2 - iv_3$ es un autovector de g_A de autovalor $\overline{z}$.

c) Se considera $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $f_A(x) = Ax^t$. Probar que $\langle v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio f_A-invariante de dimensión 2.

d) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Verificar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar $[f_A]_{\mathcal{B}}$.

8. *a*) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{tr} A = -4$. Calcular los autovalores de A sabiendo que los de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

b) Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $\det A = 6$, tiene a 1 y a -2 como autovalores, y tal que $A - 3I$ tiene a -4 como autovalor. Determinar los restantes autovalores de A

9. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3y, 3x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

b) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ:

$$[f_\theta]_E = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Probar que, para todo $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

c) ¿Qué pasa si se cambia $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ en el item anterior?

10. Sea $A \in M_n(k)$. Mostrar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Mostrar con un ejemplo que no sucede lo mismo con los autovectores.

11. *a*) Sea $f \in \mathsf{End}(V)$ un proyector de un espacio vectorial de dimensión finita V tal que $\dim \operatorname{im} f = s$. Determinar su polinomio característico, y mostrar que es diagonalizable.

b) Sea $f \in \mathsf{End}(V)$ un endomorfismo nilpotente de índice de nilpotencia l. Determinar su polinomio característico. ¿Cuándo es diagonalizable?

c) Sea $f \in \mathsf{End}(V)$ un endomorfismo de un espacio vectorial real tal que $f^2 + I = 0$. Mostrar que f es un automorfismo y que $\dim V$ es par.

12. Un endomorfismo $f \in \mathsf{End}(V)$ de rango 1 es diagonalizable sii $\ker f \cap \operatorname{im} f = 0$.

13. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$, y $S \oplus T = V$. Si S y T son f-invariantes, probar que existe una base $\mathcal{B}$ de V y matrices $A_1 \in M_s(k)$ y $A_2 \in M_t(k)$ tales que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Probar que, en este caso, $\chi_f = \chi_{A_1}\chi_{A_2}$.

14. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

y sea $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $f_A(x) = Ax^t$. Hallar subespacios propios S y T de $\mathbb{R}^3$, f_A-invariantes, tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

15. Sea $A \in M_n(k)$ diagonalizable y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raices de su polinomio característico contadas con multiplicidad. Mostrar que $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$ y que $\det A = \prod \lambda_i$.