Matemática 2

Segundo Cuatrimestre — 2012

Práctica 4: Determinantes

1. *a*) Sea $A = (a_{ij}) \in M_6(k)$. ¿Con qué signos aparecen los siguientes monomios en el desarrollo de $\det A$?

i) $a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{14} \cdot a_{65}$;

ii) $a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{51} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$.

b) Sea $A = (a_{ij}) \in M_4(k)$. Escribir todos los términos de $\det A$ que poseen el factor a_{23} y que tienen signo $+$.

c) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de X^4 y X^5 en $\det(A)$ y de los de a^6 y b^6 en $\det(B)$, siendo

i) $A = \begin{pmatrix} 2X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}$ ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

3. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ una matriz triangular superior. Mostrar que $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Calcular el determinante de $A \in M_n(k)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *a*) Sean $A \in k^{n \times n}$, $B \in k^{m \times m}$ y $C \in k^{n \times m}$, y sea $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ la matriz de bloques. Mostrar que $\det M = \det A \cdot \det B$.

b) Sea $l \geq 1$, $n_1, \dots, n_l \geq 1$, y $A_i \in M_{n_i}(k)$ si $1 \leq i \leq l$. Mostrar que

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_l \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{l} \det A_i.$$

5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & & & & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & & \\ \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & & \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & & & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & & & & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \dots & & & & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix}$$

7. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$ y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$, $\forall i : 1 \leq i \leq n$. Mostrar que $\det A > 0$.

8. *a*) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$. Muestre que $\det A = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

b) i) Calcular $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix}$ ii) Calcular $\det \begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix}$

9. *a*) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ y sean $v_1, \dots, v_n$ los vectores de k^n dados por $v_i = (1, \alpha_i^1, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^{n-1})$. Determinar cuando $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

b) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.

10. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

11. Sea $A \in M_n(k)$.

a) Mostrar que $\operatorname{rk} A \geq s$ sii A posee un menor $s \times s$ con determinante no nulo.

b) Mostrar que $\operatorname{rk} A$ es el mayor entero s tal que A posee un menor $s \times s$ con determinante no nulo.

12. Sea $A \in M_n(k)$ inversible. Calcular $\det(\operatorname{adj} A)$.

13. *a*) Si $A \in M_n(k)$ es antisimétrica y n es impar, mostrar que $\det A = 0$.

b) Si $A \in M_n(k)$ es ortogonal, es decir, si $A \cdot A^t = \mathbb{I}d$, mostrar que es $\det A = \pm 1$.