

---

# MATEMÁTICA 2

## Segundo Cuatrimestre — 2012

### Práctica 3: Bases, cambios de base y matrices

---

1. Encontrar las coordenadas de  $v \in V$  respecto de la base  $B$  en los siguientes casos:

- $V = k^n$ ,  $v = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $B$  la base canónica.
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $v = (1, 2, -1)$ ,  $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ .
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $v = (1, -1, 2)$ ,  $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$ .
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $v = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$ .
- $V = \mathbb{R}[X]_3$ ,  $v = 2X^2 - X^3$ ,  $B = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$ .

2. Calcular la matriz de cambio de base  $C(B, B')$  en los siguientes casos:

- $V = \mathbb{R}^2$ ,  $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ ,  $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$ .
- $V = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ ,  $B' = \{(1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, 1, 3)\}$ .
- $V = \mathbb{R}[X]_2$ ,  $B = \{(3, 1 + X, X^2)\}$ ,  $B' = \{1, X + 3, X^2 + 2\}$ .
- $V = \mathbb{R}[X]_3$ ,  $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ ,  $B' = \{1, 1 + X, (1 + X)^2, (1 + X)^3\}$ .

3. Sea  $V$  un  $k$ -espacio vectorial y sean  $B_1, B_2$  y  $B_3$  tres bases de  $V$ .

- $C(B_1, B_3) = C(B_2, B_3)C(B_1, B_2)$ .
- La matriz  $C(B_1, B_2)$  es inversible.

4. Sea  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$ .

- Encontrar una base  $B'$  tal que  $C(B, B') = M$ .
- Encontrar una base  $B'$  tal que  $C(B', B) = M$ .

5. a) Mostrar que existe una única transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (-5, 3)$  y  $f(-1, 1) = (5, 2)$ . Determinar  $f(5, 3)$  y  $f(-1, 2)$ .

b) ¿Existe una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (2, 6)$ ,  $f(-1, 1) = (2, 1)$  y  $f(2, 7) = (5, 3)$ ?

c) Encontrar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los que existe una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga que  $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$ ,  $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$  y  $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$ .

6. Sean  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$  y  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$ . Determinar la imagen y el núcleo de los morfismos  $f$ ,  $g$  y  $g \circ f$ . Decidir si se trata de monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

7. Determinar si existe—y en ese caso, encontrar explícitamente—una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que  $\text{im } f = S$  y  $\text{ker } f = T$  en cada uno de los siguientes casos:

- $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ ,  $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$ .
- $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$ ,  $T = \langle (1, -2, 1) \rangle$ .

8. En cada uno de los siguientes casos, determine una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga las condiciones dadas:

- $(1, 1, 0) \in \text{ker } f$ ,  $\dim \text{im } f = 1$ .
- $\text{ker } f \cap \text{im } f = \langle (1, 1, 2) \rangle$ .
- $f \neq 0$ ,  $\text{ker } f \subset \text{im } f$ .
- $f \neq 0$ ,  $f \circ f = 0$ .

$$e) f \neq \text{id}, f \circ f = \text{id}.$$

$$f) \ker f \neq 0, \text{im } f \neq 0, \ker f \cap \text{im } f = 0.$$

9. Encontrar proyectores  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfagan las siguientes condiciones:

$$a) \text{im } f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

$$b) \ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

$$c) \ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - x_3 = 0\}, \text{im } f = \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

10. Sea  $V$  un  $k$ -espacio vectorial.

a) Sea  $f : V \rightarrow V$  un proyector. Mostrar que  $V = \ker f \oplus \text{im } f$ . Probar además que  $g = \text{id} - f$  es también un proyector de  $V$  y determinar su núcleo e imagen.

b) Sean  $S$  y  $T$  subespacios de  $V$  tales que  $V = S \oplus T$ . Entonces existe un único proyector  $f : V \rightarrow V$  tal que  $S = \ker f$  y  $T = \text{im } f$ .

11. a) Sean  $U, V$  y  $W$  tres espacios vectoriales, con bases  $B, B'$  y  $B''$ . Si  $f : V \rightarrow W$  y  $g : W \rightarrow U$  son transformaciones lineales, mostrar que

$$|g \circ f|_{B, B''} = |g|_{B', B''} |f|_{B, B'}.$$

b) Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Si  $B_1$  y  $B_2$  son bases de  $V$  y  $B'_1$  y  $B'_2$  son bases de  $W$ , mostrar que

$$|f|_{B_2, B'_2} = C(B'_1, B'_2) |f|_{B_1, B'_1} C(B_2, B_1).$$

12. Sea  $V$  un espacio vectorial y sean  $B$  y  $B'$  dos bases de  $V$ . Si  $f : V \rightarrow V$  es una transformación lineal, mostrar que

$$\text{tr } |f|_{B, B} = \text{tr } |f|_{B', B'}.$$

13. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal tal que  $f^n = 0$  y  $f^{n-1} \neq 0$ . Mostrar que existe una base  $B$  de  $V$  tal que

$$(|f|_B)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j + 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1)$$

Si  $V = k[X]_{\leq n-1}$  y  $f : V \rightarrow V$  está definida por  $f(p) = p'$ . Encuentre una base  $B$  de  $V$  tal que  $|f|_B$  tenga la forma (1).

14. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $f : V \rightarrow V$  un proyector. Mostrar que existe un base  $B$  de  $V$  tal que

$$(|f|_B)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \text{ y } i \leq \dim \text{im } f; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$