Matemática 2

Segundo Cuatrimestre — 2012

Práctica 2: Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

a) $\mathrm{tr} : M_n(k) \to k$.
b) $L_A : B \in k^{n\times m} \mapsto AB \in k^{p\times m}$, para cada $A \in k^{p\times n}$.
c) $\frac{d}{dx} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
d) $\mathrm{ev}_a : p \in k[X] \mapsto p(a) \in k$, con $a \in k$.
e) $t : z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.
f) $\mathrm{im} : z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{im}\, z \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.
g) $I : f \in C_\mathbb{R}([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$.
h) $L : C_\mathbb{R}([0,1]) \to C_\mathbb{R}([0,1])$ con $Lf(x) = \int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.
i) $f : k[X] \to k[X]$ con $f(p(X)) = p(X+1) - p(X) \in k[X]$.

Para cada una de ellas describa el núcleo y la imagen.

2. Sea $f : V \to W$ una tranformación lineal. Mostrar que f es inyectiva sii siempre que $v_1, \dots, v_n$ son vectores linealmente independientes, los vectores $f(v_1), \dots, f(v_n)$ también son linealmente independientes.

3. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ transformaciones lineales. Muestre que

a) $\ker f \subset \ker g \circ f$.
b) $\ker f = \ker g \circ f$ si $\mathrm{im}\, f \cap \ker g = 0$.
c) $\mathrm{im}\, g \supset \mathrm{im}\, g \circ f$.
d) $\mathrm{im}\, g = \mathrm{im}\, g \circ f$ si $\mathrm{im}\, f = V$.

Muestre, dando ejemplos, que en general no vale la igualdad ni en *a)* ni en *c)*.

4. Si $f : U \to V$ y $g : V \to W$ son transformaciones lineales, mostrar que

$$\dim \ker g \circ f \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

5. Si $f, g : V \to V$ son endomorfismos de V, entonces

$$f(\ker g \circ f) = \ker g \cap \mathrm{im}\, f.$$

6. Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Probar que:

a) Si $H \subset V$ es un subespacio, $\dim f(H) + \dim H \cap \ker f = \dim H$.
b) Si $L \subset W$ es un subespacio, $\dim f^{-1}(L) = \dim L \cap \mathrm{im}\, f + \dim \ker f$.

7. Sean $f, g : V \to W$ transformaciones lineales.

a) Mostrar que $\dim \mathrm{im}(f+g) \leq \dim \mathrm{im}\, f + \dim \mathrm{im}\, g$.
b) Mostrar que si $\dim V < \infty$, entonces vale la igualdad sii $\mathrm{im}\, f \cap \mathrm{im}\, g = 0$ y $\ker f + \ker g = V$.

8. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V. Muestre que

a) $\mathrm{im}\, f \subset \ker f$ sii $f^2 = 0$.
b) Si $\dim V < \infty$, entonces $\mathrm{im}\, f = \ker f$ sii $f^2 = 0$ y $\dim \mathrm{im}\, f = \dim \ker f$.

9. Sean $f, g : V \to V$. Si $f \circ g = 0$, ¿es cierto que $g \circ f = 0$?

10. De ejemplos de pares de endomorfismos $f, g : V \to V$ de un espacio vectorial V tales que sea

a) $fg = gf$;

b) $fg \neq gf$.

11. *a*) Sean $f, g : V \to W$ y $h : W \to V$ transformaciones lineales tales que $f \circ h = \mathsf{id}_W$ y $h \circ g = \mathsf{id}_V$. Entonces h es inversible y $h^{-1} = f = g$.

b) Si $f : U \to V$ y $g : V \to W$ son transformaciones lineales inversibles, entonces $g \circ f$ también es inversible y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

c) Sean $f, g : V \to V$ dos endomorfismos de V. Entonces f y g son inversibles sii $f \circ g$ y $g \circ f$ son inversibles.

d) Sean $f, g : V \to V$ dos endomorfismos de V. Si V tiene dimensión finita y $f \circ g = \mathsf{id}_V$, entonces f y g son inversibles y $f^{-1} = g$.

De un ejemplo para mostrar que esta afirmación no es válida si eliminamos la hipótesis de que V tenga dimensión finita.

e) Decir si es verdadero o falso que: Si $f : V \to V$ es una tranformación lineal, entonces f es inversible sii siempre que $v_1, \ldots, v_n$ son n vectores linealmente independientes resulta que $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ también son linealmente independientes.

12. Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita y $\dim V = \dim W$, entonces $V \cong W$.

13. Si $n, m \geq 1$, hay un isomorfismo $k^{nm} \cong M_{m,n}(k)$ de k-espacios vectoriales.

14. Sean $V = k[X]_{<n}$ y $W = k^n$. Cada elección de base $\mathcal{B}$ de V define una transformación k-lineal $T_{\mathcal{B}} : V \to W$, $T_{\mathcal{B}} : f \in V \mapsto (f)_{\mathcal{B}} \in W$ que consiste en tomar coordenadas de f en la base $\mathcal{B}$. Pruebe que $T_{\mathcal{B}}$ es un isomorfismo para cada $\mathcal{B}$.

15. Sean V y W espacios vectoriales y sea $U \subset V$ un subespacio. Sea además $f : U \to W$ una transformación lineal. Mostrar que f puede extenderse a todo V de forma que la extensión sea lineal. Esto es, mostrar que existe una transformación lineal $\bar{f} : V \to W$ tal que $\bar{f}|_U = f$.