
MATEMÁTICA II

Verano — 2010

Práctica 5: Autovalores y diagonalización

1. a) Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de las siguientes matrices, considerando por separado el caso en que los coeficientes están en \mathbb{R} y en \mathbb{C} :

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$	v) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix};$	viii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$
ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$	vi) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix};$	ix) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
iii) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix};$	vii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix};$	
iv) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix};$		

En todos los casos, $a \in \mathbb{K}$.

- b) Interprete cada una de las matrices del ítem anterior como la matriz de una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y \mathbb{C} , respectivamente) con respecto a la base canónica \mathcal{E} de \mathbb{K}^n , y encuentre, cuando es posible, una base \mathcal{B} de manera tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ es diagonal; en ese caso, encuentre la matriz de cambio de base $C(\mathcal{E}, \mathcal{B})$.
2. a) Sean $A, D \in M_n(k)$ y $C \in GL_n(k)$ tales que $A = CDC^{-1}$. Mostrar que $A^k = CD^kC^{-1}$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$.
- b) Calcular

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

- c) El objetivo de esta parte es encontrar una fórmula cerrada para la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ tal que $a_0 = a_1 = 1$ y, si $n \geq 0$,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Considere el endomorfismo $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que, en la base canónica, está representado por la matriz

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Muestre que, para cada $n \geq 0$ es

$$f \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Encuentre ahora una base que diagonalice a f y use la primera parte de este ejercicio y el hecho de que

$$f^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

para obtener una fórmula cerrada para a_n en esos casos.

3. a) Determinar qué matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in k, k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, son diagonalizables.
 †b) Mostrar que toda matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$ es o bien diagonalizable o bien similar a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ para algún $a \in \mathbb{C}$.
4. a) Sea $A \in M_2(\mathbb{C})$ tal que todos sus coeficientes son reales y tal que $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}$ es un autovector correspondiente al autovalor $1 + 3i$. Mostrar que A es diagonalizable, encontrar una base de autovectores, y determinar A .
 b) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un autovector de autovalor $\sqrt{2}$, y tal que $\chi_A \in \mathbb{Q}[t]$. Determinar si A es diagonalizable. ¿Cuántas matrices satisfacen estas condiciones?.
5. a) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $\text{tr } A = -4$. Calcular los autovalores de A sabiendo que los de $A^2 + 2A$ son $-1, 3$ y 8 .
 b) Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $\det A = 6$, tiene a 1 y a -2 como autovalores, y tal que $A - 3I$ tiene a -4 como autovalor. Determinar los restantes autovalores de A .
6. Sea $A \in M_n(k)$. Mostrar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Mostrar con un ejemplo que no sucede lo mismo con los autovectores.
7. Determinar los autovalores y autovectores de

$$D : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R}).$$
8. a) Sea $f \in \text{End}(V)$ un proyector de un espacio vectorial de dimensión finita V tal que $\dim \text{im } f = s$. Determinar su polinomio característico, y mostrar que es diagonalizable.
 b) Sea $f \in \text{End}(V)$ un endomorfismo nilpotente de índice de nilpotencia l . Determinar su polinomio característico. ¿Cuándo es diagonalizable?
 c) Sea $f \in \text{End}(V)$ un endomorfismo de un espacio vectorial real tal que $f^2 + I = 0$. Mostrar que f es un automorfismo y que $\dim V$ es par.
9. Un endomorfismo $f \in \text{End}(V)$ de rango 1 es diagonalizable sii $\ker f \cap \text{im } f = 0$.
- †10. Sean $A \in k^{m \times n}$ y $B \in k^{n \times m}$. Mostrar que las matrices de bloques

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

de $M_{m+n}(k)$ son semejantes. Concluir que

$$\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$$

11. Sea $A \in M_n(k)$ diagonalizable y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de su polinomio característico contadas con multiplicidad. Mostrar que $\text{tr } A = \sum \lambda_i$ y que $\det A = \prod \lambda_i$.