
MATEMÁTICA II

Verano — 2010

Práctica 3: Bases, cambios de base y matrices

1. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

- $V = k^n$, $v = (x_1, \dots, x_n)$, B la base canónica.
- $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, 2, -1)$, $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1, 2)$, $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $v = (x_1, x_2, x_3)$, $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$.
- $V = \mathbb{R}[X]_3$, $v = 2X^2 - X^3$, $B = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$.

2. Calcular la matriz de cambio de base $C(B, B')$ en los siguientes casos:

- $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, 1, 3)\}$.
- $V = \mathbb{R}[X]_2$, $B = \{3, 1 + X, X^2\}$, $B' = \{1, X + 3, X^2 + 2\}$.
- $V = \mathbb{R}[X]_3$, $B = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B' = \{1, 1 + X, (1 + X)^2, (1 + X)^3\}$.

3. Sea V un k -espacio vectorial y sean B_1, B_2 y B_3 tres bases de V .

- $C(B_1, B_3) = C(B_2, B_3)C(B_1, B_2)$.
- La matriz $C(B_1, B_2)$ es inversible.

4. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 .

- Encontrar una base B' tal que $C(B, B') = M$.
- Encontrar una base B' tal que $C(B', B) = M$.

5. a) Mostrar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

b) ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$, $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

c) Encontrar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los que existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfice que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Determinar la imagen y el núcleo de los morfismos f , g y $g \circ f$. Decidir si se trata de monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

7. Determinar si existe—y en ese caso, encontrar explícitamente—una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{im } f = S$ y $\text{ker } f = T$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$.

b) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, -2, 1) \rangle$.

8. En cada uno de los siguientes casos, determine una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones dadas:

a) $(1, 1, 0) \in \text{ker } f$, $\dim \text{im } f = 1$.

b) $\text{ker } f \cap \text{im } f = \langle (1, 1, 2) \rangle$.

- c) $f \neq 0$, $\ker f \subset \operatorname{im} f$.
 d) $f \neq 0$, $f \circ f = 0$.
 e) $f \neq \operatorname{id}$, $f \circ f = \operatorname{id}$.
 f) $\ker f \neq 0$, $\operatorname{im} f \neq 0$, $\ker f \cap \operatorname{im} f = 0$.

9. Encontrar proyectores $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfagan las siguientes condiciones:

- a) $\operatorname{im} f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
 b) $\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
 c) $\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - x_3 = 0\}$, $\operatorname{im} f = \langle (1, 1, 1) \rangle$.

10. Sea V un k -espacio vectorial.

- a) Sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Mostrar que $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$. Probar además que $g = \operatorname{id} - f$ es también un proyector de V y determinar su núcleo e imagen.
 b) Sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Entonces existe un único proyector $f : V \rightarrow V$ tal que $S = \ker f$ y $T = \operatorname{im} f$.

11. a) Sean U , V y W tres espacios vectoriales, con bases B , B' y B'' . Si $f : V \rightarrow W$ y $g : W \rightarrow U$ son transformaciones lineales, mostrar que

$$|g \circ f|_{B, B''} = |g|_{B', B''} |f|_{B, B'}.$$

- b) Sean V y W espacios vectoriales y sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Si B_1 y B_2 son bases de V y B'_1 y B'_2 son bases de W , mostrar que

$$|f|_{B_2, B'_2} = C(B'_1, B'_2) |f|_{B_1, B'_1} C(B_2, B_1).$$

12. Sea V un espacio vectorial y sean B y B' dos bases de V . Si $f : V \rightarrow V$ es una transformación lineal, mostrar que

$$\operatorname{tr} |f|_{B, B} = \operatorname{tr} |f|_{B', B'}.$$

13. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Mostrar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j + 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

14. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Mostrar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \text{ y } i \leq \dim \operatorname{im} f; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$