
MATEMÁTICA II

Verano — 2010

Práctica 2: Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

- $\text{tr} : M_n(k) \rightarrow k$.
- $L_A : B \in k^{n \times m} \mapsto AB \in k^{p \times m}$, para cada $A \in k^{p \times n}$.
- $\frac{d}{dx} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{R} .
- $\text{ev}_a : p \in k[X] \mapsto p(a) \in k$, con $a \in k$.
- $t : z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ sobre \mathbb{R} y sobre \mathbb{C} .
- $\text{im} : z \in \mathbb{C} \mapsto \text{im } z \in \mathbb{C}$ sobre \mathbb{R} y sobre \mathbb{C} .
- $I : f \in C_{\mathbb{R}}([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R}$.
- $L : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \rightarrow C_{\mathbb{R}}([0,1])$ con $Lf(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$.
- $f : p \in k[X] \mapsto p(X+1) - p(X) \in k[X]$.

Para cada una de ellas describa el núcleo y la imagen.

2. Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Mostrar que f es inyectiva sii siempre que v_1, \dots, v_n son vectores linealmente independientes, los vectores $f(v_1), \dots, f(v_n)$ también son linealmente independientes.

3. Sean $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ transformaciones lineales. Muestre que

- $\ker f \subset \ker g \circ f$.
- $\ker f = \ker g \circ f$ si $\text{im } f \cap \ker g = 0$.
- $\text{im } g \supset \text{im } g \circ f$.
- $\text{im } g = \text{im } g \circ f$ si $\text{im } f = V$.

Muestre, dando ejemplos, que en general no vale la igualdad ni en a) ni en c).

4. Si $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ son transformaciones lineales, mostrar que

$$\dim \ker g \circ f \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

†5. Mostrar una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(ax) = af(x)$ para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada $x \in \mathbb{R}^2$, pero que no sea lineal.

6. Si $f, g : V \rightarrow V$ son endomorfismos de V , entonces

$$f(\ker g \circ f) = \ker g \cap \text{im } f.$$

7. Sea $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Probar que:

- Si $H \subset V$ es un subespacio, $\dim f(H) = \dim H - \dim H \cap \ker f$.
- Si $L \subset W$ es un subespacio, $\dim f^{-1}(L) = \dim L \cap \text{im } f + \dim \ker f$.

8. Sean $f, g : V \rightarrow W$ transformaciones lineales.

- Mostrar que $\dim \text{im}(f+g) \leq \dim \text{im } f + \dim \text{im } g$.
- Mostrar que vale la igualdad sii $\text{im } f \cap \text{im } g = 0$ y $\ker f + \ker g = V$.

9. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V . Muestre que
- $\text{im } f \subset \ker f$ sii $f^2 = 0$.
 - $\text{im } f = \ker f$ sii $f^2 = 0$ y $\dim \text{im } f = \dim \ker f$.
 - $\dim \ker f \cap \text{im } f = \dim \text{im } f - \dim \text{im } f^2$.
Sugerencia: Considere la aplicación $f : \text{im } f \rightarrow \text{im } f^2$.
 - $\ker f \subset \text{im } f$ sii $\dim \ker f = \dim \text{im } f - \dim \text{im } f^2$.
10. Sean $f, g : V \rightarrow V$. Si $f \circ g = 0$, ¿es cierto que $g \circ f = 0$?
11. De ejemplos de pares de endomorfismos $f, g : V \rightarrow V$ de un espacio vectorial V tales que sea
- $fg = gf$;
 - $fg \neq gf$.
12. a) Sean $f, g : V \rightarrow W$ y $h : W \rightarrow V$ transformaciones lineales tales que $f \circ h = \text{id}_W$ y $h \circ g = \text{id}_V$. Entonces h es inversible y $h^{-1} = f = g$.
- b) Si $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ son transformaciones lineales inversibles, entonces $g \circ f$ también es inversible y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- c) Sean $f, g : V \rightarrow V$ dos endomorfismos de V . Entonces f y g son inversibles sii $f \circ g$ y $g \circ f$ son inversibles.
- d) Sean $f, g : V \rightarrow V$ dos endomorfismos de V . Si V tiene dimensión finita y $f \circ g = \text{id}_V$, entonces f y g son inversibles y $f^{-1} = g$.
De un ejemplo para mostrar que esta afirmación no es válida si eliminamos la hipótesis de que V tenga dimensión finita.
- e) Sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Entonces f es inversible sii siempre que v_1, \dots, v_n son n vectores linealmente independientes resulta que $f(v_1), \dots, f(v_n)$ también son linealmente independientes.
13. Si $n, m \geq 1$, hay un isomorfismo $k^{nm} \cong k^{m \times n}$ de k -espacios vectoriales.
14. Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita y $\dim V = \dim W$, entonces $V \cong W$.
15. Sean V y W espacios vectoriales y sea $U \subset V$ un subespacio. Sea además $f : U \rightarrow W$ una transformación lineal. Mostrar que f puede extenderse a todo V de forma que la extensión sea lineal. Esto es, mostrar que existe una transformación lineal $\tilde{f} : V \rightarrow W$ tal que $\tilde{f}|_U = f$.