
MATEMÁTICA II

Verano — 2010

Práctica 1: Espacios vectoriales, generación, independencia lineal

Espacios vectoriales

1. Sea V un espacio vectorial sobre k . Demostrar las siguientes afirmaciones:

- | | |
|---|---|
| (a) $0 \cdot v = 0, \quad \forall v \in V;$ | (d) $-(-v) = v, \quad \forall v \in V;$ |
| (b) $\lambda \cdot 0 = 0, \quad \forall \lambda \in k;$ | (e) $\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0;$ |
| (c) $(-1) \cdot v = -v, \quad \forall v \in V;$ | (f) $-0 = 0$ en V . |

2. (a) Sea X un conjunto no vacío. Sea $k^X = \{f : X \rightarrow k\}$ el conjunto de todas las funciones de X a k . Mostrar que las operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

hacen de k^X un espacio vectorial sobre k .

(b) ¿Bajo qué condiciones es k^X de dimensión finita? Cuando estas condiciones se cumplan, encuentre una base.

3. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un abierto no vacío. Muestre que los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^X sobre \mathbb{R} .

- (a) $C^\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es infinitamente diferenciable}\};$
- (b) $\mathbb{R}^X;$
- (c) $C^0(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\};$
- (d) $L = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f'(x) = f(x)\};$
- (e) $C^0(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es derivable}\};$
- (f) $V(x_0) = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f(x_0) = 3f'(x_0)\}$ para $x_0 \in X$.

Determine todas las inclusiones entre estos espacios.

4. Sea X un conjunto no vacío, V un espacio vectorial sobre k y consideremos el conjunto $V^X = \{f : X \rightarrow V\}$ de todas las funciones de X en V .

- (a) Mostrar que es posible definir sobre V^X , imitando lo hecho en el ejercicio 2, operaciones de suma y de producto por elementos de k de forma natural, de manera tal que V^X resulte, con respecto a esas operaciones, un espacio vectorial sobre k .
- (b) Si $Y \subset X$ es un subconjunto no vacío, ¿puede verse a V^Y como subespacio de V^X ?
- (c) Si $W \subset V$ es un subespacio vectorial, ¿puede verse a W^X como subespacio de V^X ?

5. Sea $A \in k^{n \times m}$ y sea

$$S = \{x \in k^m : Ax = 0\}$$

el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado a A . Muestre que S es un subespacio vectorial de k^m .

6. Sean S y T subespacios de un k -espacio vectorial V . Pruebe que:

- (a) $S \cap T$ es un subespacio de V .
[†](b) Si $S \cup T$ es un subespacio de V entonces $S \subset T$ ó $T \subset S$.

7. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos S son sub- k -espacios de V

- (a) $S = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = a \cdot (1, 0, 0) + b \cdot (1, 1, 1), \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $k = \mathbb{R}$;
 (b) $S = \{ai : a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{R}$;
 (c) $S = \{ai : a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{C}$;
 (d) $S = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \geq 2\}$, $V = k[X]$;
 (e) $S = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq 5\}$, $V = k[X]$;
 (f) $S = \{M \in M_4(k) : M^t = M\}$, $V = M_4(k)$;
 (g) $S = \{M \in M_4(k) : \text{tr } M = 0\}$, $V = M_4(k)$, donde $\text{tr } M = \sum_{i=1}^4 M_{ii}$;
 (h) $S = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $k = \mathbb{R}$.

8. Mostrar que los siguientes conjuntos no son sub- \mathbb{R} -espacios vectoriales de \mathbb{R}^3 :

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.
 (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
 (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$.
 (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.

9. Sea $V = \mathbb{R}^+$, y consideremos la operación $+$ definida sobre V por

$$+ : (u, v) \in V \times V \mapsto uv \in V,$$

donde uv es el *producto* usual calculado en \mathbb{R}^+ , y la acción de \mathbb{R} sobre V dada por

$$\cdot : (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V \mapsto v^\lambda \in V.$$

Muestre que $(V, +, \cdot)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial.

Conjuntos generadores

10. (a) Encontrar al menos tres sistemas de generadores del subespacio

$$S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

- (b) ¿ $(2, 1, 3, 5)$ está en S ?
 (c) ¿Es $S \subset \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$?
 (d) ¿Es $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subset S$?

11. Determine dos sistemas de generadores para cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

- (a) k^n sobre k ;
 (b) $k[X]_n = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq n\}$ sobre k ;
 (c) $k[X]$ sobre k ;
 (d) \mathbb{C}^n , con $k = \mathbb{R}$;
 (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$, con $k = \mathbb{R}$;
 (f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x - y = 0\}$, con k arbitrario;
 (g) $\{f \in k[X]_4 : f(1) = 0, f(2) = f(3)\}$, con $k = \mathbb{Q}$;

(h) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''' = 0\}$, con $k = \mathbb{R}$.

12. Sea X un conjunto no vacío.

(a) Si X es finito, determine un sistema de generadores para k^X .

(b) Sea

$$k_0^X = \{f \in k^X : \text{existe } Y \subset X \text{ finito tal que } f|_{X \setminus Y} \text{ es constante}\},$$

el conjunto de las funciones sobre X que son constantes fuera de un conjunto finito.

Encuentre un sistema de generadores para k_0^X .

†(c) Si X es finito, y V es un k -espacio vectorial, determine un sistema de generadores para V^X .

Dependencia lineal y bases

13. En este ejercicio todos los espacios vectoriales son reales. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o no. En caso de no serlo, determine qué elementos pueden eliminarse de manera que el conjunto residual sea linealmente independiente y genere el mismo subespacio que el conjunto original. Finalmente, complete cada conjunto a una base del espacio ambiente.

(a) $\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$ en \mathbb{R}^3 .

(b) $\{(1, 0, -1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)\}$ en \mathbb{C}^3 .

(c) $\{(1, 1, 2), (1, 4, 3), (3, 3, 3), (e, \pi, \sqrt{2})\}$ en \mathbb{R}^3 .

(d) $\{(1, 1, 1), (1, \alpha, \alpha^2), (1, \beta, \beta^2)\}$ en \mathbb{R}^3 con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(e) $\{(1, 1, 1, 1), (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3), (1, \beta, \beta^2, \beta^3)\}$ en \mathbb{R}^4 con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(f) $\{\frac{1}{2}(X-1)(X-2), (X-1)(X-3), (X-2)(X-3)\}$ en $\mathbb{R}[X]_2$.

(g) $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

14. Determinar todos los $\lambda \in k$ de manera que los siguientes conjuntos resulten linealmente independientes:

(a) $\{(1, 2, \lambda), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - \lambda)\}$ en \mathbb{R}^3 .

(b) $\{\lambda X^2 + X, -X^2 + \lambda, \lambda^2 X\}$ en $\mathbb{R}[X]_4$.

(c) $\{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

15. Encuentre bases para los siguientes espacios vectoriales

(a) $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ sobre \mathbb{R} .

(b) $V = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A = \bar{A}^t\}$ sobre \mathbb{R} .

(c) $V = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{tr } A = 0\}$ sobre \mathbb{R} .

(d) $V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \in \mathbb{N}_0, a_{n+1} = 2a_n\}$ sobre \mathbb{R} .

(e) $V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \in \mathbb{N}_0, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$ sobre \mathbb{R} .

(f) $V = \{p \in \mathbb{R}[X]_n : p(0) = p(1) = 0\}$ sobre \mathbb{R} .

(g) $V = \{p \in \mathbb{R}[X]_n : p(0) = p'(1) = 0\}$ sobre \mathbb{R} .

†16. Sea $v_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ si $1 \leq i \leq n$, y supongamos que $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$, y que $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$. Mostrar que $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una base de \mathbb{R}^n .

17. Sea $F = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}[X]$ tal que $\deg f_i = i$ si $i \in \mathbb{N}_0$. Mostrar que F es una base de $\mathbb{R}[X]$.

18. Sea $\alpha_i \in k$ para $1 \leq i \leq n$, y sea

$$v_i = (1, \alpha_i, \alpha_i^2, \dots, \alpha_i^{n-1}) \in k^n.$$

Determinar cuando $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente en k^n .

19. Sea V un espacio vectorial sobre k .

- (a) el conjunto $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente si y solo si el conjunto $\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.
- (b) Si $\lambda \in k \setminus \{0\}$, $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente si el conjunto $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.
- (c) Si $\lambda \in k$, $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente si el conjunto $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\}$