Matemática II

Verano — 2010

Práctica 0: Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

A lo largo de esta práctica, K simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.

1. Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: ($K = \mathbb{R}$)

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

¿Cambia algo si $K = \mathbb{C}$?

1.2. Sea H un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con m incógnitas. Probar:

(a) Si $n < m$, entonces H tiene alguna solución no nula.

(b) Si $m < n$, entonces existe un sistema lineal homogéneo H' de m ecuaciones con m incógnitas cuyo conjunto de soluciones coincide con el conjunto de soluciones de H.

1.3. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

a) $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$

1.4. Resolver los siguientes sistemas no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados a cada uno de ellos:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = \beta \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = \gamma \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

1.5. Sea H un sistema lineal no homogéneo y sea p una solución de H. Sea H_0 el sistema lineal homogéneo asociado a H. Probar que si S y S_0 son los conjuntos de soluciones de H y H_0 respectivamente, entonces $S = S_0 + p = \{s + p : s \in S_0\}$.

1.6. Dado el sistema

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Determinar los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema admite solución.

1.7. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$a)\ \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}$$

2. Matrices

2.8. *(a)* Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $K^{n\times n}$ no es conmutativo. (Sugerencia: probarlo para $K^{2\times 2}$ y usar multiplicación por bloques.)

(b) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{3\times 3} /\ A.B = B.A \ \ \forall\, B \in K^{3\times 3}\}$.

2.9. *(a)* Exhibir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 = -I$.

(b) Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones $\forall n \geq 2$:

i) $(A.B)^2 = A^2B^2$

ii) $A.B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

iii) $A.B = A.C$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$

iv) $A.B = 0 \Rightarrow B.A = 0$

v) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$

vi) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$

(c) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que:

i) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ii) $A^2 - B^2 = (A-B).(A+B)$

2.10. Si $A, B \in K^{m\times n}$ y $A.x = B.x \ \forall\, x \in K^n$, probar que $A = B$.

2.11. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$f)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.12. Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible y sean B, $C \in K^{n\times m}$. Probar:

a) i) $A.B = A.C \Rightarrow B = C$

b) ii) $A.B = 0 \Rightarrow B = 0$

2.13. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar:

a) i) A , $B \in K^{n\times n}$ inversibles $\Rightarrow A + B$ es inversible.

b) ii) Definición: Dada $A \in K^{n\times n}$, se llama **matriz transpuesta de** A a la matriz $A^t \in K^{n\times n}$ que cumple que $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}, \forall\, 1 \le i, j \le n$. Entonces A inversible $\iff A^t$ inversible.

c) iv) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N}$ / $A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

2.14. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$. Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única $\iff A$ es inversible.