Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Verano - 2011

Práctica 9: Cambio de variables y aplicaciones

1. (Coordenadas polares) Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\text{sen}(\theta)$ y $g(r,\theta) = f(x,y)$. Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

2. Sean $D^* = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y T la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir,
   $T(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\text{sen}\,\theta)$.
   (a) Mostrar que $T(D^*) = D$. ¿Es biyectiva T?
   (b) ¿En que transforma T el rectángulo $[r, r+\Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta\theta]$?
   (c) Calcular la matriz $DT(r,\theta)$. ¿En que transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso $r = 0$?
   (d) Relacionar con la fórmula de cambio de variables en este caso (haciendo los dibujoscorrespondientes).

3. Sean $D_1 = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 4\pi\}$ y T la transformación del ejercicio anterior.
   (a) Hallar $D = T(D_1)$.
   (b) Calcular $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ y $\int_{D_1} r^2 J\, drd\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación. ¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

4. Calcular el área de un círculo de radio r y el área de una elipse con semiejes de longitud a y b.

5. (a) Sea $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (4u, 2u + 3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0,1] \times [1,2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular:

   $$a) \int_D xy\, dxdy \text{ y } \qquad b) \int_D (x-y)\, dxdy$$

   haciendo un cambio de variables para transformarlas en integrales sobre D^*.
   (b) Repetir el ítem anterior para $T(u,v) = (u, v(1+u))$.

6. Sean $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ y $D^* = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular su área.

7. Sean $T(u,v)$ y D los del ejercicio anterior. Calcular:
$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$
haciendo ese cambio de variables.

8. Calcular $\int_D (x^2+y^2)^{3/2}\,dxdy$ donde D es el disco de centro en el origen y radio 2.

9. Hallar el área dentro de la curva $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

10. Dado el paralelogramo P del plano xy con vértices (0,0) , (2,10) , (3,17) y (1,7),
    (a) Hallar una transformación lineal que convierta a P en un rectángulo R del plano uv con vértices opuestos en $(0,0)$ y $(4,2)$.
    (b) Calcular la integral $\displaystyle\int_P xy\,dxdy$ transformándola en una integral sobre el rectángulo R.

11. (Opcional) Es sabido, aunque difícil de demostrar, que una primitiva de la función e^{-x^2} no puede expresarse en términos de las funciones elementales usuales. Esto dificulta el cálculo de $\displaystyle\int_a^b e^{-x^2}\,dx$. Sin embargo, el siguiente truco notable permite calcular de manera simple la integral impropia
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$$
    (a) Observar que $I^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$
    (b) Calcular la integral de (a) como límite de integrales en círculos utilizando coordenadas polares.

Coordenadas esféricas y cilíndricas

12. (a) (Coordenadas esféricas) Dada $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$, $z = r\cos(\phi)$ y sea
$$g(r,\theta,\phi) = f(x,y,z)$$
    Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \phi}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.
    (b) (Coordenadas cilíndricas) Dada $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$ y $g(r,\theta,z) = f(x,y,z)$.
    Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

13. Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 4$.

14. Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$
Esta curva se llama lemniscata. ¿Por qué?

15. Calcular el volumen de un cilindro con base circular de radio r y altura h.

16. (a) Calcular el volumen $V(R)$ de una esfera B_R de radio R.
    (b) Llamando ∂B_R a la superficie del borde de la esfera B_R y $A(\partial B_R)$ a su área, demostrar que $\frac{dV(R)}{dR} = A(\partial B_R)$ y deducir el valor del área de dicha superficie.

17. Integrar $x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.

18. Sea B la bola unitaria, es decir, $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Calcular:
$$\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

19. Calcular $\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy$, donde A está determinado por las condiciones $x^2+y^2 \leq 1$ y $x + y \geq 1$.

20. Calcular:
$$\int_S \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
donde S es el sólido acotado por dos esferas de radios a y b con $0 < b < a$ y centradas en el origen.

21. Calcular $\int_B z\, dxdydz$ donde B es la región sobre el plano xy dentro del cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ y debajo del cono dado por $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

22. Sea E el elipsoide dado por $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$.
    (a) Hallar el volumen de E.
    (b) Calcular $\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)]\, dxdydz$.

23. Si un sólido W tiene densidad ρ, su masa está dada por
$$\int_W \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$
Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ si la densidad es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

24. Sea ρ la densidad de un sólido W. Se definen los primeros momentos de W respecto de los planos coordenados M_{yz}, M_{xz}, M_{xy}, como

$$\int_W x\rho(x,y,z)\,dxdydz, \int_W y\rho(x,y,z)\,dxdydz, \int_W z\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

respectivamente y su centro de masa como

$$(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}),$$

donde M es la masa de W. Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si la densidad es $\rho = (x^2 + y^2)z^2$.

25. Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ, el *momento de inercia* alrededor del eje x esta definido por,

$$I_x = \int_W \rho(y^2 + z^2)\,dxdydz$$

y análogamente se definen I_y e I_z. Sea ahora W el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descripto en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante tal que $0 < k < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z.

26. Hallar el momento de inercia alrededor del eje y para la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es una constante ρ.

27. Dado un sólido W con densidad de masa $\rho(x,y,z)$, la fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ que ejerce W sobre una masa m en (x_1, y_1, z_1) está dada por el gradiente de una función V llamada *potencial gravitacional*, es decir, $\mathbf{F}=-\nabla V$. Este *potencial gravitacional* está dado por,

$$V(x_1, y_1, z_1) = Gm \int_W \frac{\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

donde G es la constante de gravitación universal.

(a) Hallar el potencial gravitacional sobre una masa m de un planeta esférico con una masa $M = 3\ 10^{26}$kg, a una distancia de $2\ 10^{8}$m de su centro.

(b) Hallar la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto de 70kg en la posición indicada en a).