Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 8: Módulos, II

1. Condiciones de cadena

1.1. Un A-módulo es finitamente generado si es isomorfo a un cociente de A^n para algún $n \in \mathbb{N}$-

1.2. Si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de A-módulos a izquierda y M' y M'' son finitamente generados, entonces M es finitamente generado.

1.3. Sea A un anillo, M un A-módulo a izquierda finitamente generado y sea $f : M \to A^n$ un morfismo sobreyectivo de A-módulos. Muestre que $\ker f$ es finitamente generado.

1.4. Muestre que existen módulos finitamente generados y no Noetherianos y módulos tales que todos sus submódulos propios son finitamente generados pero que no son Noetherianos.

1.5. Un k-espacio vectorial V es noetheriano sii $\dim_k V < \infty$.

1.6. Un anillo principal a izquierda es Noetheriano a izquierda.

1.7. Sean A un anillo, M un A-módulo a izquierda y $f \in \mathrm{End}_A(M)$. Si $n \in \mathbb{N}_0$, pongamos $K_n = \ker f^n$ y $I_n = \mathrm{im}\, f^n$. Entonces

(a) $K_1 = K_2 \implies K_1 \cap I_1 = 0$;

(b) $I_1 = I_2 \implies K_1 + I_1 = M$;

(c) si M es Noetheriano, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $K_n \cap I_n = 0$;

(d) si M es Noetheriano y f es sobreyectivo, entonces f es un automorfismo.

1.8. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d} \in \mathbb{C}$ una raíz cuadrada de d. Muestre que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es noetheriano.

1.9. Sea k un cuerpo, V un k-espacio vectorial de dimensión infinita y $A = \mathrm{End}_k(V)$ el anillo de endomorfisos de V. Muestre que existe un A-módulo M no nulo tal que $M \cong M \oplus M$.

1.10. *Anillos de matrices.* Sea $n \in \mathbb{N}$.

(a) Un anillo A es noetheriano a izquierda sii $M_n(A)$ es noetheriano a izquierda.

(b) Un anillo A es noetheriano a derecha sii $M_n(A)$ es neotheriano a derecha.

1.11. Un dominio integro artiniano es un cuerpo.

1.12. *(a)* Un grupo abeliano artiniano es de torsión.

(b) Un grupo abeliano es artiniano y noetheriano sii es finito.

1.13. *Extensiones finitas de anillos.* Sea B un subanillo de un anillo A tal que A es finitamente generado como B-módulo a izquierda. Si B es noetheriano a izquierda, entonces A es noetheriano a izquierda.

1.14. *Algebras de matrices.* Sean A y B anillos y M y N un A-B-bimódulo y un B-A-bimódulo, respectivamente. Sea

$$T = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$$

el anillo de matrices. Entonces T es noetheriano a derecha sii A y B son anillos noetherianos a derecha y M es un B-módulo noetheriano y N es un A-módulo noetheriano.

1.15. *Polinomios de Laurent.* Sea k un cuerpo y sea $A = k[X, X^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes en k. Muestre que A es noetheriano.

Sugerencia. Imite la demostración del teorema de Hilbert para $k[X]$.

1.16. *Extensiones de Ore.* Sea A un anillo y sea $\sigma : A \to A$ un homomorfismo de anillos.

(a) Muestre que existe exactamente una estructura de anillo sobre el grupo abeliano $B = A[X]$ de polinomios con coeficientes a izquierda en A en una variable X tal que

$$Xa = \sigma(a)X, \qquad \forall a \in A.$$

Escribimos $A[X;\sigma]$ al anillo correspondiente.

(b) Si σ es inyectivo y A es un dominio, entonces $A[X;\sigma]$ es un dominio.

(c) Si σ es inyectivo y A es un anillo de división, entonces $A[X;\sigma]$ es un dominio de ideales principales.

(d) Si σ es automorfismo y A es noetheriano a izquierda (derecha), entonces $A[X;\sigma]$ es noetheriano a izquierda (derecha).

1.17. *Extensiones de Ore, II.* Sea A un anillo y sea $\sigma : A \to A$ un homomorfismo de anillos. Una *σ-derivación* de A es un homomorfismo de grupos $\delta : A \to A$ que satisface

$$\delta(ab) = \delta(a)\sigma(b) + a\delta(b), \qquad \forall a, b \in A.$$

Si $\sigma = \mathrm{id}_A$, decimos simplemente que δ es una *derivación* de A.

(a) Muestre que existe exactamente una estructura de anillo sobre el grupo abeliano $B = A[X]$ de polinomios con coeficientes a izquierda en A en una variable X tal que

$$Xa = \sigma(a)X + \delta(a), \qquad \forall a \in A.$$

Escribimos $A[X;\sigma,\delta]$ al anillo correspondiente.

(b) Si σ es inyectivo y A es un dominio, entonces $A[X;\sigma,\delta]$ es un dominio.

(c) Si σ es inyectivo y A es un anillo de división, entonces $A[X;\sigma,\delta]$ es un dominio de ideales principales.

(d) Si σ es automorfismo y A es noetheriano a izquierda (derecha), entonces $A[X;\sigma,\delta]$ es noetheriano a izquierda (derecha).

1.18. Sea $A = k[X]$, $\sigma = \mathrm{id}_A : A \to A$ y $\delta = \frac{\partial}{\partial X} : A \to A$.

(a) Muestre que δ es una derivación de A.

(b) Muestre que el álgebra de Weyl A_1 es isomorfa a $A[X;\sigma,\delta]$. En particular, concluya que A_1 es noetheriana.

2. Módulos libres, proyectivos e inyectivos

2.1. $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.

2.2. Muestre que el grupo abeliano $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es proyectivo.

Sugerencia. Sea $M \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ el subgrupo de todos los elementos $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\{i \in \mathbb{N} : 2^n \nmid x_i\}| < \infty$. Entonces si $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es libre, M es libre de rango no numerable. Analice ahora el grupo abeliano $M/2M$.

2.3. *Bases duales.* Sea A un anillo y P un A-módulo a izquierda. Una *base dual* para P es un par $((x_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I})$ tal que $x_i \in P$ para todo $i \in I$, $f_i \in \hom_A(P, A)$ para todo $i \in I$ y se tiene que

(i) para todo $x \in P$, $|\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}| < \infty$, y

(ii) para todo $x \in P$, es $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$.

Nótese que en la segunda condición la suma tiene sentido por la primera condición.

(a) Muestre que un A-módulo P es proyectivo sii posee una base dual.

(b) Muestre que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado sii posee una base dual finita.

2.4. Sea A un anillo, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado y sea M un A-módulo a izquierda.

(a) Si M es libre, entonces M_S es libre como A_S-módulo.

(b) Si M es proyectivo, entonces M_S es proyectivo como A_S-módulo.

(c) Si M es finitamente generado, entonces M_S es finitamente generado como A_S-módulo.

2.5. *Resoluciones proyectivas.* Sea A un anillo.

(a) Para cada A-módulo M existe un diagrama

$$\cdots \longrightarrow P_p \longrightarrow P_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de A-módulos y homomorfismos de A-módulos que es exacto y en el que cada P_p, $p \geq 0$, es proyectivo. Llamamos a este diagrama una *resolución proyectiva* de M.

(b) De hecho, los A-módulos P_p, $p \geq 0$, pueden elegirse libres.

(c) Si A es noetheriano a izquierda y M es finitamente generado, entonces los A-módulos P_p, $p \geq 0$, pueden elegirse finitamente generados.

(d) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y

$$\cdots \longrightarrow P_p \longrightarrow P_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

y

$$\cdots \longrightarrow Q_p \longrightarrow Q_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

son resoluciones proyectivas de M y N, respectivamente, entonces existen morfismos $f_p : P_p \to Q_p$ para cada $p \geq 0$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_p \arrow[r] \arrow[d, "f_p"] & P_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_p \arrow[r] & Q_{p-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(e) Encuentre resoluciones proyectivas para

(i) un A-módulo proyectivo;

(ii) el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;

(iii) el $k[X]$-módulo $S = k[X]/(X)$.

2.6. Para cada A-módulo a izquierda M, sea $M^* = \mathsf{hom}_A(M, A)$ con su estructura de A-módulo a derecha obtenida de la estructura de A-bimódulo de A. Muestre que M es un proyectivo finitamente generado sii M^* lo es.

2.7. $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

2.8. Si A es un dominio de integridad y K es su cuerpo de fracciones, entonces K es un A-módulo inyectivo.

2.9. Sea G un grupo finito y k un cuerpo tal que $|G|$ es inversible en k. Mostrar que todo $k[G]$-módulo es proyectivo e inyectivo. ¿Todo $k[G]$-módulo es necesariamente libre?

2.10. Si A un un anillo de división, todo A-modulo es inyectivo y proyectivo.