
ÁLGEBRA II

Segundo Cuatrimestre — 2009

Práctica 7: Módulos

1. Módulos y morfismos

1.1. Sea A un anillo, $n \geq 1$ y $M \in M_{m,n}(A)$. Muestre que la multiplicación matricial da un morfismo de A -módulos

$$f : x \in A^n \mapsto Mx \in A^m.$$

1.2. Sea A un anillo.

- (a) Sea M un A -módulo a izquierda. Si definimos un producto $M \times A^{\text{op}} \rightarrow M$ poniendo $m \cdot a = am$, podemos dotar a M de una estructura de A^{op} -módulo a derecha. Lo notamos M^{op} .
- (b) Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos a izquierda, entonces $f : M^{\text{op}} \rightarrow N^{\text{op}}$ es un morfismo de A^{op} -módulos a derecha.
- (c) Recíprocamente, todo A^{op} -módulo a derecha es de la forma M^{op} para algún A -módulo a izquierda M y todo morfismo de A^{op} -módulos está inducido como en la parte anterior.

1.3. Sean N y M dos \mathbb{Q} -módulos. Muestre que una función $f : N \rightarrow M$ es un morfismo de \mathbb{Q} -módulos sii es un morfismo de grupos abelianos.

1.4. Sea A un anillo y N, M dos A -módulos.

- (a) Muestre que $\text{hom}_A(M, N)$ es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \quad \forall f, g \in \text{hom}_A(M, N), \forall m \in M.$$

- (b) Sea $Z(A)$ el centro de A . Definimos una operación

$$Z(A) \times \text{hom}_A(M, N) \rightarrow \text{hom}_A(M, N)$$

poniendo

$$(a \cdot f)(m) = f(am), \quad \forall f \in \text{hom}_A(M, N), \forall a \in Z(A), \forall m \in M.$$

Muestre que esto hace de $\text{hom}_A(M, N)$ un $Z(A)$ -módulo.

- (c) Muestre que para todo A -módulo M existe un isomorfismo de $Z(A)$ -módulos $\text{hom}_A(A, M) \rightarrow M$.

1.5. (a) Sean A, B y C anillos y sean M un (A, B) -bimódulo y N un (A, C) -bimódulo. Muestre que el grupo abeliano $\text{hom}_A(M, N)$ posee una única estructura de (B, C) -bimódulo tal que

$$(b \cdot f \cdot c)(m) = f(mb)c, \quad \forall b \in B, \forall c \in C, \forall m \in M.$$

- (b) Sea A un anillo y M un A -módulo a izquierda. Considerando a A como (A, A) -bimódulo, muestre que hay un isomorfismo de A -módulos a izquierda $\text{hom}_A(A, M) \cong M$.

1.6. *Cambios de anillo.* Sea $\phi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos.

- (a) Muestre que si definimos un producto $A \times B \rightarrow B$ poniendo

$$a \cdot b = \phi(a)b$$

dotamos a B de una estructura de A -módulo a izquierda sobre B . De forma similar podemos obtener una estructura de A -módulo a derecha y de A -bimódulo sobre B .

- (b) Sea M un B -módulo a izquierda. Muestre que el producto $A \times M \rightarrow M$ dado por $a \cdot m = \phi(a)m$ hace de M un A -módulo a izquierda. Lo notamos $\phi^*(M)$.
 (c) Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de B -módulos a izquierda, entonces $f : \phi^*(M) \rightarrow \phi^*(N)$ es un morfismo de A -módulos a izquierda. Lo notamos $\phi^*(f)$.
 (d) Si M y N son B -módulos a izquierda, la aplicación

$$\phi^* : f \in \text{hom}_B(M, N) \mapsto \phi^*(f) \in \text{hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

- (e) Si M, N y P son B -módulos a izquierda y $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son morfismos de B -módulos, entonces

$$\phi^*(g \circ f) = \phi^*(g) \circ \phi^*(f).$$

En particular, la aplicación $\phi^* : \text{End}_B(M) \rightarrow \text{End}_A(\phi^*(M))$ es un morfismo de anillos.

- (f) De condiciones sobre ϕ que impliquen que la aplicación

$$\phi^* : \text{hom}_B(M, N) \rightarrow \text{hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

sea inyectiva (sobreyectiva) cualesquiera sean los B -módulos M y N .

1.7. Sea A un anillo, M un A -módulo a izquierda y sea $B = \text{End}_A(M)$ el anillo de endomorfismos de M .

- (a) Muestre que M es un B -módulo a derecha de manera natural y que con esa estructura resulta de hecho un (A, B) -bimódulo.
 (b) ¿Qué relación hay entre A y $\text{End}_B(M)$?

1.8. Sea A un anillo.

- (a) Sea $f : M \rightarrow M'$ un morfismo de A -módulos a izquierda. Para cada A -módulo a izquierda definimos un aplicaciones

$$f_P^* : h \in \text{hom}_A(M', P) \mapsto h \circ f \in \text{hom}_A(M, P)$$

y

$$f_*^P : h \in \text{hom}_A(P, M) \mapsto f \circ h \in \text{hom}_A(P, M').$$

Se trata de morfismos de grupos abelianos.

- (b) Sean $f : M \rightarrow M'$ y $g : M' \rightarrow M''$ morfismos de A -módulos. Entonces para cada A -módulo a izquierda P vale que

$$f_P^* \circ g_P^* = (g \circ f)_P^*$$

y

$$g_*^P \circ f_*^P = (g \circ f)_*^P.$$

(c) Una sucesión de A -módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacta sii la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \text{hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \text{hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \text{hom}_A(N, M'')$$

es exacta para todo A -módulo a izquierda N . ¿Hay un enunciado similar que involcre a los morfismos f_*^N y g_*^N ?

(d) ¿Es cierto que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A -módulos a izquierda entonces

$$0 \longrightarrow \text{hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \text{hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \text{hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos?

1.9. Un A -módulo M es simple sii para todo $m \in M \setminus 0$, $Am = M$.

1.10. (a) *Lema de Schur.* Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos.

i) Si M es simple, entonces f es o bien nula o bien inyectiva.

ii) Si N es simple, entonces f es o bien nula o bien sobreyectiva.

iii) Si M y M son simples, entonces f es o bien nula o bien un isomorfismo.

(b) Si M es un A -módulo simple, $\text{End}_A(M)$ es un anillo de división.

1.11. Sea A un dominio íntegro y sean $v_1, \dots, v_n \in A^n$. Sea $M \in M_n(A)$ la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, \dots, v_n .

(a) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si $\det M \neq 0$.

(b) El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores si $\det M \in A^\times$.

1.12. (a) Todo módulo de tipo finito posee un conjunto generador minimal.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto generador minimal de \mathbb{Z} de cardinal n .

1.13. Sea k un cuerpo y V un k -espacio vectorial. Sea $f \in \text{End}_k(V)$. Muestre que existe exactamente una estructura de $k[X]$ -módulo a izquierda sobre V para la cual $k \subset k[X]$ actúa por multiplicación escalar y

$$X \cdot v = f(v), \quad \forall v \in V.$$

1.14. Sea A un anillo y M un A -módulo a izquierda.

(a) El conjunto $\text{ann } M = \{a \in A : am = 0, \forall m \in M\}$ es un ideal a izquierda de A . Si $\text{ann } M = 0$, decimos que M es un A -módulo *fiel*.

(b) De ejemplos de módulos fieles.

2. Algunos lemas usuales

2.15. (a) Sea

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\
 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de A -módulos izquierdos en el que las filas son exactas. Entonces existe exactamente un morfismo $f'' : M'' \rightarrow N''$ que completa el diagrama preservando la conmutatividad.

(b) Si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

2.16. *Lema de los cinco.* Consideremos un diagrama conmutativo de A -módulos izquierdos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\
 \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 \\
 N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5
 \end{array}$$

y supongamos que las dos filas son exactas.

- (a) Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.
- (b) Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.
- (c) Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.

2.17. *Lema de los nueve.* Consideremos un diagrama de A -módulos izquierdos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

en el que las tres columnas y las dos primeras (o las dos últimas) filas son exactas. Entonces la tercera fila también es exacta.