

---

# ÁLGEBRA II

## Segundo Cuatrimestre — 2009

### Práctica 6: Factorización y Localización

---

#### 1. Factorización

1.1. Dar un ejemplo de  $A < B < C$  dominios íntegros tales que  $A$  y  $C$  sean DFU pero  $B$  no.

1.2. Sea  $A$  un dominio íntegro,  $I \subset A$  un ideal bilátero propio. Utilizando la proyección  $\pi : A \rightarrow A/I$  se define:

$\hat{\pi} : A[X] \rightarrow A/I[X]$  tal que  $\hat{\pi}(a) = \pi(a), \forall a \in A \subset A[X]$  y  $\hat{\pi}(x) = x$ .

Probar que si  $f \in A[X]$  mónico es reducible, entonces  $\hat{\pi}(f)$  es reducible.

**Definición.** Sea  $A$  un dominio íntegro y sean  $0 \neq a, b \in A$ . Dado  $d \in A$ ,  $d$  se llama un máximo común divisor entre  $a$  y  $b$  si cumple las siguientes condiciones:

(i)  $d|a$  y  $d|b$

(ii) Si  $c|a$  y  $c|b$ , entonces  $c|d$

Si un máximo común divisor entre  $a$  y  $b$  es una unidad, entonces  $a$  y  $b$  se dicen coprimos.

1.3. Probar que son dos máximos comunes divisores entre  $a$  y  $b$  son asociados.

1.4. Sea  $A$  un DFU. Entonces, si  $0 \neq a, b \in A$ , existe un máximo común divisor entre  $a$  y  $b$ .

1.5. Probar que en  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  no existe un máximo común divisor entre  $6$  y  $2 \cdot (1 + \sqrt{-5})$ . Observar que existen ideales no principales en  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

1.6. ¿Es cierto que en un DFU, si  $d$  es un máximo común divisor entre  $a$  y  $b$ , entonces los ideales  $\langle a, b \rangle$  y  $\langle d \rangle$  coinciden?

1.7. Sean  $a, b$  y  $c$  elementos de un DFU. Probar:

(a) Si  $a|b \cdot c$  y  $a$  y  $b$  son coprimos, entonces  $a|c$ .

(b) Si  $a$  y  $b$  son coprimos,  $a|c$  y  $b|c$ , entonces  $a \cdot b|c$ .

1.8. Sea  $A$  DFU y  $K$  su cuerpo de fracciones, es decir  $K = A_{A-\{0\}}$ . Sea  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in A[X]$ . Sea  $p \in A$  un primo tal que:

- $p$  no divide a  $a_n$
- $p$  divide a  $a_i, \forall 0 \leq i \leq n-1$
- $p^2$  no divide a  $a_0$

Probar que  $f$  es irreducible en  $K[X]$ .

1.9. Sea  $A$  DFU y  $K$  su cuerpo de fracciones. Sea  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in A[X]$  tal que  $a_0 \neq 0$ . Sean  $0 \neq a, b \in A$  coprimos tales que  $\frac{a}{b} \in K$  es raíz de  $f$ , probar que  $a|a_0$  y  $b|a_n$  en  $A$ .

1.10. Probar que los siguientes son ideales primos  $\mathbb{Z}[X]$  y que son los únicos:

- $\langle p \rangle$  con  $p \in \mathbb{Z}$  primo.
- $\langle p, f \rangle$  con  $p \in \mathbb{Z}$  primo y  $f \in \mathbb{Z}[X]$  tal que  $\hat{\pi}(f)$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_p$ .
- $\langle f \rangle$  con  $f$  primitivo e irreducible en  $\mathbb{Q}[X]$ .

1.11. (a) Mostrar que  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  es euclideo si  $d \in \{-2, 2, 3\}$ .

(b) Factorizar a  $16 + 11\sqrt{2}$  como producto de elementos irreducibles del anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .

(c) Un número primo  $p \in \mathbb{Z}$  es irreducible en  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  sii  $-2$  es un cuadrado en  $\mathbb{Z}_p$ . Dé ejemplos de factorizaciones en  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  de números primos de  $\mathbb{Z}$ .

## 2. Localización

*En estos ejercicios los anillos son conmutativos.*

2.12. Sea  $A$  un anillo y sea  $S \subset A^\times$  un subconjunto multiplicativamente cerrado de unidades de  $A$ . Entonces  $A_S \cong A$ .

2.13. Sea  $A$  un anillo y sea  $S \subset A$  un subconjunto multiplicativamente cerrado. Si  $0 \in S$ , entonces  $A_S \cong 0$ .

2.14. Sea  $A$  un anillo,  $S \subset A$  un subconjunto multiplicativamente cerrado e  $I \subset A$  un ideal. Sea  $\bar{S}$  la imagen de  $S$  por la aplicación canónica  $A \rightarrow A/I$ . Entonces  $(A/I)_S \cong A_S/IA_S$ .

2.15. Sea  $A$  un anillo,  $S, T \subset A$  subconjuntos multiplicativamente cerrados de  $A$  y sea  $T'$  la imagen de  $T$  por la aplicación canónica  $A \rightarrow A_S$ . Sea  $U = ST = \{st : s \in S, t \in T\}$ .

Muestre que  $U$  es un conjunto multiplicativamente cerrado en  $A$  y que  $(A_S)_T \cong A_U$ .

2.16. (a) Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A = C_{\mathbb{R}}(X)$  el anillo de las funciones reales continuas sobre  $X$ . Sea  $x_0 \in X$  y pongamos  $S = \{f \in A : f(x_0) \neq 0\}$ . Muestre que  $S$  es multiplicativamente cerrado. ¿Es inyectiva la aplicación canónica  $A \rightarrow A_S$ ? De no serlo, describa su núcleo.

(b) Supongamos que  $A$  es un dominio de integridad y  $S \subset A$  es multiplicativamente cerrado. Muestre que la aplicación canónica  $A \rightarrow A_S$  es inyectiva.

(c) Sea  $A$  un anillo y  $S \subset A$  un subconjunto multiplicativamente cerrado. Dé condiciones necesarias y suficientes para que la aplicación canónica  $A \rightarrow A_S$  sea inyectiva.

2.17. Sea  $A$  un anillo y  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ . Muestre que  $S = A \setminus \mathfrak{p}$  es un conjunto multiplicativamente cerrado. En general, escribimos  $A_{\mathfrak{p}}$  en lugar de  $A_{A \setminus \mathfrak{p}}$ .

2.18. Sea  $A = C(\mathbb{R})$ ,  $U = (0, 1)$  y  $S = \{f \in A : \forall t \in U, f(t) \neq 0\}$ .

(a) Vea que  $S$  es multiplicativamente cerrado en  $A$ .

(b) Sea  $r : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(U)$  la restricción de funciones. Muestre que existe  $\bar{r} : C(\mathbb{R})_S \rightarrow C(U)$  tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 C(\mathbb{R}) & \xrightarrow{r} & C(U) \\
 \text{can} \downarrow & \nearrow \bar{r} & \\
 C(\mathbb{R})_S & & 
 \end{array}$$

Además, verifique que  $\bar{r}$  es inyectiva.

(c) Muestre que  $\bar{r}$  es sobreyectiva.

**2.19.** Sea  $A$  un anillo,  $S \subset A$  un subconjunto multiplicativamente cerrado y sea  $f : A \rightarrow A_S$  la aplicación canónica.

- (a) Muestre que si  $I \subset A_S$  es un ideal, entonces  $f^{-1}(I)$  es un ideal de  $A$ .
- (b) De esta forma, se obtiene una aplicación  $f^* : \text{Id}(A_S) \rightarrow \text{Id}(A)$  del conjunto de ideales de  $A_S$  al conjunto de ideales de  $A$ . Muestre que  $f^*$  preserva inclusiones e intersecciones y que es inyectiva.
- (c) Si  $J \subset A$  es un ideal, entonces  $J$  está en la imagen de  $f^*$  sii  $J = f^{-1}(JA_S)$  sii ningún elemento de  $S$  es un divisor de cero en  $A/J$ .
- (d) Muestre que  $f^*(\text{Spec } A_S) \subset \text{Spec } A$  de manera que, por restricción, obtenemos una inyección  $f^* : \text{Spec } A_S \rightarrow \text{Spec } A$ . La imagen de esta aplicación es exactamente  $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ .

**2.20.** Sea  $A$  un anillo y  $S \subset A$  un subconjunto multiplicativamente cerrado.

- (a) Si  $I \subset A$  es un ideal maximal entre los que no intersecan a  $S$ , entonces  $I$  es primo.
- (b) Describa el nilradical de  $A_S$ .

**2.21.** Sea  $p \in \mathbb{N}$  un número primo y  $\mathfrak{p} = (p)$  el ideal primo de  $\mathbb{Z}$  correspondiente. Muestre que si  $I \subset \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$  es un ideal no nulo, entonces existe  $r \in \mathbb{N}_0$  tal que  $I = p^r \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ .

**2.22.** Sea  $A$  un anillo y  $T \subset A$  un subconjunto. Sea  $X = \{x_t : t \in T\}$  un conjunto de variables indexadas por  $T$  y sea  $A[X]$  en anillo de polinomios con variables en  $X$ . Sea  $S \subset A$  el menor subconjunto multiplicativamente cerrado de  $A$  que contiene a  $T$ . Muestre que hay un isomorfismo

$$A_S \cong A[X] / \langle tx_t - 1 : t \in T \rangle.$$

<sup>†</sup>**2.23.** Sea  $A$  un anillo. Muestre que  $S \subset A$  es un subconjunto multiplicativamente cerrado maximal sii  $A - S$  es un ideal primo minimal.

<sup>†</sup>**2.24.** Sea  $A$  un anillo y  $S \subset A$  un subconjunto multiplicativamente cerrado. Decimo que  $S$  es *saturado* si

$$ab \in S \iff a \in S \text{ y } b \in S.$$

Muestre que  $S$  es saturado sii  $A - S$  es unión de ideales primos.

**2.25.** Sea  $A$  un anillo. Describa el subconjunto  $S \subset A$  multiplicativamente cerrado maximal tal que  $A \rightarrow A_S$  es inyectivo.