Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2009
Práctica 1: Grupos – introducción

1. Ejemplos

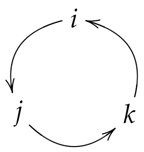
1.1. *(a)* Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Mostrar que $\mathbb{G}_n$, con respecto al producto de $\mathbb{C}$ es un grupo abeliano cíclico.

(b) Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Mostrar que S^1, con respecto al producto de $\mathbb{C}$, es un grupo abeliano. ¿Es cíclico?

1.2. Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por la siguiente ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&i \cdot j = k, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = j, \\
&j \cdot i = -k, \quad k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j, \\
&i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1,
\end{aligned}
$$

y la regla usual de los signos. Mostrar que $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano. Llamamos a $\mathbb{H}$ el *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$.



1.3. Sea k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Ponemos

$$\mathsf{GL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A \neq 0\}$$

y

$$\mathsf{SL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A = 1\}.$$

Mostrar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Descríbalos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

1.4. *Grupo opuesto.* Sea G un grupo. Sea $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ tal que $G^{\mathrm{op}} = G$ como conjunto, y el producto es

$$\cdot : (g, h) \in G^{\mathrm{op}} \times G^{\mathrm{op}} \mapsto hg \in G^{\mathrm{op}}.$$

Mostrar que $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ es un grupo.

1.5. Sea G un grupo y X un conjunto.

(a) Sea $G^X = \{f : X \to G\}$ dotado del producto $\cdot : G^X \times G^X \to G^X$ dado por

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \qquad \forall f, g \in G^X, \forall x \in X.$$

Mostrar que G^X es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

(b) Sea $x_0 \in X$ y sea $H_{x_0} = \{f \in G^X : f(x_0) = 1\}$. Mostrar que H_{x_0} es un subgrupo de G^X. ¿Es normal?

1.6. *Producto directo.* Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación $\cdot$ sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por

$$\cdot : \big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big) \in K \times K \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2) \in K.$$

Mostrar que K es un grupo. Llamamos a K el *producto directo de G y H* y lo notamos $G \times H$.

1.7. *$\mathbb{F}_p$-espacios vectoriales.*

(a) Sea G un grupo abeliano y sea p un número primo. Supongamos que todo elemento de G tiene order p. Mostrar que es posible definir una multiplicación $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \to G$ por escalares de $\mathbb{F}_p$ de manera que $(G, +, \cdot)$ resulte un $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial.

(b) Supongamos además que G es finito. Mostrar que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{n \text{ veces}}.$$

2. Subgrupos

2.1. Sea G un grupo y $H \subset G$ un subconjunto. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es un subgrupo de G.

(ii) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy^{-1} \in H$.

Si además G es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

a) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy \in H$.

[resume] Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando G es infinito.

2.2. Sea G un grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G.

(a) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

(b) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G sii $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

2.3. Dado un grupo G, ¿es el subconjunto de elementos de orden finito un subgrupo de G?

2.4. Sea G un grupo.

(a) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos de G. Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G.

(b) Sea ahora $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X. Describirlo en término de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se denota $\langle X \rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ en lugar de $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$.

2.5. Sea G un grupo, $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$ y sea N un subgrupo de G. Mostrar que N es normal en G sii $xNx^{-1} = N$ para todo $x \in X$.

2.6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{G}_{2^n}$ una raíz primitiva 2^n-ésima. Consideremos las matrices

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbb{H}_n = \langle R, S \rangle$ el subgrupo generado por R y S en $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$. Llamamos a $\mathbb{H}_n$ el *n-ésimo grupo de cuaterniones generalizados.*

Determinar el orden de $\mathbb{H}_n$ y listar sus elementos.

2.7. *(a)* Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$ y sean $\alpha, \beta \in G$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\alpha^4 = \beta^3$, pero que $\alpha\beta$ tiene orden infinito. Así, $\langle \alpha, \beta \rangle$ es infinito.

Este ejemplo muestra que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

(b) Determine $\langle \alpha, \beta \rangle$.

2.8. *Generación de S_n.*

(a) Mostrar que
  (i) $S_n = \langle \{ (i\,j) : 1 \leq i < j \leq n \} \rangle$;
  (ii) $S_n = \langle \{ (1\,i) : 1 \leq i \leq n \} \rangle$;
  (iii) $S_n = \langle \{ (i \;\; i+1) : 1 \leq i < n \} \rangle$;
  (iv) $S_n = \langle (1\,2),\ (1\,2\,3 \ldots n) \rangle$;

†*(b)* Sea $\mathcal{T} = \{ (i\,j) : 1 \leq i < j \leq n \}$ el conjunto de todas las transposiciones. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $T \subset \mathcal{T}$ para que $S_n = \langle T \rangle$.

2.9. Sea G un grupo.

(a) Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos normales de G. Mostrar que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G.

(b) Sea $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X. Describirlo en término de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de G generado por X*. En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X, construido en **2.4**.

(c) Supongamos que $X \subset G$ es un conjunto tal que, cualquiera sea $g \in G$, es $gXg^{-1} \subset X$. Mostrar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X.

2.10. *(a)* Sea G un grupo y sea $N \subset G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subset N$ para todo $g \in G$. Muestre que N es normal.

(b) Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Q})$ y $H = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z} \} \subset G$. Entonces H es un subgrupo de G. Sea ahora $g = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$. Muestre que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

2.11. Si G es un grupo y $A, B \subset G$ son subgrupos, definimos

$$AB = \{ ab : a \in A, b \in B \}.$$

Consideremos un grupo G y $A, B \subset G$ dos subconjuntos arbitrarios.

(a) AB es un subgrupo de G sii $AB = BA$.

(b) $G = AB$ sii $G = \langle A, B \rangle$ y $AB = BA$.

(c) Si $AB = BA$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $AB \cap C = A(B \cap C)$.

(d) Si $G = AB$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $C = A(B \cap C)$.

2.12. Sea G un grupo. Si $a, b \in G$, escribimos $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$; $[a, b]$ es el *conmutador de a y b*. Claramente $[a, b] = 1$ sii a y b conmutan, así que en cierta forma $[a, b]$ mide la no-conmutatividad de a y b.

(a) Sea $X = \{ [a, b] : a, b \in G \}$ y sea $G' = \langle X \rangle$ el subgrupo generado por X en G. Mostrar que G' es normal en G. Llamamos a G' es *subgrupo derivado de G* y lo escribimos $[G, G]$.

(b) G es abeliano sii $[G, G] = 1$.

(c) Determinar $[G, G]$ cuando G es $\mathbb{H}$ o un grupo diedral D_n.

2.13. *(a)* Sea G un grupo y sea $\mathsf{Z}(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Mostrar que $\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo normal de G. Llamamos a $\mathsf{Z}(G)$ el *centro de* G y decimos que los elementos de $\mathsf{Z}(G)$ son *centrales* en G.

(b) Sea G un grupo y $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X \rangle$. Mostrar que es

$$\mathsf{Z}(G) = \{g \in G : gx = gx \text{ para todo } x \in X\}.$$

(c) Encontrar el centro de un grupo abeliano, de D_n para cada $n \geq 1$, de $\mathbb{H}$, de S_n para cada $n \geq 1$, de $\mathsf{GL}_n(R)$ para cada $n \geq 1$ y $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p\}$.

(d) Sea G un grupo y X un conjunto. Determinar el centro de G^X.

2.14. Sea G un grupo y H un subgrupo abeliano de G. Mostrar que $H\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo abeliano de G.