Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2009
Práctica 0: Repaso

1. Repaso de álgebra I

1.1. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{G}_n = \{w \in \mathbb{C} : w^n = 1\}$. Probar que:

(a) $\mathbb{G}_n$ tiene n elementos;

(b) $z, w \in \mathbb{G}_n \Rightarrow zw \in \mathbb{G}_n$;

(c) $w \in \mathbb{G}_n \Rightarrow w^{-1} \in \mathbb{G}_n$;

(d) $w \in \mathbb{G}_n \Rightarrow |w| = 1$;

(e) $w \in \mathbb{G}_n \Rightarrow \overline{w} \in \mathbb{G}_n$;

(f) $-1 \in \mathbb{G}_n$ entonces n es par.

1.2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que:

(a) $\mathbb{G}_n \cap \mathbb{G}_m = \mathbb{G}_{(n:m)}$,

(b) $\mathbb{G}_n \subset \mathbb{G}_m \Leftrightarrow n|m$.

1.3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que:

(a) $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad y $k \in \mathbb{N}$ entonces w^k es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $(n : k) = 1$;

(b) $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $w^n = 1$ y $w^j \neq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j < n$;

(c) si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad entonces $w^k = 1$ si y sólo si $n|k$.

1.4. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{Z}_n = \{m \in \mathbb{Z} : 0 \leq m < n\}$. Definimos la suma y el producto en $\mathbb{Z}_n$ como: dados $a, b \in \mathbb{Z}_n$, $a + b := r_n(a +_{\mathbb{Z}} b)$ y $a.b := r_n(a ._{\mathbb{Z}} b)$, donde $+_{\mathbb{Z}}$ y $._{\mathbb{Z}}$ son la suma y el producto usual de $\mathbb{Z}$ y $r_n(-)$ denota tomar el resto de dividir por n. Probar que:

(a) $a, b \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}_n$;

(b) $a \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow (-1).a := r_n(-1).a \in \mathbb{Z}_n$;

(c) comparar estos resultados con el ejercicio 1.1.

1.5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Un elemnto $a \in \mathbb{Z}$ se dice 'generador' de $\mathbb{Z}_n$ si verifica que: para todo $b \in \mathbb{Z}$ existe $k \in \mathbb{Z}_n$ tal que $b = a.k$ en $\mathbb{Z}_n$. Probar que:

(a) si a es generador de $\mathbb{Z}_n$ entonces, $a.k$ también lo es si y sólo si $(n : k) = 1$;

(b) $a \in \mathbb{Z}$ es generador de $\mathbb{Z}_n$ si y sólo si $a.j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j < n$;

(c) si $a \in \mathbb{Z}$ es generador de $\mathbb{Z}_n$ entonces $a.k = 0$ si y sólo si $n|k$.

(d) comparar estos resultados con el ejercicio 1.3.

2. Repaso de álgebra lineal

2.6. Determinar la forma normal de Jordan y una base de Jordan para las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2.7. *(a)* ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices en $M_8(\mathbb{C})$ cuyo polinomio minimal es x^3? ¿Y en $M_8(\mathbb{R})$?

(b) Si endomorfismos nilpotentes de $\mathbb{C}^3$ tienen el mismo mismo polinomio minimal y el mismo polinomio característico, ¿son semejantes? ¿Vale este resultado para $\mathbb{C}^n$ si $n > 3$?

2.8. Decidir si existen endomorfismos f tales que

(a) $f \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^8)$, nilpotente, y

$$(\mathsf{rank}\, f, \mathsf{rank}\, f^2, \mathsf{rank}\, f^3, \mathsf{rank}\, f^4, \mathsf{rank}\, f^5) = (6, 4, 3, 1, 0);$$

(b) $f \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^{16})$, $m_f = X^5$, y

$$(\mathsf{rank}\, f, \mathsf{rank}\, f^2, \mathsf{rank}\, f^3, \mathsf{rank}\, f^4, \mathsf{rank}\, f^5) = (9, 5, 3, 1, 0).$$

¿Cuántas clases de semejanza hay?

2.9. Sea $f \in \mathsf{End}(V)$ con $\dim V = 6$ de polinomio minimal X^6, y supongamos que $\{v_1, \ldots, v_6\}$ es base de Jordan para f. Encontrar la forma de Jordan para f^2, f^3, f^4 y f^5, y bases que las realicen.

2.10. Sea T un endomorfismo de un espacio vectorial de dimension finita V, tal que T tiene un vector cíclico. Probar que todas las matrices que conmutan con T son polinomios en T. ¿Vale la vuelta? (i.e. si se cumple que todas las matrices que conmutan con T son polinomios en T, entonces T tiene un vector cíclico.)