1
2
3
4

Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2009
Segundo Parcial (domiciliario)

1. *a*) Sean $C^\bullet$ y $D^\bullet$ dos complejos de A-módulos.

i) Un morfismo de complejos $f : C^\bullet \to D^\bullet$ induce un morfismo en la homología $H(f) : H(C^\bullet) \to H(D^\bullet)$.

ii) Si f, $g : C^\bullet \to D^\bullet$ son dos morfismos de complejos que son homotópicos, entonces los morfismos que inducen en la homología conciden, es decir, $H(f) = H(g) : H(C^\bullet) \to H(D^\bullet)$.

Definición. *Sean $C^\bullet$ y $D^\bullet$ dos complejos, y dos morfismos de complejos $f, g : C^\bullet \to D^\bullet$. Se dice que f y g son homotópicos (se notará $f \simeq g$) si existe una sucesión de morfismos $\{h_i\}$, donde $h_i : C^i \to D^{i-1}$ tal que $f_i - g_i = d'^{i-1}h_i + h_{i+1}d^i$ para todo índice i.*

En un diagrama, la situación se ilustra como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d^{i-2}"] & C^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, shift right, "f_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i-1}"] & C^{i} \arrow[r, "d^{i}"] \arrow[d, shift right, "f_{i}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i}"] \arrow[dl, "h_i"] & C^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i+1}"] \arrow[dl, "h_{i+1}"] & C^{i+2} \arrow[r, "d^{i+2}"] \arrow[d, shift right, "f_{i+2}"'] \arrow[d, shift left, "g_{i+2}"] \arrow[dl, "h_{i+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d'^{i-2}"'] & D^{i-1} \arrow[r, "d'^{i-1}"'] & D^{i} \arrow[r, "d'^{i}"'] & D^{i+1} \arrow[r, "d'^{i+1}"'] & D^{i+2} \arrow[r, "d'^{i+2}"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Diremos que un morfismo de complejos $f : C^\bullet \to D^\bullet$ es una equivalencia homotópica si existe un morfismo de complejos $g : D^\bullet \to C^\bullet$ tal que $gf \simeq 1_C$.

iii) Un morfismo de complejos $f : C^\bullet \to D^\bullet$ que es una equivalencia homotópica induce un isomorfismo en la homología $H(f) : H(C^\bullet) \to H(D^\bullet)$.

iv) Si N es un A-módulo, entonces hay un complejo de la forma

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(C_{p-1}, N) \xrightarrow{d_p^*} \mathsf{Hom}_A(C_p, N) \xrightarrow{d_{p+1}^*} \mathsf{Hom}_A(C_{p+1}, N) \longrightarrow \cdots$$

donde $d_\bullet$ son las diferenciales del complejo $C^\bullet$. Notamos $\mathsf{Hom}_A(C^\bullet, N)$ a este complejo.

b) Sean M y N dos A-módulos. Sea

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M, a la que notamos $P_\bullet$. Para cada $n \geq 0$ definimos un grupo abeliano

$$\mathsf{Ext}_A^n(M, N) = H^n(\mathsf{Hom}_A(P_\bullet, N)),$$

es decir, la homología en grado n del complejo $\mathsf{Hom}_A(P_\bullet, N)$ obtenido como arriba a partir de $P_\bullet$ y de N.

i) ***Buena definición.*** Si $P'_\bullet$ es otra resolución proyectiva de M, entonces hay una equivalencia homotópica $f : P_\bullet \to P'_\bullet$. Además, f induce un isomorfismo $H(f) : H(\mathsf{Hom}_A(P'_\bullet, N)) \to H(\mathsf{Hom}_A(P_\bullet, N))$. Esto nos dice que el grupo $\mathsf{Ext}_A^n(M, N)$ depende solamente de M y de N y no de la resolución proyectiva de M usada para calcularlo.

ii) ***Funtorialidad 2.*** Sea N' un A-módulo y $g : N \to N'$ un morfismo de A-módulos. Entonces g induce un morfismo de complejos $g_\bullet : \mathsf{Hom}_A(P_\bullet, N) \to \mathsf{Hom}_A(P_\bullet, N')$, que a su vez induce un morfismo $g^n_* : \mathsf{Ext}^n_A(M, N) \to \mathsf{Ext}^n_A(M, N')$.

†iii) ***Funtorialidad 1.*** Sean M' un A-módulo, $P'_\bullet$ una resolución proyectiva de M' y $f : M \to M'$ un morfismo de A-módulos. El morfismo f induce un morfismo de complejos $f_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$, que a su vez induce un morfismo de complejos $f^\bullet : \mathsf{Hom}_A(P'_\bullet, N) \to \mathsf{Hom}_A(P_\bullet, N)$. Pasando a la homología, $f^\bullet$ determina un morfismo $f^{*n} : \mathsf{Ext}^n_A(M', N) \to \mathsf{Ext}^n_A(M, N)$ que depende solamente de f, M, M' y N y no de la elección de $f_\bullet$.

c) Calcular $\mathsf{Ext}^p_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m)$ y $\mathsf{Ext}^p_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$ para todo $p \geq 0$.

2. Sea A un anillo y sea $\mathcal{C}$ el conjunto de las clases de isomorfismo de los A-módulos proyectivos finitamente generados. Si P es un tal módulo, escribimos $[P] \in \mathcal{C}$ a su clase de isomorfismo.

Sea F el grupo abeliano libre generado por $\mathcal{C}$, sea R el subgrupo de F generado por los elementos de la forma

$$[P \oplus Q] - [P] - [Q]$$

con P y Q A-módulos proyectivos finitamente generados y sea

$$K_0(A) = F/R.$$

a) Si $A = k$ es un cuerpo, entonces hay un isomorfismo de grupos $K_0(k) \cong \mathbb{Z}$.

b) Si A es un anillo local conmutativo o un dominio de ideales principales, entonces $K_0(A) \cong \mathbb{Z}$.

c) Si G es un grupo abeliano y $f : \mathcal{C} \to G$ es una función tal que

$$f([P \oplus Q]) = f([P]) + f([Q])$$

para cada par de módulos proyectivos finitamente generados P y Q, entonces existe un único morfismo de grupos abelianos $\bar{f} : K_0(A) \to G$ tal que $\bar{f}([P]) = f([P])$.

3. Sea A un anillo, I un ideal a derecha de A. $\mathbb{I}(I) = \{a \in A : aI \subset I\}$. El anillo $\mathbb{I}(I)$ se llama el idealizador de I. Pruebe que

a) $\mathbb{I}(I)/I$ es un anillo que actúa por multiplicacióin a izquierda sobre el A-módulo A/I, y que $\mathbb{I}(I)/I \cong \mathsf{End}(A/I)$, que es un anillo de división;

b) si I es un ideal a derecha maximal de A, entonces A es un $\mathbb{I}(I)$-módulo a derecha finitamente generado;

c) si I es un ideal a derecha maximal de A, entonces A/I visto como $\mathbb{I}(I)$-módulo a derecha tiene una serie de descomposición de longitud 1 si $AI = A$, y una de longitud 2 en caso contrario;

d) si I es un ideal a derecha maximal de A e $\mathbb{I}(I)$ es Noetheriano (Artiniano) a derecha, entonces A es Noetheriano (Artiniano) a derecha;

†*e*) si I es un ideal a derecha maximal de A y A es Noetheriano (Artiniano) a derecha, entonces $\mathbb{I}(I)$ es Noetheriano (Artiniano) a derecha;

Definición. *Sean A y B anillos, ${}_AM_B$ y ${}_BN_A$ bimódulos y $\theta : M \times N \to A$ y $\psi : N \times M \to B$ son funciones A y B bilineales respectivamente ($\theta(a \cdot m, n \cdot a') = a \cdot \theta(m, n) \cdot a'$ y $\theta(m \cdot b, n) = \theta(m, b \cdot n)$, análogamente con ψ), que permiten definir un producto entre elementos de M y N. El conjunto $T = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ recibe una estructura de anillo y con ésta, se llama el anillo del Contexto Morita.*

f) Verifique que T recibe una estructura de anillo;

g) Pruebe que el anillo es Noetheriano a derecha si y sólo si A_A, B_B, M_B y N_A lo son.

h) Pruebe que si I es un ideal a derecha maximal de un anillo Noetheriano a derecha, entonces el anillo $T = \begin{pmatrix} \mathbb{I}(I) & I \\ A & A \end{pmatrix}$ es también Noetheriano a derecha. Pruebe que $T = \mathbb{I}(J)$, donde J es el ideal de $M_2(A)$ de la forma $T = \begin{pmatrix} I & I \\ A & A \end{pmatrix}$.

4. Definición. *Sea A un anillo, ${}_AM$ un A-módulo a izquierda. Definimos $M^* := \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.*
Pruebe que:

a) dado un ${}_AM$ un A-módulo a izquierda, $M^* := \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un A-módulo a derecha;

b) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo;

c) $M = 0$ si y solo si $M^* = 0$;

d) sea $f : M \to N$ un morfismo de grupos abelianos. Entonces f es inyectivo si y solo si $f^* : N^* \to M^*$ es suryectivo;

e) la sucesión $M' \to M \to M''$ es exacta si y solo si $(M'')^* \to M^* \to (M')^*$ es exacta;

†*f*) dado ${}_AN$ un A-módulo a izquierda de presentación finita, $\sigma : N^* \otimes_A M \to \mathsf{Hom}_A(M, N)^*$ es un isomorfismo;

†*g*) para todo A-módulo izquierdo M, son equivalentes:

i) N un A-módulo playo;

ii) N^* es un A-módulo a derecha inyectivo;

iii) $I \otimes_A N \cong IN \subset N$ para todo ideal a derecha I de A;

iv) la sucesión $0 \to I \otimes_A N \to N \to A/I \otimes_A N \to 0$ es exacta.