

**ÁLGEBRA II**  
**Segundo Cuatrimestre — 2009**  
**Primer Parcial**

1
2
3
4

1. Sea  $G$  un grupo. Para cada primo  $p$ , y cada subgrupo  $H$  de  $G$ , sea  $n_p(H) := \#\text{Syl}_p(H)$  la cantidad de  $p$ -subgrupos de Sylow de  $H$ . Probar que

- a) si  $H < G$ , entonces  $n_p(H) \leq n_p(G)$ . Si además  $H \triangleleft G$ ,  $n_p(G)$  es finito y  $K \in \text{Syl}_p(G)$ , entonces  $H \cap K \in \text{Syl}_p(H)$
- b) si  $G$  es finito,  $H \triangleleft G$  y  $L < G/H$ , entonces  $L \in \text{Syl}_p(G/H)$  si y solo si existe  $P \in \text{Syl}_p(G)$  tal que  $L = PH/H$ .

2. Sean  $A$  y  $B$  anillos conmutativos,  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ ,  $\phi : A \rightarrow B$  morfismo de anillos, entonces  $A \setminus \mathfrak{p}$  y  $S = \phi(A \setminus \mathfrak{p})$  son multiplicativamente cerrados y hay un morfismo de anillos  $\phi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_S$

- a) Probar que si  $\phi_{\mathfrak{p}}$  es mono para todo  $\mathfrak{p}$  entonces  $\phi$  es mono;
- b) Probar que si  $\phi_{\mathfrak{p}}$  es sobreyectiva para todo  $\mathfrak{p}$  entonces  $\phi$  es sobreyectiva;
- c) Si ahora  $A$  es un dominio íntegro entonces  $A_{\mathfrak{p}}$  es subanillo de  $\text{Frac}(A)$  (el cuerpo de fracciones). Probar que  $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} A_{\mathfrak{p}} = A$  en  $\text{Frac}(A)$ .

3. Un conjunto  $(I, \leq)$  parcialmente ordenado se dice *dirigido* si para todo  $i, j \in I$  existe  $k \in I$  tal que  $i, j \leq k$ . Sea  $A$  un anillo,  $I$  un conjunto dirigido y  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia de  $A$ -módulos. Para cada par  $i \leq j$ , sea  $\mu_{i,j} : M_j \rightarrow M_i$  un morfismo de módulos tal que,

- si  $i = j$  entonces  $\mu_{i,i} = \text{Id}_{M_i}$ , y
- para toda terna  $i \leq j \leq k$ ,  $\mu_{i,k} = \mu_{i,j} \circ \mu_{j,k}$ .

Se dice entonces que los módulos  $\{M_i\}_{i \in I}$  con los morfismos  $\mu_{i,j}$  forman un *sistema inverso*  $\{\mu_{i,j} : M_j \rightarrow M_i\}_{i,j \in I}$  sobre  $I$ . Llamaremos *límite inverso* (o *límite proyectivo*) del sistema al par  $(L, (\mu_i : L \rightarrow M_i)_{i \in I})$ , que verifique las siguientes propiedades:

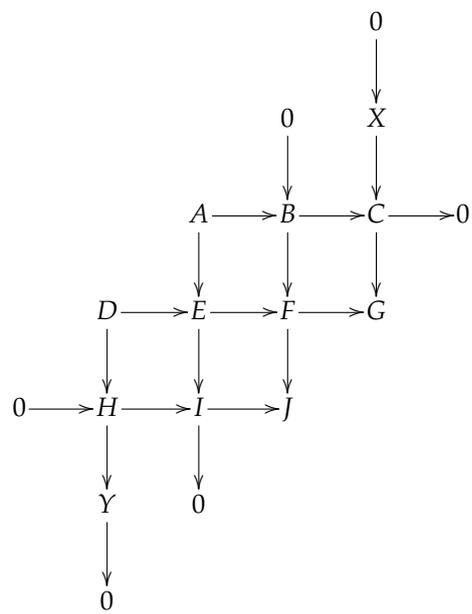
- si  $i \leq j$  entonces  $\mu_i = \mu_{i,j} \circ \mu_j$ ,
- si un módulo  $N$  con morfismos  $\eta_i : N \rightarrow M_i$  verifica que  $\eta_i = \mu_{i,j} \circ \eta_j$ , si  $i \leq j$ , entonces existe un único morfismo  $\mu : N \rightarrow L$  tal que  $\eta_i = \mu_i \circ \mu$ .

Denotaremos  $\varprojlim M_i$  al límite inverso. Probar que

- a) el submódulo  $S := \{(x_i)_{i \in I} : \mu_{i,j}(x_j) = x_i \text{ para todo } i \leq j\}$  de  $\prod_{i \in I} M_i$  verifica la propiedad del límite con  $\mu_i := \pi_i$  las proyecciones canónicas;
- b) para todo  $A$ -módulo  $T$  existe un isomorfismo de grupos abelianos

$$\text{Hom}_A(T, \varprojlim M_i) \cong \varprojlim \text{Hom}_A(T, M_i).$$

4. Dado un anillo  $A$ , considere el diagrama conmutativo de  $A$ -módulos (1) (*ver al dorso*) con filas y columnas exactas. Pruebe que  $X$  es isomorfo a  $Y$ .



(1)