Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2009
Primer Parcial

1
2
3
4

1. Sea G un grupo. Para cada primo p, y cada subgrupo H de G, sea $n_p(H) := \#\,\mathsf{Syl}_p(H)$ la cantidad de p-subgrupos de Sylow de H. Probar que

a) si $H < G$, entonces $n_p(H) \leq n_p(G)$. Si además $H \triangleleft G$, $n_p(G)$ es finito y $K \in \mathsf{Syl}_p(G)$, entonces $H \cap K \in \mathsf{Syl}_p(H)$

b) si G es finito, $H \triangleleft G$ y $L < G/H$, entonces $L \in \mathsf{Syl}_p(G/H)$ si y solo si existe $P \in \mathsf{Syl}_p(G)$ tal que $L = PH/H$.

2. Sean A y B anillos conmutativos, $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}(A)$, $\phi : A \to B$ morfismo de anillos, entonces $A \setminus \mathfrak{p}$ y $S = \phi(A \setminus \mathfrak{p})$ son multiplicativamente cerrados y hay un morfismo de anillos $\phi_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \to B_S$

a) Probar que si $\phi_{\mathfrak{p}}$ es mono para todo $\mathfrak{p}$ entonces ϕ es mono;

b) Probar que si $\phi_{\mathfrak{p}}$ es sobreyectiva para todo $\mathfrak{p}$ entonces ϕ es sobreyectiva;

c) Si ahora A es un dominio íntegro entonces $A_{\mathfrak{p}}$ es subanillo de $\mathsf{Frac}(A)$ (el cuerpo de fracciones). Probar que $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}(A)} A_{\mathfrak{p}} = A$ en $\mathsf{Frac}(A)$.

3. Un conjunto $(I, \leq)$ parcialmente ordenado se dice *dirigido* si para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i, j \leq k$. Sea A un anillo, I un conjunto dirigido y $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de A-módulos. Para cada par $i \leq j$, sea $\mu_{i,j} : M_j \to M_i$ un morfismo de módulos tal que,

- si $i = j$ entonces $\mu_{i,i} = Id_{M_i}$, y
- para toda terna $i \leq j \leq k$, $\mu_{i,k} = \mu_{i,j} \circ \mu_{j,k}$.

Se dice entonces que los módulos $\{M_i\}_{i \in I}$ con los morfismos $\mu_{i,j}$ forman un *sistema inverso* $\{\mu_{i,j} : M_j \to M_i\}_{i,j \in I}$ sobre I. Llamaremos *límite inverso* (o *límite proyectivo*) del sistema al par $(L, (\mu_i : L \to M_i)_{i \in I})$, que verifique las siguientes propiedades:

- si $i \leq j$ entonces $\mu_i = \mu_{i,j} \circ \mu_j$,
- si un módulo N con morfismos $\eta_i : N \to M_i$ verifica que $\eta_i = \mu_{i,j} \circ \eta_j$, si $i \leq j$, entonces existe un único morfismo $\mu : N \to L$ tal que $\eta_i = \mu_i \circ \mu$.

Denotaremos $\varprojlim M_i$ al límite inverso. Probar que

a) el submódulo $S := \{(x_i)_{i \in I} \ : \ \mu_{i,j}(x_j) = x_i \text{ para todo } i \leq j\}$ de $\prod_{i \in I} M_i$ verifica la propiedad del límite con $\mu_i := \pi_i$ las proyecciones canónicas;

b) para todo A-módulo T existe un isomorfismo de grupos abelianos

$$\mathsf{Hom}_A(T, \varprojlim M_i) \cong \varprojlim \ \mathsf{Hom}_A(T, M_i).$$

4. Dado un anillo A, considere el diagrama conmutativo de A-módulos (1) (*ver al dorso*) con filas y columnas exactas. Pruebe que X es isomorfo a Y.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & 0 \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
 & & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & G & \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & J & & \\
 & Y \arrow[d] & 0 & & & \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$