Equivalencias Morita y algunas aplicaciones

Marco Farinati - Dto Matemática FCEyN UBA - IMAS (Conicet)

20-21 de Septiembre 2018

Resumen: dos anillos A y B se dicen equivalentes Morita si sus categorías de representaciones A-mod y B-mod son equivalentes. Estudiaremos propiedades generales de equivalencias Morita, aprendiendo algunos invariantes categóricos. Daremos una aplicación al cálculo de grupos grupos de automorfismos de algunos anillos (como $M_2(\mathbb{Z})$).

Índice

1. Nociones de categorías y equivalencia Morita

Dado un anillo A, queremos estudiar los A-módulos y los morfismos de A-módulos. Desde este punto de vista, si B es otro anillo, es natural preguntarse si los B-módulos (junto con los morfismos de B-módulos) se comportan de la misma manera que los A-módulos. Más precisamente, si las categorías de A-módulos y B-módulos son (o no) equivalentes. Para esto, repasaremos rapidamente las nociones de categorías, funtores y equivalencias de categorías, para así contar con un marco formal para este estudio.

1.1. Categorías

Definición 1.1. Una categoría $\mathcal{C}$ consiste en los siguientes datos:

- Una clase de objetos, que se denotará $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.
- Para cada par de objetos X e Y de $\mathcal{C}$, un conjunto de **morfismos** de X en Y, que se denotará $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Satisfaciendo los siguientes axiomas (el primero es de carácter lógico, podemos saltearlo en una primera lectura, los esenciales son los otros dos):

C1: Si X, X', Y, Y' son objetos de $\mathcal{C}$ y o bien $X \neq X'$ o bien $Y \neq Y'$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$.

C2: Para cada terna de objetos X, Y, Z de $\mathcal{C}$ está definida una función que llamaremos **ley de composición**

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

que es asociativa (en el sentido obvio).

C3: Para cualquier objeto X, existe un elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ que es neutro para la composición y que se denota Id_X.

El ejemplo por excelencia de categoría es *Sets*: La clase de objetos dada por la clase de los conjuntos, y para cada par de conjuntos X, Y, $\mathrm{Hom}_{Sets}(X, Y) = Y^X$= el conjunto de todas las funciones de X en Y. Nos contentaremos con los siguientes ejemplos:

Top Los espacios topológicos y funciones continuas .

Sets$_0$ Como objetos, los pares (X, x_0) donde $x_0 \in X$, $\mathrm{Hom}_{Sets_0}((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f : X \to Y \ / \ f(x_0) = y_0)\}$.

Top$_0$ Los espacios topológicos con punto de base y las funciones continuas que preservan punto de base.

Posets Los conjuntos parcialemente ordenados y las funciones que preservan el orden.

Rings Los anillos y los morfismos de anillos.

Groups Los grupos y los morfismos de grupos.

Vect$_k$ Fijado un cuerpo k; objetos = los k e.v., morfismos = las transformaciones k-lineales.

A-mod Fijado un anillo A: objetos = A-módulos a izquierda, $\mathrm{Hom}_{A-mod}(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

Como notación standard, si $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$ para cierto par de objetos $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, escribiremos $f : X \to Y$.

Una de las primeras nociones que se puede hacer en una categoría arbitraria es la de isomorfismo:

Definición 1.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Dos objetos $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ se dicen isomorfos (en $\mathcal{C}$, o como objetos de $\mathcal{C}$) si existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \ \text{ y } \ g \circ f = \mathrm{id}_X$$

En ese caso, denotamos $X \cong Y$ (ó $X \cong_\mathcal{C} Y$ si queremos enfatizar la categoría). Diremos que f es un isomorfismo, con inverso g.

Otra definición que se puede hacer categóricamente es la de “monomorfismo”:

Definición 1.3. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y $f : X \to Y$ diremos que f es mono (o monomorfismo categórico) si para todo objeto Z y para todo par de morfismos $g, h : Z \to X$ tales que $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$.

En la categoría Sets, esta definición es equivalente a que f sea inyectiva (Ejercicio!). Dualmente, se puede definir epimorfismo:

Definición 1.4. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y $f : X \to Y$ diremos que f es epi (o epimorfismo categórico) si para todo objeto Z y para todo par de morfismos $g, h : Y \to Z$ tales que $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$.

En la categoría Sets, esta definición dice que si g y h coinciden en la imagen de f, entonces deben ser iguales. Esto sucede sólo cuando f es suryectiva, por lo tanto, los epimorfismos categóricos de Sets son exactamente las funciones sobreyectivas. Pero ATENCION! un epimorfismo categórico no siempre es una función sobreyectiva, por ejemplo, en la categoría Top_{Haus} de espacios topológicos Hausdorff (y funciones continuas), si $f : X \to Y$ tiene imagen densa entonces es un epi categórico. Similarmente, en la categoría de anillos, la localización también es un epi categórico. (Por ejemplo, la inclusión $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es un epimorfismo en la categoría Rings.) Sin embargo, en la categoría de A-módulos, ser epi categórico es lo mismo que ser un morfismo sobreyectivo (Ejercicio!).

1.2. Funtores

Asi como en las categorías prestamos atención a los objetos y a los morfismos, al estudiar categorías surje naturalmente al noción de "morfismo entre categorias", que es lo que se denomina un **funtor**:

Definición 1.5. Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, dar un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste en

- Una asignación entre objetos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, es decir, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $F(X) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$,
- Para cada par $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, se tiene una asignación

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{D}(F(X), F(Y)$$

  Es decir, si $f : X \to Y$, entonces $F(f) : F(X) \to F(Y)$,

satisfaciendo

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), \text{ y}$$
$$\forall X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\ F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$$

Ejemplo 1.6. Sea G y H grupos y $f : G \to H$ es un morfismo de grupos. Si $x \in G$ verifica $x^2 = 1_G$ entonces $(f(x))^2 = 1_H$. Luego uno pude dar una asignación

$$G \rightsquigarrow G_2 := \{x \in G : x^2 = 1\}$$

Notamos que (salvo G abeliano) engeneral G_2 no es subgrupo, es solo un subconjunto, pero si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos, entonce $f(G_2) \subseteq H_2$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rccc} & G & \rightsquigarrow & G_2 \in \mathrm{Obj}(Sets) \\ \text{si} & f : G \to H & \rightsquigarrow & f_2 := f|_{G_2} : G_2 \to H_2 \end{array}$$

es un funtor de la categoría Groups en la categoría Sets.

Ejemplo 1.7. Si X es un espacio topológico y elejimos un $x_0 \in X$, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo. Pero además, si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces f induce un morfismo de grupos $f_* : \pi_1(X, x_0) \to (Y, y_0)$, simplemente a cada (clase de homotopía de) curva γ en X (que empieza y termina en x_0) se le asigna la curva $t \mapsto f(\gamma(t))$. Esta asignación, ademas de ser un morfismo de grupos, verifica $f_* g_* = (f \circ g)_*$ y claramente $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$, por lo tanto $\pi_1 : Top_0 \to Groups$ es un funtor.

Observación 1.8. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor y $X \cong Y$ en $\mathcal{C}$ entonces $F(X) \cong F(Y)$ en $\mathcal{D}$.

Demostración. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son tales que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ y $g \circ f = \mathrm{id}_X$, entonces es claro que $F(f)$ y $F(g)$ nos proveen de isomorfismos entre $F(X)$ y $F(Y)$ pues, utilizando las propiedades de ser funtor, tenemos por ejemplo

$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{F(Y)}$$

El cálculo de la composición $F(g) \circ F(f)$ es análogo. $\square$

Podemos pensar a los funtores como "invariantes", pues son asignaciones que a objetos de un cierto tipo (i.e. de una categoría) nos dan objetos de otro tipo, y si originalmente eran isomorfios, una asignación funtorial nos provee de objetos isomorfos en la categoría de llegada.

Ejemplo 1.9. Un isomorfismo en Sets es una biyección, por lo tanto, dos grupos isomorfos deben tener la misma cantidad de elementos que al cuadrado sean triviales.

Ejemplo 1.10. Dos espacios topológicos con punto de base no pueden ser nunca homoeomorfos (con un homeomorfismo que preserve punto de base) si sus grupos π_1 son no isomorfos.

1.3. Funtores representables

El siguiente es un ejemplo de tipo general, para cada categoría $\mathcal{C}$, un objeto X_0 induce un funtor $\mathcal{C} \to Sets$ de la siguiente forma:

$$Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, Y)$$

y si $f : Y \to Z$, para cada elemento $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, Y)$,

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, dashed, "f\circ\phi"] & \\ Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

o sea, $\phi : X_0 \to Y$, componiendo con f obtenemos $f \circ \phi : X_0 \to Z$, es decir

$$f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, Z)$$

$$\phi \mapsto f \circ \phi$$

De esta manera, "$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, -)$" es algo que no sólo se aplica a objetos, sino también a morfismos, luego $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, -) : \mathcal{C} \to Sets$, y es un funtor porque

$$(f \circ g)_*(\phi) = (f \circ g) \circ \phi$$

y por axioma de asociatividad de la ley de composición en $\mathcal{C}$

$$(f \circ g) \circ \phi = f \circ (g \circ \phi) = f_*(g_*(\phi))$$

es decir:

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

Notar que la composición de la izquierda es la ley de composición abstracta en $\mathcal{C}$ y la composición de la derecha es la composición usual de funciones.

Definición 1.11. Diremos que un funtor $F : \mathcal{C} \to Sets$ es **representable** si existe un isomorfismo natural $F \cong \mathrm{Hom}(X_0, -)$ para algún objeto X_0 de $\mathcal{C}$ (definiremos la noción de isomorfismo natural enseguida).

Ejemplo 1.12. Sea C_2=el grupo cíclico de orden 2, $C_2 = \{1, \tau\}$ donde $\tau^2 = 1$. Si G es un grupo y $\phi : C_2 \to G$, entonces necesariamente $\phi(1) = 1_G$ y $\phi(\tau) \in G$ debe verificar que $(\phi(\tau))^2 = 1_G$. Recíprocamente, si $x \in G$ verifica $x^2 = 1$, entonces la asignación

$$\begin{cases} 1 \mapsto 1, \\ \tau \mapsto x \end{cases}$$

es un morfismo de grupos. Hemos demorstrado entonces que existe una biyección

$$\mathrm{Hom}_{Groups}(C_2, G) \cong \{x \in G : x^2 = 1\} = G_2$$

Tenemos luego que $\mathrm{Hom}_{Groups}(C_2, -)$ y G_2, si bien no son *los mismos* funtores, son "naturalmente isomorfos".

Ejercicio 1.13. Describir (a menos de isomorfismo natural), los funtores
$\mathrm{Hom}_{Groups}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, -)$. $\mathrm{Hom}_{Groups}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, -)$, $\mathrm{Hom}_{Groups}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, -)$.

Ejercicio 1.14. La asignación $G \mapsto [G, G]$ es funtorial (donde $[G, G]$ es el sugbrupo de G generado por los elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$). También es funtorial la asignación $G \mapsto G_{ab} := G/[G, G]$ (que va de la categoría de grupos en la de grupos abelianos). Pero la asignación $G \mapsto Z(G)$ (el centro de G) *no* es funtorial.

Como en el ejemplo de G_2 y $\mathrm{Hom}_{Groups}(C_2, G)$, muchas veces al aplicar dos operaciones (i.e. dos funtores) distintos, obtenemos técnicamente cosas diferentes, pero puede haber una forma "natural" de compararlos. Damos entonces la definición de transformación natural e isomorfismo natural.

Definición 1.15. Sean $F_1, F_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores.
Dar un **transformación natural** $\eta : F_1 \to F_2$ entre los funtores F_1 y F_2 es dar, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, un morfismo $\eta_X : F_1(X) \to F_2(X)$, y todos ellos compatibles con los morfismos de $\mathcal{C}$ en el siguiente sentido:

Si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} F_1(X) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F_1(Y) \arrow[d, "\eta_Y"'] \\ F_2(X) \arrow[r, "F_2(f)"] & F_2(Y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si η_X es un **isomorfismo** para todo objeto X, diremos que F_1 y F_2 son **naturalmente isomorfos**.

Ejemplo 1.16. Si $C_2 = \{1, \tau\}$ es sel grupo cíclico de orden dos, entonces

$$\mathrm{Hom}_{Groups}(C_2, G) \to G_2$$
$$\sigma \mapsto \sigma(\tau)$$

define un isomorfismo natural.

1.4. Equivalencias

Definición 1.17. Dos categorrías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen equivalentes si existen funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $F \circ G$ es naturalmente equivalente al funtor identidad de $\mathcal{D}$ (i.e. $X \mapsto X$ en objetos y $f \mapsto f$ en los morfismos) y $G \circ F$ es naturalmente equivalente al funtor identidad de $\mathcal{C}$.

Para anillos, se tiene el suguiente nombre, debido a Morita que caracterizó equivalencias en categorías de módulos sobre un anillo:

Definición 1.18. Dos anillos A y B se dicen **equivalentes Morita** si sus categorías de módulos son equivalentes, es decir, si existen funtores

$$F : A - mod \to B - mod$$

$$G : B - mod \to A - mod$$

e isomorfismos naturales $G \circ F \cong \mathrm{id}_{A-mod}$, $F \circ G \cong \mathrm{id}_{B-mod}$,

1.5. "EL" ejemplo matricial

Sea A un anillo, $\in \mathbb{N}$ y $B := M_n(A)$, definimos los funtores

$$F : A - mod \longrightarrow B - mod$$

$$M \mapsto M^n = \begin{bmatrix} M \\ M \\ \vdots \\ M \end{bmatrix}$$

$$G : M_n(A) - mod \to A - mod$$

$$G(V) := e_{11}V$$

donde $e_1 1$ es la matriz que tiene un 1 en el lugar 11 y ceros en el resto.
Afirmación: es una equivalencia de categor ías.

Demostración. Primero veamos que son funtores:
primero F:
Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos, aplicamos f coordenada a coordenada y obtenemos

$$f^n : M^n \to N^n$$

$$f^n \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(m_1) \\ f(m_2) \\ \vdots \\ f(m_n) \end{pmatrix}$$

Claramente f^n conmuta con la acción de A, pero también con la acción de las matrices base e_{ij}, asi que es $M_n(A)$-lineal.

Para G: si $\phi : V \to W$ es un morfismo de $M_n(A)$-módulos, $\phi(X \cdot v) = X \cdot \phi(v)$ para toda matriz X, en particular para $X = e_{11}$, asi que

$$\phi(e_{11} \cdot v) = e_{11} \cdot \phi(v) \ \forall v \in V$$

lo que dice que $\phi|_{e_{11}}V : e_{11}V \to e_{11}W$, es decir $\phi|_{e_{11}V} : F(V) \to F(W)$. En otras palabras, la restricción "es funtorial". Es claro que $e_{11} a \operatorname{Id} = a \operatorname{Id} e_{11}$ para todo $a \in A$ asi que $\phi|_{e_{11}V}$ sigue siendo A-lineal.

Veamos ahora que efectivamente es una equivalencia:

Sea M un A-módulo, entonces $GF(M) = e_{11} \cdot (M^n) = M \oplus 0 \cdots \oplus 0 \cong M$ como A-módulo, y si $f : M \to N$, la restricción a $e_{11}M^n$ de $f^n : M^n \to N^n$ es f.

Notar que técnicamente $e_{11} \cdot (M^n) = M \oplus 0 \cdots \oplus 0$ no es *igual* a M, pero es naturalmente isomorfo a M como A-módulo.

Para el otro lado:

Sea V un $M_n(A)$-módulo, entonces $M := e_{1,1}V$ es un A-submódulo, queremos ver que $V \cong M^n$ como $M_n(A)$-módulo. Primero veamos que lo es como A-módulo:

Notar que M_i=el sumando directo en lugar i, coincide con $(1,i)M$, donde $(1,i)$ es la matriz de permutación $1 \leftrightarrow i$, y por lo tanto $M = (1,i)(1,i)M = (1,i)M_i \subset (1,i)V \subset V$

Notamos también que que

$$(m_1, m_2, \cdots, m_n) = \sum_i (1,i)(m_i, 0, \ldots, 0) \in M^n$$

Pero observando que $m_i \in M = e_{1,1}V \subset V$, podemos considerar $\sum_i (1,i)m_i \in V$. En consecuencia, es razonable definir un morfismo

$$M^n \to V$$

$$(m_1, m_2, \cdots, m_n) \mapsto \sum_i (1,i)m_i$$

A su vez, si $v \in V$,

$$v = 1 \cdot v = \sum_i e_{ii}v = \sum_i (1,i)e_{11}(1,i)v$$

y podemos definir

$$V \to M^n$$

$$v \mapsto \sum_i m_i$$

donde $m_i := (1,i) \cdot (e_{11}(1,i)v) \in M_i \subset M^n$.

La igualdad

$$v = 1 \cdot v = \sum_i e_{ii} v = \sum_i (1,i) e_{11} (1,i) v$$

nos dice que una composición es la identidad, y la igualdad

$$(m_1, m_2, \cdots, m_{\mathfrak{n}}) = \sum_i (1,i) m_i \in M^n$$

nos dice que la otra composición es la dentidad.

Con esto hemos probado que $FG(V) \cong V$, isomorfismos de A-módulos. Dejamos como ejercicio chequear que además es de $M_n(A)$-módulos. □

Corolario 1.19. *Sea $A = M_2(\mathbb{Z})$. Entonces conocemos un teorema de estructura de los A-módulos finitamente generados!*

Demostración. Debemos ver primero que si $F : A - mod \to B - mod$ es una equivalencia, entocnes M es finitamente generado como A-módulo si y sólo si $F(M)$ es finitamente generado como B-módulo. Asumiendo esto por un momento (ver luego "cosas que se preservan por equivalencias"), si V es un $M_2(\mathbb{Z})$-módulo f.g., entonces es isomorfo a $F(M)$ para algún $\mathbb{Z}$-módulo f.g. Pero si M es un $\mathbb{Z}$-módulo f.g., entocnes

$$M \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/d_1 \oplus \mathbb{Z}/d_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_k$$

de manera única si $1 < d_1 | d_2 | \cdots | d_k$. Luego

$$V \cong F(U) = \mathbb{Z}^{2\times n} \oplus (\mathbb{Z}/d_1)^2 \oplus (\mathbb{Z}/d_2)^2 \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/d_k)^2$$

□

Ejemplo 1.20. Si $A = \mathbb{Z}_4$, M un A-módulo f.g., entonces M es un $\mathbb{Z}$-módulo, pero con 4-torsion, luego $M \cong \mathbb{Z}_2^n \oplus \mathbb{Z}_4^m$ para ciertos (y unicos) n y m. Sea Ahora $B = M_2(\mathbb{Z}_4)$, si V es un B-módulo entonces V es iso a:

$$V \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 \\ \oplus \\ \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}^n \oplus \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 \\ \oplus \\ \mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}^m$$

1.6. Biyecciones en el Hom

Volvamos nuevamente a la situación general, F y G dando una equivalencia entre $A - mod$ y $B - mod$. Notar que para todo morfismo f:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_M"', "\cong"] & N \arrow[d, "\cong"', "\eta_N"] \\ GF(M) \arrow[r, "GF(f)"] & GF(N) \end{tikzcd}$$

y similar con GF.

Como consecuencia inmediata tenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}_A(M,N) & \to^F & \mathrm{Hom}_B(F(M),F(N)) & \to^G & \mathrm{Hom}_A(GF(M)),GF(N)) & \cong^\eta & \mathrm{Hom}_A(M,N) \\ f & \mapsto & F(f) & \mapsto & GF(f) & \mapsto & \eta_N^{-1}GF(f)\eta_M = f \end{array}$$

y similarmente

$$\mathrm{Hom}_B(U,V) \to \mathrm{Hom}_A(F(U),F(V)) \to \mathrm{Hom}_B(GF(U)),GF(V)) \cong \mathrm{Hom}_A(U,V)$$

asi que tanto F como G son biyectivos en el Hom.

Observación 1.21. Supongamos que F y G sean aditivos (i.e. $F(f_1+f_2) = F(f_1)+F(f_2)$, idem G), entonces, para cada A-módulo M, se tiene un isomorfismo de anillos

$$\mathrm{End}_A(M) \cong \mathrm{End}_B(F(M))$$

idem para G.

Corolario 1.22. $\mathrm{End}_B(B) \cong B^{\mathrm{op}}$ *via* $f \mapsto f(1)$, *es un iso de anillos, luego*

$$B^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_A(P)$$

donde $P = G(B)$. *Es decir,* B *es (el anillo opuesto a) el anillo de endomorfismos de un cierto* A*-módulo* P.

Demostración.

$$B^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_B(B) = \mathrm{Hom}_B(B,B) \cong \mathrm{Hom}_A(G(B),G(B) = \mathrm{End}_A(P)$$

□

Observación 1.23. En una equivalencia, SIEMPRE hay aditividad, es decir, no hace falta pedirlo como hipotesis porque vale automaticamente.

1.7. Adjunción y otras consecuencias

Comenzamos con una definición.

Definición 1.24. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores. Diremos que F es adjunto a izquierda de G (y que G es adjunto a derecha de F si, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $V \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ existe una biyección

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(V))$$

que sea natural en V y en X.

Observación 1.25. Si F y G dan una equivalencia, entonces se tienen biyecciones

$$\mathrm{Hom}_A(M,G(V)) \cong \mathrm{Hom}_B(F(M),FG(V)) \cong \mathrm{Hom}_B(F(M),V)$$

y también

$$\mathrm{Hom}_B(U,F(N)) \cong \mathrm{Hom}_A(G(U),GF(N)) \cong \mathrm{Hom}_A(G(U),N)$$

por lo que simultaneamente F es adjunto a izquierda y a derecha de G.

Cosas preservadas por equivalencias:

- sumas y cocientes (epis), y en general colimites (por admitir adjunto a derecha),
- productos y subobjetos (monos) y en general limites (por admitir adjunto a izq.),
- F y G son necesariamente aditivos (por admitir adjunto),
- exactitud (a derecha/izquierda por adjunción de un lado/del otro),
- simples (por preservar monos y epis). Luego A s.s. si y solo si B lo es,
- retículo de subobjetos. Luego A-noetheriano si y solo si B lo es,
- módulos noetherianos, artinianos,
- finitamente generados ("compacidad" categorica),
- proyectivos, inyectivos,
- indescomponibles,
- objetos generadores (un módulo P es generador si para cualquier módulo M existe algun conjunto I y un epi $P^{(I)} \to M$).

Demostración. Haremos sólo un par. Las demás se pueden consultar en el apéndice de categorías del libro *Anillos y sus categorías de representaciones* (ver bibliografía).

Se preservan monomorfismos: Haremos la demostración utilizando la definición categórica de monomorfismo, y para un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que admita un adjunto a izquierda G. Supongamos que $f : M \to N$ es un monomorfismo en $\mathcal{C}$ y consideremos

$$F(f) : F(M) \to F(N)$$

y queremos ver que sea mono en $\mathcal{D}$. Si $\phi, \psi : W \to F(M)$ son tales que $F(f) \circ \phi = F(f) \circ \psi$, queremos ver si $\phi = \psi$. En otras palabras, queremos ver si $F(f)_*$ es una función inyectiva. Pero tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
g & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(W), M) \arrow[r, hook, "f_*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(W), N) \arrow[d, "\cong"] & f_*(g) = f \circ g \arrow[lll, mapsto, bend right] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, F(M)) \arrow[r, "F(f)_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, F(N)) &
\end{tikzcd}$$

Pero sabemos que la flecha horizontal superior es una función inyectiva para todo objeto que pongamos en la primer variable del Hom, en particular para $G(W)$, y como las flechas verticales son biyecciones, se sigue que la flecha horizontal de abajo también es inyectiva para cualquier W, como queríamos ver.

Se preservan objetos simples: Sea S simple, y consideremos $F(S)$. Si $F(S)$ no fuera simple, habría un monomorfismo no nulo y no epi $U \to F(S)$, entonces habría un monomorfismo no nulo y no epi $G(U) \to G(F(S)) \cong S$, absurdo. $\square$

Sobre finitamente generados, observamos que en la categoróa de A-módulos se tiene la siguiente caracterización de objeto finitamente generado, que recuerda la propiedad de compacidad:

Lema 1.26. *Sea M un A-módulo. son equivalentes*

- *M es finitamente generado como A-módulo.*
- *Para toda familia $\{U_i\}_{i\in I}$ y epimorfismo $p : \oplus_{i\in I}U_i \to M$ existe un subconjunto finito $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I$ tal que su restricción $p| : \oplus_{j=1}^{n} U_{i_j} \to M$ sigue siendo un epimorfismo.*

Dejamos la demostración del lema como ejercicio, y observamos que si un funtor preserva epi y sumas directas, entonces manda finitamente generados en finitamente generados.

Corolario 1.27. *(de lo anterior y del Corolario 1.22) Si todo A-módulo proyectivo f.g. es libre (e.g. $A = k$ un cuerpo, o un d.i.p. e.g. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, $k[x]$, $k[x, x^{-1}]$, $k[[x]]$) entonces los únicos anillos Morita equivalentes a A son de la forma* $\mathrm{End}_A(A^n) = M_n(A)$.

1.8. Hacia la caracterización de equivalencias

Observación 1.28. Sea U un B-módulo, entonces

$$\mathrm{Hom}_B(B, U) \cong U$$

$$\phi \mapsto \phi(1)$$

da un isomorfismo (natural! (ejercicio)) de B-módulos. Pongamos $U = F(M)$, entonces

$$F(M) \cong \mathrm{Hom}_B(B, F(M))$$

como B-módulo, y (como grupo abeliano, y)

$$\cong \mathrm{Hom}_A(G(B), GF(M)) \cong \mathrm{Hom}_A(G(B), M)$$

O sea que (al menos como grupo abeliano) $F(M)$ es representable, pues $F(-) \cong \mathrm{Hom}_A(G(B), -)$. La estructura de A-módulo de $G(B)$ es “clara” pues G es un funtor de A-mod en B-mod. Pero B, ademas de ser B-módulo a izquierda, también es B-módulo a derecha, y r_b=multiplicación a derecha por b es morfismo de B-módulo a izquierda,

$$r_b : B \to B$$

$$x \mapsto xb$$

por lo tanto se le puede aplicar G, y esto da un morfismo de A-módulos

$$G(r_b) : G(B) \to G(B)$$

$$p \mapsto G(r_b)(p)$$

y G nos da un isomorfismo de anillos $B^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_B(B) \overset{G}{\cong} \mathrm{End}_A(G(B))$. Por lo tanto $G(B)$ es un B-módulo a derecha, que en realidad es un $A - B$-bimódulo.

$$\mathrm{End}_A(G(B)) = \mathrm{Hom}_A(G(B), G(B)) \cong \mathrm{Hom}_B(B, B) \cong B^{\mathrm{op}}$$

por lo tanto, con esa acción de B, $G(B)$ es un B^{op}-módulo a izquierda, o sea, un B-módulo a izquierda.

Con esta estructura de B-módulo a derecha de $G(B)$ concluimos que

$$\boxed{F(M) \cong \mathrm{Hom}_A(G(B), M)}$$

no sólo como grupo abeliano sino también como B-módulo. Concluimos que F es **representable**,

$$F(-) \cong \mathrm{Hom}_A({}_AP_B, -)$$

donde P es un A-B-bimódulo ($P = G(B)$).

Ademas, $\mathrm{End}_A(P) \cong \mathrm{End}_B(B) \cong B^{\mathrm{op}}$ es un isomorfismo de anillos.

Proposición 1.29. *P es A-proyectivo f.g. (y generador).*

Demostración. ${}_AP = G(B)$, y B es B-proyectivo, f.g. (y generador). □

Análogamente $G(U) \cong \mathrm{Hom}_B({}_BQ_A, U)$ con ${}_BQ$ un módulo B-proyectivo, f.g. y generador.

Corolario 1.30. *(Ver propiedades del producto tensorial de la sección siguiente.) Como P es A-proy t.f. entonces*

$$F(M) \cong \mathrm{Hom}_A({}_AP_B, M) \cong Q \otimes_A M$$

donde

$${}_BQ_A = P^{*A} = \mathrm{Hom}_A(P_B, A) = \mathrm{Hom}_A(G(B), A) \cong \mathrm{Hom}_B(B, F(A)) \cong F(A)$$

Analogamente,

$$G(V) \cong \mathrm{Hom}_B({}_BQ_A, V) \cong P \otimes_B V$$

pues

$$Q^{*B} = \mathrm{Hom}_B(Q, B) = \mathrm{Hom}_B(F(A), B) \cong \mathrm{Hom}_A(A, G(B)) \cong G(B) = P$$

La composición de los funtores F y G se puede calcular o bien como

$$G(F(M)) \cong \mathrm{Hom}_B(Q, \mathrm{Hom}_A(P, M))$$

pero también

$$G(F(M)) \cong P \otimes_B (Q \otimes_A M)$$

En el otro sentido,

$$F(G(U)) \cong Q \otimes_A (P \otimes_B U)$$

Repasaremos la definición y propiedades básicas del producto tensorial para poder manipular fácilmente composiciones de funtores de este estilo.

Notar que la ocndición de ser una equivalencia se podría plantear como

$$G(F(M)) \cong \mathrm{Hom}_B(Q, \mathrm{Hom}_A(P, M)) \cong M$$

y

$$F(G(V)) \cong \mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Hom}_B(Q, V)) \cong V$$

que no resulta muy clara.. Sin embargo, veremos que en términos de producto tensorial, la condición de equivalencia será mas transparente.

2. Repaso de producto tensorial

2.1. Definición

Si M y N son grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos) entonces se define

$M \otimes_{\mathbb{Z}} N =$ generado por $M \times N$, con relaciones

$$(m + m', n) \sim (m, n) + (m', n),$$

$$(m, n + n') \sim (m, n) + (m, n')$$

Por propiedad universal del cociente, y del libre generado por, definir un morfismo que *salga* de $M \otimes N$ equivale a dar una función bilineal en $M \times N$. La clase de (m, n) se denota $m \otimes n$.

Si M_A y ${}_AN$ entonces se define

$$M \otimes_A N = M \otimes N / \langle ma \otimes n - m \otimes an : m \in M, a \in A, n \in N)$$

Definir un morfismo que salga de $M \otimes_A N$ (digamos $f : M \otimes_A N \to L$) equivale a dar una función bilineal A-balanceada, i.e. $b_f : M \times N \to L$ con b bilineal y $b(ma, n) = b(m, an)$.

2.2. Propiedades Básicas

Proposición 2.1. *1.* ${}_BM_A$, ${}_AN_C$ *entonces* $M \otimes_A N \in {}_BMod_C$ *via*

$$b \cdot (m \otimes n) \cdot c = bm \otimes nc$$

2. $(M \otimes_A N) \otimes_B T \cong M \otimes_A (N \otimes_B T)$

3. $M \otimes_A A \cong M$ *(via* $m \otimes a \mapsto ma$*) y* $A \otimes_A N \cong N$

4. $A^n \otimes_A A^m \cong A^{nm}$*, y más generalmente*

$$(\oplus_i M_i) \otimes_A N \cong \oplus_{i \in I}(M_i \otimes_A N)$$

$$M \otimes_A (\oplus_i N_i) \cong \oplus_{i \in I}(M \otimes_A N_i)$$

5. $f : M \to M'$ *es epi entonces* $f \otimes \mathrm{id} : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N$ *es epi, mas precisamente, si*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

es s.e.c. entonces

$$M_1 \otimes_A N \to M_2 \otimes_A N \to M_3 \otimes_A N \to 0$$

(y similar en la otra variable)

6. Si P *es* A*-proyectivo de tipo finito (i.e. un s.d. de* A^n*) entonces*

$$P^* \otimes_A M \cong \mathrm{Hom}_A(P, M)$$

$$\phi \otimes m \mapsto \Big(p \mapsto \phi(p)m\Big)$$

7. Si $M = A^n/S_M$ *entonces*

$$0 \to S \to^i A^n \to^p M \to 0$$

luego

$$\begin{tikzcd}
S \otimes_A N \arrow[r, "i \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d] & A^n \otimes_A N \arrow[r, "p \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "\cong"] & M \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
Im \arrow[r, hook] & N^n \arrow[r] & M \otimes_A N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es decir, $A^n \otimes_A N = N^n$*, y si* $S_{M,N}$ *es la imagen de* $S_M \otimes_A N$ *en* $M \otimes_A N \cong N^n$*, se tiene*

$$M \otimes_A N \cong N/S_{M,N}$$

O sea, el producto tensorial da ejemplos de "cocientes funtoriales"

Demostración. Para 4, 5 y 7, observaremos que el producto tensorial contra alguien fijo admite adjunto, pues existe una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N, L) \cong Bil_A(M \times N, L) \cong \mathrm{Hom}_{-A}(M, \mathrm{Hom}(N, L))$$

(donde $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, L)$ es un A-módulo a derecha gracias a la estructura de a izquierda de N) y también

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A N, L) \cong Bil_A(M \times N, L) \cong \mathrm{Hom}_{A-}(N, \mathrm{Hom}(M, L))$$

(donde $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, L)$ es un A-módulo a izquierda gracias a la estructura a derecha de N). El primer isomorfismo está dado por

$$f \mapsto \widehat{f}\Big(m \mapsto \big(n \mapsto f(m \otimes n)\big)\Big)$$

(el otro tiene fórmula similar intercambiando m y n). Es decir, si f tiene "dos variables", entonces, fijada una variable, da una función de la otra. Los detalles se pueden ver en el libro *Anillos y sus categorías de representaciones*, o en cualqueir libro de anillos módulos que incluya producto tensorial. De esta manera vemos que $-\otimes_A N : Mod_A \to \mathbb{Z}-mod$ admite a $\mathrm{Hom}(N, -) : \mathbb{Z} - Mod \to Mod_A$ como adjunto a derecha, asi que preserva sumas, epis, etc. Análogamente para $M \otimes_A -$.

Para ver 6:

$$P^* \otimes_A M \overset{?}{\cong} \mathrm{Hom}_A(P, M)$$
$$\phi \otimes m \mapsto \Big(p \mapsto \phi(p)m\Big)$$

consideramos la clase de A-módulos P en donde ese morfismo es un isomorfismo para cualquier M. Claramente esa clase es cerrada por sumas directas finitas pues tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
(P \oplus P')^* \otimes_A M \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong?"] & (P^* \oplus P'^*) \otimes_A M \arrow[r, "\cong"] & P^* \otimes_A M \oplus P'^* \otimes_A M \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_A(P \oplus P', M) \arrow[rr, "\cong"] & & \mathrm{Hom}_A(P, M) \oplus \mathrm{Hom}_A(P', M)
\end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical derecha es la suma directa de las flechas de interés, y si P y P' son tales que dan un iso, la suma directa de isos es iso, y por lo tanto la flecha vertical izquierda es un iso. Con argumento similar podemos ver que esta clase es cerrada por restricción a sumandos directos: Si tenemos P'' que se descompone como $P'' = P \oplus P'$, y la flecha para P'' es un iso, entonces el diagrama anterior nos dice que este iso se descompone en ' dos bloques" (la de la derecha) entonces necesariamente cada bloque debe ser un iso. Luego si P'' esta en esta clase, cualquier sumando rdirecto lo esta.

Ahora vemos que $P = A$ esta en esa clase, pues

$$A^* \otimes_A M \cong A \otimes_A M \cong M \cong \mathrm{Hom}_A(P, M)$$

Concluimos entonces que la clase de módulos P para los que esa aplicación es un iso contiene a los sumandos directos de A^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$, es decir, contiene a los proyectivos de tipo finito. $\square$

Observación 2.2. Estos isomorfismos recuerdan la ley exponencial

$$a^{bc} = (a^b)^c = (a^c)^b$$

interpretando a^b como funciones de b en a, y bc como el producto cartesiano.

2.3. Yoneda (Hom)

Ya que hemos hablado de funtores representables, incluímos una demostración del llamado Lema de Yoneda, que aunque no será utilizado para lo que sigue, si se utilizará una versión análoga para el producto tensorial.

Lema 2.3 (Yoneda)**.** *Sean A y C anillos, P_1, P_2 dos A-C-bimódulos, entonces existe un isomorfismo natural (en la variable M) de C-módulos*

$$\mathrm{Hom}_A(P_1, M) \cong \mathrm{Hom}_A(P_2, M)\ \forall M$$

si y solo si existe un isomorfismo de A-C-bimódulos $P_1 \cong P_2$.

Demostración. Pongamos $M = P_1$, entonces

$$\mathrm{Hom}_A(P_1, P_1) \cong \mathrm{Hom}_A(P_2, P_1)$$

$$\mathrm{id}_{P_1} \mapsto alguien = u : P_2 \to P_1$$

Analogamente poniendo $M = P_2$ Pongamos $M = P_1$, entonces

$$\mathrm{Hom}_A(P_1, P_2) \cong \mathrm{Hom}_A(P_2, P_2)$$

$$v \leftrightarrow \mathrm{id}_{P_2}$$

veamos que $uv = \mathrm{id}_{P_1}$ y $vu = \mathrm{id}_{P_2}$

Recordemos que la naturalidad de isomorfismo $\mathrm{Hom}_A(P_1, M) \cong \mathrm{Hom}_A(P_2, M)$ significa que $\forall f : M \to N$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(P_1, M) \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Hom}(P_2, M) \arrow[d, "f_*"'] \\
\mathrm{Hom}(P_1, N) \arrow[r, "\eta_N"] & \mathrm{Hom}(P_2, N)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir, para cualquier $\phi : P_1 \to M$, vale que

$$f \circ \eta_M(\phi) = \eta_N(f \circ \phi)$$

Notar que $u = \eta(\mathrm{id}_{P_1})$ y $v = \eta^{-1}(\mathrm{id}_{P_2})$. por lo tanto

$$vu = v\eta(\mathrm{id}_{P_1}) = \eta(v\,\mathrm{id}_{P_1}) = \eta(v) = \eta(\eta^{-1}(\mathrm{id}_{P_2}) = \mathrm{id}_{P_2}$$

y del otro lado

$$uv = v\eta^{-1}(\mathrm{id}_{P_2}) = \eta^{-1}(v\,\mathrm{id}_{P_2}) = \eta^{-1}(v) = \eta^{-1}(\eta(\mathrm{id}_{P_1}) = \mathrm{id}_{P_1}$$

□

2.4. "Yoneda"para $\otimes$ y consecuencias

Lema 2.4. *P_i en B-mod-A, $i = 1, 2$, entonces*
$P_1 \otimes_A - \cong P_2 \otimes_A -$ (iso natural de funtores de A-mod en B-mod)
si y solo si ${}_BP_{1A} \cong {}_BP_{2A}$ (iso de bimódulos)

Demostración. $\Leftarrow$) es clara.
Para $\Rightarrow$), pongamos $M = A$, entonces $P_1 \cong P_1 \otimes_A A \cong P_2 \otimes_A A \cong P_2$.

Esto da un isomorfismo como B-módulos a izq. Pero la multiplicación por un elemento a, a derecha

$$\begin{aligned} r_a : A &\to A \\ x &\mapsto xa \end{aligned}$$

es un morfismo A-lineal a izquierda, y por la naturalidad del iso $P_1 \otimes_A - \cong P_2 \otimes_A -$ se tiene un diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
p \leftrightarrow p \otimes 1 \arrow[d, mapsto] \arrow[rrr, bend left, mapsto] & P_1 \cong P_1 \otimes_A A \arrow[r, "\cong", "\psi"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes r_a"'] & P_2 \otimes_A A \cong P_2 \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes r_a"] & \phi(p) \leftrightarrow \phi(p) \otimes 1 = \psi(p \otimes 1) \arrow[d, mapsto] \\
pa \leftrightarrow p \otimes 1a \arrow[drrr, bend right, mapsto] & P_1 \cong P_1 \otimes_A A \arrow[r, "\cong", "\psi"'] & P_2 \otimes_A A \cong P_2 & \phi(p)a \leftrightarrow \phi(p) \otimes a = \psi(p \otimes 1)a \\
 & & & \phi(pa) \leftrightarrow \phi(pa) \otimes 1 = \psi(pa \otimes 1) = \psi(p \otimes a)
\end{tikzcd}$$

Es decir, ψ es A-lineal a derecha. □

Corolario 2.5. *A y B equivalentes Morita si y solo si existen ${}_AP_B$ y ${}_BQ_A$ tales que $P \otimes_B Q \cong A$ y $Q \otimes_A P \cong B$ (isomorfismos de A-bimódulos y B-bimódulos respectivamente.*

Corolario 2.6. *$A - mod \cong B - mod$ si y solo si $mod - A \cong mod - B$, y cualquiera de las dos implica $A - bimod \cong B - bimod$. Notar que en la equivalencia de bimódulos tenemos*

$$M \mapsto Q \otimes_A M \otimes_A P$$

y en particular

$${}_AA_A \mapsto Q \otimes_A A \otimes_A P \cong {}_BB_B$$

Corolario 2.7. *P y Q son proyectivos, f.g. y generadores tanto de un lado como del otro.*

Otro corolario es

Corolario 2.8. *Si A y B son equivalenyes Morita entonces se tiene un iso de anillos*

$$Z(A) \cong Z(B)$$

Demostración.

$$Z(A) \cong \mathrm{Hom}_{A-A}(A, A) \cong \mathrm{Hom}_{B-B}(Q \otimes_A A \otimes_A P, Q \otimes_A A \otimes_A P) \cong \mathrm{Hom}_{B-B}(B, B) \cong Z(B)$$

□

Observación 2.9. La equivalencia Morita no dice nada entre anillos conmutativos, pero lo anterior igualmente tiene algunas consecuencias no triviales. Si $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$, es un producto directo de anillos, entonces a esta descomposición se le asocian idempotentes $e_i \in A_i$ ortogonales que suman 1 y son *centrales*, por lo tanto si B es equivalente Morita a A, también se descompondrá como $B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_r$.

Supongamos que A, ademas de anillo, es una k-algebra sobre un cuerpo k, es decir, podemos asumir $k \subset Z(A)$.

Proposición 2.10. *Si B es Morita equivalente a A entonces también es una k-algebra. La equivalencia es k-lineal si P y Q son k-simetricos.*

Proposición 2.11. *Si A y B son k-algebras Morita equivalentes y M es un A-módulo que es de dimesión finita sobre k, entonces $F(M)$ también es B-módulo de dimensión finita sobre k*

Demostración. $F(M)$ es de la forma $F(M) \cong \mathrm{Hom}_A(P, M) \cong Q \otimes_A M$ con P un A- proyectivo f.g. (y k- simetrico) (también Q es Q-proyectivo de t.f.). Pero

$$\mathrm{Hom}_A(A^n, M) \cong M^n,$$

asi que $F(M)$ es un sumando directo de M^n, por lo tanto, de dimensión finita. (o bien $Q \otimes_A M$ es s.d. de $A^m \otimes_A M = M^m$)

□

3. El grupo de Picard y los automorfismos de $M_n(k)$

Sea A un anillo, consideramos el conjunto de clases de isomorfismos de A-bimódulos ${}_AP_A$ tales que existe ${}_AQ_A$ con $P \otimes_A Q \cong Q \otimes_A P \cong A$. Notar que forman un grupo con el product tensorial como operación y $[A]$ el neutro.

Observación 3.1. Por el Lema de Yoneda, este grupo se identifica con las clases de isomorfismo de autoequivalencias de la categoria de A-módulos, con la composición de funtores como operación producto, y el funtor identidad como neutro.

Proposición 3.2. *A equivalente Morita a B entonces $Pic(A) \cong Pic(B)$*

Demostración. Con la interpretación de clases de proyectivos, si $F = P \otimes_A -$ y $G = Q \otimes_B -$:

$$Pic(A) \to Pic(B)$$

$$[M] \mapsto [P \otimes_A M \otimes_B Q]$$

con la interpretación de (clases de isomorfismo de) autoequivalencias, si $\Phi : A - mod \cong A - mod$ es una equivalencia, entonces

$$F \circ \Phi \circ G : B - mod \to B - mod$$

también es una equivalencia. Ejercicio: ver que es (iso)morfismo de grupos. □

3.1. Pic y Aut

Ejemplo 3.3. Sea $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ y consideremos $P := A_\alpha = A$ como grupo abeliano pero con la estructura de bimódulo dada por

$$a \cdot x \cdot a' = ax\alpha(a')$$

El anterior es un ejemplo de elemento de $Pic(A)$ debido a la siguiente

Proposición 3.4.

$$A_\alpha \otimes_A A_\beta \to A_{\alpha\beta}$$
$$a \otimes a' \mapsto a\alpha(a')$$

es un isomorfismo de A-bimódulos.

Corolario 3.5. *La apicación $\alpha \mapsto A_\alpha$ define un morfismo de grupos $\mathrm{Aut}(A) \to Pic(A)$.*

Proposición 3.6. *$A_\alpha \cong A$ como A-bimódulos si y solo si α es interior, es decir, existe $u \in A$ unidad tal que $\alpha(a) = uau^{-1}$ para todo $a \in A$.*

Demostración. Fijemos un isomorfismo, entonces

$$A \cong A_\alpha$$

$$1 \mapsto u$$

Como es de bimódulos, en particular es lineal a derecha, luego

$$a = 1 \cdot a \mapsto u \cdot a = u\alpha(a)$$

pero también es A-lineal a izquierda, entonces

$$a = a \cdot 1 \mapsto a \cdot u = au$$

Por lo tanto
$$u\alpha(a) = au \; \forall a$$
Pero como el iso es en particular sobre, y $1 \in A_\alpha$, entonces existe a_0 tal que

$$a_0 u = 1 = u\alpha(a_0)$$

Concluimos que u tiene inverso a izq y derecha, por lo tanto inversible, y de $u\alpha(a) = au \; \forall a$ se sigue
$$\alpha(a) = u^{-1} a u \; \forall a$$

□

Corolario 3.7. *El nucleo de* $\mathrm{Aut}(A) \to Pic(A)$ *es exactamente el subrupo de los automorfismos interiores, por lo tanto* $Out(A)$ *se* inyecta *en* $Pic(A)$*.*

3.2. Skolem-Noether

Corolario 3.8. *En todo anillo* A *tal que* $Pic(A)$ *es trivial, se verifica que todo automorfismo es interior.*

Ejemplo 3.9. Todo automorfismo de $M_n(\mathbb{Z})$ es interior.

Ejemplo 3.10. Todo automorfismo de $M_n(\mathbb{Q})$ es interior.

Ejemplo 3.11. Sabiendo que el único morfismo de anillos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la identidad (ejercicio!), concluimos que todo automorfismo de $M_n(\mathbb{R})$ es interior.

3.3. Picard en el caso conmutativo

Si A es conmutativo, se puede definir un subgrupo de $Pic(A)$ consistentes en los P que sean A-siméricos. Recordar que un A-bimódulo M se dice A-simétrico si $am = ma$ para todo $m \in M$ y todo $a \in A$. El subgrupo de (las clases de isomorfismo de) los bimódulos A-simétricos de $Pic(A)$ se llama $Pic_{class}(A)$, el "grupo de Picard clasico".

Proposición 3.12. *Sea* A *un anillo* **conmutativo** *y* $P \in Pic(A)$ *entonces existe un* **automorfismo** *de anillos* $\alpha : A \to A$ *tal que* $\alpha(a)p = pa$ *para todo* $a \in A$ *y para todo* $p \in P$*.*

Demostración. P es un A-bimódulo y $[P] \in Pic(A)$, sabemos que $\mathrm{End}_{-A}(P) \cong A$ (ejercicio!). Como la aplicación (fijado a) que manda $p \mapsto pa$ es A-lineal (a derecha, por ser A conmutativo), entonces debe estar dada por la multiplicación (a izquierda) por un elemento a'. Es decir, para cada a, existe un unico a' tal que $pa = a'p$. Definimos $a' := \alpha(a)$. Queda como ejercicio verificar que α es necesariamente un morfismo de anillos, y que es necesariamente un iso. □

Como corolario de esta proposición se tiene lo siguiente

Teorema 3.13. *La sucesión siguiente es exacta y se parte*

$$1 \to Pic_{class} \to Pic(A) \to \mathrm{Aut}(A) \to 1$$

$$P \mapsto \alpha_P$$

en consecuencia $Pic(A) \cong Pic_{class} \rtimes \mathrm{Aut}(A)$

Demostración. El nucleo de $P \mapsto \alpha_P$ es claramente el subgrupo clasico, y la sección $\alpha \mapsto A_\alpha$ muestra simultaneamente que es epi la aplicación anterior es epi y que se parte. □

3.4. Picard relativo

Sea k un anillo conmutativo y A una k-algebra (es decir, A es un anillo junto con un morfismo de k en el centro de A). Si P es un A-bimódulo, diremos que P es k-simétrico si $\lambda p = p\lambda$ para todo $\lambda \in k$. Por ejemplo $P = A$ es k-simétrico. Notar que el producto tensorial sobre A de dos A-bimódulos k-simétricos es k-simétrico. Definimos $Pic_k(A)$ como el subgrupo de $Pic(A)$ dado por los bimódulos k-simétricos.

Definición 3.14. Sean A y B dos k-algebras. Diremos que son **equivalentes Morita como k-algebras** si son equivalentes Morita en el sentido usual, pero que además se pueden encontrar bimódulos P y Q que den la equivalencia y que sean k-simétricos .

Proposición 3.15. *Sean A y B dos k-algebras equivalentes Morita como k-algebras. Entonces, existe un isomorfismo $Pic(A) \cong Pic(B)$ que, por restricción, induce un isomorfismo entre los subgrupos $Pic_k(A)$ y $Pic_k(B)$.*

Demostración. Tomamos P y Q que den una equivalencia y que sean k-simétricos, y estos sirven (ejercicio: chequear!). □

Observación 3.16. Si A es un anillo y α es un (auto)morfismo de anillos, entonces

$$M_n(\alpha) : M_n(A) \to M_n(A)$$

definido por

$$(a_{ij})_{ij} \mapsto (\alpha(a_{ij}))_{ij}$$

es un (auto)morfismo del anillo $M_n(A)$. (En otras palabras, "$M_n(-)$."es un funtor de anillos en anillos.)

Corolario 3.17. *Si k es un d.i.p. (o en general si k un anillo conmutativo donde todo módulo proyectivo finitamente generado es libre) entonces todo automorfismo k-lineal de $M_n(k)$ es interior.*

Demostración. $Pic_k(M_n(k)) \cong Pic_k(k) = Pic_{class}(k)$, y si todo k-proyectivo es libre y $[P] \in Pic_{class}(k)$, debe ser $P \cong k^n$ para algun n, pero a menos que $n = 1$, no puede ser que $P \otimes_k Q \cong k$ para ningun libre Q pues $k^n \otimes_k k^m \cong k^{nm}$ y, por ser k conmutativo, en particular tiene noción de rango. □

Corolario 3.18. *Si A es un d.i.p. (o en general si A un anillo conmutativo donde todo módulo proyectivo finitamente generado es libre) entonces todo automorfismo de $M_n(A)$ es la composición de un automorfismo de la forma $M_n(\alpha)$ (donde α es automorfismo de A) y uno interior .*

Demostración. Sea $\phi : M_n(A) \to M_n(A)$ un automorfismo, entonces ϕ induce un automorfismo del centro. Pero $Z(M_n(A)) = A\,\mathrm{Id}$, luego $\phi(a\,\mathrm{Id}) = \alpha(a)\,\mathrm{Id}$ para algún automorfismo de A. Si consideramos $\widetilde{\phi} := M_n(\alpha^{-1}) \circ \phi$, tenemos que $\widetilde{\phi}(a\,\mathrm{Id}) = a\,\mathrm{Id}$ y por lo tanto $\widetilde{\phi}$ es A-lineal, y por el coro anterior, $\widetilde{\phi}$ es interior. □

Ejemplo 3.19. Si k es un cuerpo, todo automorfismo k-lineal de $M_n(k[x])$ es composición de uno interior con otro automorfismo inducido por uno de $k[x]$. Idem para $k[[x]]$, o cualquier ppal. (sugerencia: restringir al centro)

Ejemplo 3.20. Todo automorfismo de $M_n(\mathbb{Z}[i])$ es o bien interior, o bien interior compuesto con la conjugacion. Lo mismo para los automorfismos de $M_n(\mathbb{Q}[i])$, y para los automorfismos $\mathbb{R}$-lineales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Observar que como corolario de "Yoneda"para $\otimes$, se tiene el sgte

Lema 3.21. *${}_AP_A$, ${}_AP'_A$ entonces son equivalentes*

- *$P \otimes_A - \cong P' \otimes_A -$ como funtores de la categoria de A-bimódulos*
- *$P \otimes_A - \cong P' \otimes_A -$ como funtores de la categoria de A-módulos a izquierda*
- *$P \cong P'$ como bimódulos.*

3.5. Bimódulos k-simétricos y Skolem-Noether para centrales simples

Observación 3.22. Si A y B dos k-algebras entonces $A \otimes_k B$ es naturalmente una k-algebra definiendo el producto como el único determinado por

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$$

Ejercicio 3.23. Sean A y B dos k-algebras, entonces hay un isomorfismo de categorías entre los $A \otimes_k B^{\mathrm{op}}$-módulos y los A-B-bimódulos k-simétricos.

Demostración. Simplemente indicamos que la correspondencia esta dada por

$$(a \otimes b) \cdot m = amb$$

Es decir, si $M \in {}_AMod_B$ y es k-simétrico, entonces la fórmula anterior (bien)define una estructura de $A \otimes_k B^{\mathrm{op}}$-módulo a izquierda. Y recíprocamente, si se tiene un $A \otimes_k B^{\mathrm{op}}$-módulo a izquierda fórmula anterior (bien)define una estructura de A-B-bimódulo, que resulta k-simétrico. Dejamos el chequeo de los detalles como ejercicio. □

Recordamos que una k-álgebra A se dice central si $Z(A) = k$ y se dice simple si todo ideal bilátero es o bien 0 o bien A.

Ejemplo 3.24. Sea k un cuerpo y $A = M_n(k)$. Los ideales biláteros de A es lo mismo que los A-subimódulos de $M_n(k)$, que están en correspondencia con los k-subespacios de k (por equivalencia Morita aplicada a los bimódulos). Luego esto da una manera (indirecta pero) muy rapida de ver que $M_n(k)$ es central simple.

Ejemplo 3.25. Los cuateriones: $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ donde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$. Resulta un álgebra asociativa (no conmutativa) con centro R, y además es un anillo de división, es decir, todo elemento no nmulo es una unidad, en particular es un anillo simple.

Ejemplo 3.26. Cuateriones generalizados: sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de 2, $a, b \in \mathbb{K}$ no nulos, se define se define el álgebra de cuaterniones generalizada como el $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión 4 con base $\{1, i, j, k\}$

$$Q_{\mathbb{K}}(a, b) = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}i \oplus \mathbb{K}j \oplus \mathbb{K}k$$

y tabla de multiplicar determinada por donde $i^2 = a$, $j^2 = b$,$ij = k = -ji$ Notar que esto determina los demás productos, por ejemplo

$$k^2 = (ij)(ij) = i(ji)j = -i(ij)j = -i^2j^2 = -ab$$

Este álgebra, dependiendo en los parámetros a y b y en el cuerpo $\mathbb{K}$ es o bien un anillo de división, o isomorfo a $M_2(\mathbb{K})$.

Un resultado clásico de las k-álgebras centrales simples, que no demostraremos aquí (ver por ejemplo el libro de A. Micali en la bibliografía) es el siguiente:

Lema 3.27. *Si A y B son k-álgebras centrales simples entonces $A \otimes_k B$ es central simple.*

Pero si podemos demostrar fácilmente lo siguiente:

Lema 3.28. *Si A es una k-algebra central simple y semisimple, entonces $A \otimes_k A^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_k(A) \cong M_n(k)$ donde $n = \dim_k(A)$.*

Demostración. La aplicación

$$A \otimes_k A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_k(A)$$

determinada por

$$a \otimes a' \mapsto (x \mapsto axa')$$

es un morfismo de álgebras. Como $A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$ es simple, debe ser inyectivo, y por dimensión, es un iso. $\square$

Corolario 3.29. *Sea k un cuerpo. Si A es una k-algebra central simple entonces $Pic_k(A)$ es trivial y todo k-automorfismo es interior.*

Demostración. Por el Lema 3.21, si $[P], [P'] \in Pic_k(A)$ y consideramos los funtores $P \otimes_A -$ y $P' \otimes_A$ como funtores en la categoría de A-bimódulos k-simétricos, en caso que sean naturalmente isomorfos, debe valer que $P \cong P'$ como A-bimódulos. Luego, $Pic_k(A)$ se inyecta en $Pic_k(A \otimes_k A^{\mathrm{op}})$ y tenemos la siguiente cadena de composiciones

$$Out_k(A) \hookrightarrow Pic_k(A) \hookrightarrow Pic_k(A \otimes_k A^{\mathrm{op}}) \cong Pic_k(M_n(k)) \cong Pic_k(k) = \{1\}$$

□

4. Bibliografia

- F. W. Anderson K. R. Fuller, *Rings and categories of modules*, Springer - Verlag 1973. Es un libro de anillos y módulos y contiene una parte con los teoremas de Morita.

- *Anillos y sus categorías de representaciones*

  Una primera versión, Marco Farinati - Andrea Solotar,

  `http://mate.dm.uba.ar/~mfarinat/materias/alg2/libro/libro.pdf`

  Capítulo 8 (Teoremas de Morita) y Apéndice.

  Una segunda versión, donde se agregan ejercicios (pero no de esos capítulos), Marco Farinati - Andrea Solotar - Mariano Suárez Álvarez

  `http://mate.dm.uba.ar/~asolotar/Publicaciones/libro.pdf`

- Marco Farinati, *Extensiones Galois de anillos*

  `http://mate.dm.uba.ar/~mfarinat/ERP/Galois.pdf`

  Son notas de un curso sobre Extensiones de Galois de anillos, dictado en el VIII Encuentro Rioplatense de Algebra y Geometría Algebraica. En este curso se dan aplicaciones del punto de vista de mirar extensiones de Galois a través de la teoría de Morita.

- A. Micali, *Estructuras algebraicas VII : (estructuras de álgebras)* editada por la OEA, 1983, 66 pgs. Serie de matemática ; monografía no. 24 ISBN: 0827018428

  `https://libros-gratis.com/ebooks/estructuras-algebraicas-vii-estructura`

  En este libro (en castellano) se encuentra la teoría de álgebras semisimples, las álgebras centrales simples, y el grupo de Brauer.