



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

# La biálgebra de Lie de curvas en una superficie orientada

Autora: Juliana García Galofre  
Director: Marco Farinati  
Fecha de Presentación: 21/04/2010



# Agradecimientos

A mis padres, que fueron y son el pilar fundamental de mi educación. Les agradezco eternamente porque estando de acuerdo o no me apoyaron en todos mis proyectos, respaldando y respetando mis decisiones. A mis hermanas por su compañía y el apoyo incondicional que me brindaron siempre. A mi sobri por ser tan hermosa. A todos ellos gracias por acompañarme con mucho amor en el camino de la vida.

A mi familia entera, mis abuelos, mis tíos, tías y primos.

A Marco Farinati por ser un director estupendo, por escucharme, por tenerme paciencia, por estar atento a mis dudas, por contestarlas, por pensar al lado mío y por haber encontrado en el universo de la matemática un tema que me atrapó.

A Patricia por sugerirme a Marco como director.

A los jurados por tomarse el tiempo para leer mi tesis.

A Alejandro Ríos por ayudarme con el apéndice de multiset.

A mis amigos que están y estuvieron siempre presentes Romi, Javi, Eli, Mari, Julia, Abi, René, Sebas, Andrés, Adrián, Ceci P, Cesar, Laura, Vicky y Magui.

A Ariel, Matias y Federico que me ayudaron a aprender a escribir en TEX casi sin perder la paciencia.

A mis amigas de la vida Ivana, Jime, Flor y Ceci.

A todos muchas gracias.



# Índice

<b>1. Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. Superficies . . . . .	9
1.2. Característica de Euler . . . . .	10
1.3. Grupos de homotopía . . . . .	11
1.4. Clases de homotopía libre . . . . .	11
1.5. Biálgebras de Lie . . . . .	11
<b>2. La biálgebra de Lie de curvas en superficies</b>	<b>13</b>
<b>3. El espacio vectorial de palabras cíclicas y clases de conjugación del grupo libre</b>	<b>15</b>
3.1. Palabras cíclicas y pares linkeados . . . . .	15
<b>4. Diagramas</b>	<b>21</b>
<b>5. Relación pares linkeados vs. puntos de intersección</b>	<b>29</b>
<b>6. Definición combinatoria del cocorchete</b>	<b>33</b>
<b>7. Definición combinatoria del corchete</b>	<b>39</b>
<b>8. Cocorchete de una potencia de una palabra cíclica</b>	<b>45</b>
8.1. $\delta(\overline{W})$ . . . . .	46
8.2. $\delta(\mathcal{W}^n)$ para $n \in \mathbb{N}$ . . . . .	49
8.3. Ejemplos . . . . .	55
<b>9. Corchete de potencias de dos palabras cíclicas</b>	<b>59</b>
9.1. $[\mathcal{W}^n, \mathcal{Z}^m]$ . . . . .	59
9.2. $[\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{W}}]$ . . . . .	61
9.3. Relación entre $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$ y $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}^n, \mathcal{V}^m)$ . . . . .	63
9.3.1. Relación entre $[\mathcal{V}, \mathcal{V}]$ y $[\mathcal{V}, \overline{\mathcal{V}}]$ . . . . .	65
<b>A. Multisets</b>	<b>68</b>
<b>B. Producto libre de grupos</b>	<b>68</b>
<b>C. Característica de Euler y Mayer-Vietoris</b>	<b>69</b>



# Introducción

A mediados de los años 80, William Goldman [2], definió un corchete de Lie en el espacio vectorial generado por todas las clases de homotopía libres no triviales de curvas en una superficie orientable. Cuando la superficie tiene borde no vacío, este espacio vectorial tiene como base a las palabras cíclicas reducidas en generadores del grupo fundamental y sus inversos.

Finalizando la misma década, Vladimir Turaev [3], agregó una estructura de cocorchete de Lie en este  $\mathbb{Z}$ -módulo y mostró que estas dos operaciones, corchete y cocorchete, hacen del espacio una *biálgebra de Lie*. Moira Chas dió una descripción combinatoria de estas operaciones.

La parte fundamental de esta tesis consiste en dar una descripción explícita combinatoria de la relación entre corchete o cocorchete y la operación tomar potencia, que es particular de este ejemplo de biálgebras.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: comenzamos recordando algunas definiciones básicas de conceptos que hacen al entorno de nuestro trabajo.

En primer lugar se recordará la definición de biálgebra de Lie teniendo en cuenta nuestro ejemplo motivador inducido por las clases de homotopía de curvas cerradas en una superficie orientada. Seguidamente, en la sección 2, repasaremos las definiciones de Goldman y Turaev para el corchete y cocorchete, para después cambiar el punto de vista en la sección 3 y abordar una visión combinatoria del problema según define Moira Chas en [1] (siempre teniendo en cuenta la idea geométrica).

En la sección 4 se mostrará cómo construir diagramas que modelicen superficies, y como modelar superficies orientables vía diagramas. Luego se incluirán curvas a este tipo de diagramas. En esta sección daremos una clasificación de los grupos fundamentales correspondientes a las superficies dadas por una palabra cíclica.

En las secciones 6 y 7 se recordarán las definiciones combinatorias para el corchete y cocorchete, dadas por Chas en [1]. A estas definiciones puramente combinatorias, agregamos diagramas que permitirán observar la acción del corchete y cocorchete de manera gráfica.

En las dos últimas secciones de este trabajo describiremos el corchete y el cocorchete de potencias de palabras cíclicas y relacionaremos conjuntos de pares linkeados usando ideas combinatorias basadas en [1].





# 1. Preliminares

## 1.1. Superficies

Llamaremos superficie a una variedad topológica de dimensión dos. Más precisamente una superficie es un espacio topológico Hausdorff con base numerable y tal que cada punto tiene un entorno que es homeomorfo a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

Más formalmente, el homeomorfismo local entre una superficie y el plano euclídeo implica que para cada punto  $P$  de una superficie hay un entorno de  $P$  que es homeomorfo a un disco abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Esta propiedad permite construir un sistema de coordenadas local bidimensional en torno a cualquier punto en la superficie. Se puede llamar carta al homeomorfismo local que va de la superficie a un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y al inverso (de este homeomorfismo) parametrización. No siempre es posible parametrizar una superficie con un único homeomorfismo local.

Dos ejemplos típicos de superficies son la esfera y el toro. En base a estos últimos se pueden obtener otras superficies, por ejemplo, si se toman dos toros y a cada uno se le remueve un disco y luego se los pega juntando los bordes resultantes de haber removido los discos, se obtiene así una nueva superficie. Repitiendo esta idea se puede construir superficies resultantes de pegar  $g$  toros.

Resulta que esto agota la lista de superficies cerradas orientables. Esto es lo que cuenta el teorema de clasificación de superficies cerradas que recordamos aquí ([6]):

Toda superficie cerrada (es decir, compacta y sin frontera o borde) es homeomorfa a algún miembro de las siguientes familias de superficies:

- (1) la esfera;
- (2) la suma conexa de  $g$ -toros, para algún  $g \geq 1$ ;
- (3) la suma conexa de  $k$  planos proyectivos reales, para algún  $k \geq 1$ .

Las superficies de las dos primeras familias son orientables. El número  $g$  de toros involucrados en la construcción se denomina género de la superficie. Puesto que la esfera y el toro tienen características de Euler 2 y 0 respectivamente, se deduce que la característica de Euler de la suma conexa de  $g$ -toros es  $2 - 2g$  (ver anexo C).

Las superficies de la tercer familia son no-orientables.

Una superficie con borde (o frontera) es un espacio topológico Hausdorff donde para cada punto existe un entorno homeomorfo a un conjunto abierto del semiplano superior del plano euclídeo.

Ejemplos típicos de superficie con frontera son el cilindro, un toro al que se le quitó un disco (ambas orientables), la cinta de Möbius (no orientable), etc. Notar que un toro al que se le quitó un disco es homeomorfo a un toro al que se le quitó un punto.

Es posible clasificar también las superficies con frontera. Esto se obtiene como en el teorema anterior, añadiendo el número de fronteras que tiene la superficie.

## 1.2. Característica de Euler

La característica de Euler es un invariante topológico (de hecho un invariante homotópico) que en general se nota  $\chi$ .



La característica de Euler de un poliedro de dimensión dos se puede calcular usando la siguiente fórmula:

$$\chi = C - A + V$$

donde  $C$ ,  $A$  y  $V$  son los números de caras, de aristas y de vértices respectivamente. En particular, para cualquier poliedro homeomorfo a una esfera tenemos

$$\chi(S^2) = C - A + V = 2.$$

Si quisieramos calcular la característica de Euler de una superficie cualquiera podríamos triangular la superficie y luego usar la fórmula anterior, lo que es claro es que este procedimiento no resulta siempre cómodo. Es por esto que, en general, se utiliza otra definición equivalente para la característica de Euler. Se puede calcular la característica de Euler como la suma alternada de las dimensiones de los grupos de homología.

Vía Mayer-Vietoris se puede descomponer la superficie y calcular la característica de Euler para cada una de estas nuevas superficies, así obtener la característica de Euler de la superficie original. Más precisamente, si  $S = S_1 \cup S_2$  un argumento de triangulación, o bien la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris implica que

$$\chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - \chi(S_1 \cap S_2).$$

Esta propiedad permite el cálculo de la característica para superficies más complejas en base a otras que tal vez no lo sean.

La característica de Euler de superficies orientadas cerradas se puede calcular usando su género. Si el género de la superficie es  $g$  entonces se tiene que

$$\chi = 2 - 2g.$$

De todo esto se deduce, que una superficie cerrada está determinada (salvo homeomorfismo) por dos propiedades: el valor numérico de su característica de Euler (o su género) y si es o no orientable.

### 1.3. Grupos de homotopía

Dado  $X$  un espacio topológico y  $x_0$  un punto de  $X$ , un camino continuo en  $X$  que comienza y acaba en  $x_0$  se llama un lazo basado en  $x_0$ .

El conjunto de clases de homotopía de caminos asociados a los lazos basados en  $x_0$ , con la operación  $*$  (concatenar lazos) se denomina **grupo fundamental** de  $X$  relativo a  $x_0$  y se nota  $\pi_1(X, x_0)$ .

Es un hecho conocido que si el espacio  $X$  es conexo por caminos (arcoconexo), y  $x_0$  y  $x_1$  son dos puntos de  $X$ , entonces  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(X, x_1)$  son isomorfos. Es importante notar que este isomorfismo depende de la clase de homotopía del camino (que une los puntos  $x_0$  y  $x_1$ ) elegido, y distintas elecciones cambian al isomorfismo por una conjugación. Esto permite hablar de  $\pi_1(X)$  independientemente del punto base que hubiésemos podido elegir, recordando siempre que si no elegimos un punto base los elementos del grupo  $\pi_1$  quedan determinados a menos de conjugación.

Ejemplos:  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$  donde  $S^1$  es la circunferencia,  $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  donde  $T$  es el toro (que es homeomorfo al producto de dos circunferencias), pero como no todo grupo fundamental es conmutativo, agregamos el siguiente ejemplo  $\pi_1(T^*) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  donde  $T^*$  es el toro al que se le removió un disco y  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  es un producto libre, con lo cual no es abeliano.

### 1.4. Clases de homotopía libre

El conjunto de clases de homotopía libre de curvas cerradas en una superficie  $S$  (o en un espacio topológico cualquiera) es el conjunto de clases de homotopía de funciones de  $S^1$  en  $S$ . Se denominan de homotopía libre porque no se elige ningún punto base, y a la homotopía no se le pide que respete ningún punto base.

Este conjunto no tiene, en general, operación de grupo porque para concatenar los lazos se debe elegir un punto base.

Es un hecho conocido que el conjunto de clases de homotopía libre de un espacio topológico  $X$  arcoconexo, está en biyección con  $\langle \pi_1(X, x_0) \rangle$ . Pero las clases de conjugación no dependen del punto base elegido.

**Observación 1.1.** Dados  $G$  un grupo,  $x, x' \in G$  conjugados,  $y, y' \in G$  conjugados. Esto no implica en general que  $xy$  sea un conjugado de  $x'y'$ . Por esto no se introduce estructura de grupo en clases de conjugación.

Sin embargo, dados  $x, x'$  tal que son conjugados, entonces  $x^n$  y  $(x')^n$  son conjugados para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , por lo tanto este conjunto tiene una operación 1-aria.

### 1.5. Biálgebras de Lie

Sea  $V$  un espacio vectorial (o eventualmente un módulo conmutativo unitario  $K$ , por ejemplo  $K = \mathbb{Z}$ ). Para definir una biálgebra de Lie se necesitan dos aplicaciones

lineales auxiliares  $\omega: \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$  y  $s: \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$  definidas por

$$\omega(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) = \mathcal{W} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$$

y

$$s(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) = \mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$$

para cada  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W} \in \mathbb{V}$ .

Es decir, usamos la acción de permutación en  $n$  letras  $\mathbb{V}^{\otimes n}$ , con lo cual  $\omega = (123)$  y  $s = (12)$ .

Un **álgebra de Lie** sobre un espacio vectorial  $\mathbb{V}$  está dado por una aplicación lineal  $[\cdot, \cdot]: \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$  tal que

- $[\cdot, \cdot] \circ s = -[\cdot, \cdot]$ , es decir

$$[x, y] = -[y, x]$$

para todo par  $x, y \in \mathbb{V}$  (*antisimetría*)

- $[\cdot, \cdot] \circ (\text{Id} \otimes [\cdot, \cdot]) \circ (\text{Id} + \omega + \omega^2) = 0$ , es decir

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

para toda terna  $x, y, z \in \mathbb{V}$  (*identidad de Jacobi*).

Una **coálgebra de Lie** sobre  $\mathbb{V}$  esta dada por una aplicación lineal  $\Delta: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$  tal que

- $s \circ \Delta = -\Delta$  (*co-antisimetría*)

- $(\text{Id} + \omega + \omega^2) \circ (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta = 0$  (*identidad de co-Jacobi*).

**Definición 1.2.**  $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot], \Delta)$  es una **biálgebra de Lie** si  $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot])$  es un álgebra de Lie,  $(\mathbb{V}, \Delta)$  es una coálgebra de Lie y la ecuación de compatibilidad

$$\Delta[a, b] = [\cdot, \cdot](\Delta a, b) + [\cdot, \cdot](a, \Delta b)$$

vale para todo  $a, b \in \mathbb{V}$  donde  $[\cdot, \cdot](a, b \otimes c) = -[\cdot, \cdot](b \otimes c, a) = [\cdot, \cdot](a, b) \otimes c + b \otimes [a, c]$ .  $\square$

La condición de compatibilidad dice que  $\Delta: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$  es un 1-cociclo de Chevalley del álgebra de Lie  $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot])$  a coeficientes en el módulo de Lie de  $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ . O simplemente,  $\Delta$  es una derivación de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ .

Para una biálgebra de Lie arbitraria, la composición corchete con el cocorchete  $[\cdot, \cdot] \circ \Delta$  da un endomorfismo característico de  $\mathbb{V}$ .

Las biálgebras que nos interesan en este trabajo tienen la propiedad adicional que este endomorfismo es nulo. Dado que estas son biálgebras particulares, merecen una definición.

$(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot], \Delta)$  es una **biálgebra de Lie involutiva** si  $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot], \Delta)$  es una biálgebra de Lie y  $[\cdot, \cdot] \circ \Delta = 0$  sobre  $\mathbb{V}$ .

## 2. La biálgebra de Lie de curvas en superficies

Para comenzar a tratar el tema de curvas en superficies, resumiremos aquí las construcciones de Goldman y Turaev. Más precisamente, repasaremos las definiciones geométricas del corchete y cocorchete para clases de homotopía libres de curvas en una superficie orientable y orientada.

Sea  $\mathbb{W}$  el espacio vectorial generado por todas las clases de homotopía libres (triviales o no) de lazos en una superficie y sea  $\mathbb{W}_0$  el subespacio vectorial generado por la clase del lazo trivial. En [2], Goldman define una estructura de álgebra de Lie sobre  $\mathbb{W}$ . Turaev probó que esta estructura pasa al cociente  $\mathbb{W}/\mathbb{W}_0$  y que existe un coproducto sobre  $\mathbb{W}/\mathbb{W}_0$  que hace de  $\mathbb{W}/\mathbb{W}_0$  una biálgebra de Lie.

Sean  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  dos clases (no triviales) de homotopía (libre) de curvas. Elegimos representantes  $A$  de  $\mathcal{V}$  y  $B$  de  $\mathcal{W}$  en posición general. Entonces el conjunto de puntos de intersección de estas curvas contiene una cantidad finita de elementos  $p_1, p_2, \dots, p_m$ . A cada uno de estos puntos  $p_i$  le asignamos una clase de homotopía y un signo: la clase que contiene el lazo que comienza en  $p_i$  sigue a lo largo de  $A$  y luego a lo largo de  $B$ , y el signo se obtiene al comparar la orientación de la superficie con la orientación dada por los arcos salientes de  $p_i$  o sea  $A$  y  $B$  (en ese orden) positivo si coincide, negativo si no.

El **corchete**  $\langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle$  se define como la suma signada de todas las clases de homotopía. En símbolos

$$\langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle = \sum_{p \in A \cap B} \text{sgn}_p(A, B) \{ \text{clase}(A \cdot_p B) \}_0$$

donde  $\text{sgn}_p(A, B)$  denota el signo,  $A \cdot_p B$  es el producto usual de lazos que pasan por  $p$  y  $\text{clase}(X)$  denota la clase de conjugación del lazo  $X$ .

Para poder definir el cocorchete, para cada clase de homotopía no trivial  $\mathcal{W}$ , elegimos un representante  $A$  en posición general. Entonces los puntos de autointersección son finitos, digamos  $q_1 \dots q_n$ . A cada uno de estos puntos  $q_i$  se le asocia un par ordenado de clases de homotopía  $(\mathcal{W}_1^{q_i}, \mathcal{W}_2^{q_i})$  de la siguiente manera: primero se ordenan los arcos de  $A$  salientes de  $q_i$  de forma tal que definan la misma orientación que la superficie.  $\mathcal{W}_1^{q_i}$  es la clase de conjugación del lazo que comienza en el primer arco, recorre una parte de  $A$  y vuelve a  $q_i$ . Análogamente,  $\mathcal{W}_2^{q_i}$  es la clase de conjugación del lazo que comienza en el segundo arco recorre  $A$  hasta que vuelve a  $q_i$  otra vez.

El **cocorchete** entonces se define por la siguiente fórmula

$$\Delta(\mathcal{W}) = \sum_{q_1, q_2, \dots, q_n} \{ \mathcal{W}_1^{q_i} \}_0 \otimes \{ \mathcal{W}_2^{q_i} \}_0 - \{ \mathcal{W}_2^{q_i} \}_0 \otimes \{ \mathcal{W}_1^{q_i} \}_0$$

Veremos ejemplos para el corchete y cocorchete usando esta definición en futuras secciones. Más precisamente una vez que hallamos modelado superficies y curvas mediante diagramas será evidente la practicidad de las anteriores definiciones si es que se

tiene como dato los puntos de intersección entre dos curvas o puntos de autointersección de una curva.

**Proposición 2.1.** [1] *La biálgebra de Goldman-Turaev es involutiva, es decir*

$$\langle , \rangle \circ \Delta = 0.$$

En adelante abordaremos este problema desde un punto de vista combinatorio, es decir definiremos un corchete y un cocorchete de manera combinatoria luego agregaremos diagramas que permitirán entender esta idea geoméricamente. Más adelante probaremos que estas definiciones son análogas a las definidas por Goldman-Turaev y así al mostrar ejemplos los explicaremos de dos maneras distintas, usando argumentos combinatorios y también usando estas primeras definiciones.

### 3. El espacio vectorial de palabras cíclicas y clases de conjugación del grupo libre

En una superficie pinchada conexa el grupo fundamental es libre y por lo tanto se lo puede describir como el conjunto de palabras en el alfabeto de sus generadores y sus inversos. Por ser un grupo libre, la única cancelación que ocurre al formar una palabra es la yuxtaposición de una letra y su inverso.

En un grupo cualquiera los elementos  $ab$  y  $ba$  son conjugados,

$$ab = b^{-1}bab$$

por lo tanto la clase de conjugación de una palabra  $a_1 \dots a_n$  coincide con la de cualquier permutación cíclica. Por esta razón nos interesaremos en las palabras cíclicas. Detallaremos esta relación en la sección “Diagramas”.

El mérito de Chas consiste en describir las operaciones geométricas en términos combinatorios y por eso dedicamos esta sección a las palabras cíclicas y sus construcciones combinatorias.

#### 3.1. Palabras cíclicas y pares linkeados

Empezaremos con algunas definiciones que necesitaremos a lo largo de todo este trabajo. Recordaremos siempre nuestro ejemplo motivador que es el de una superficie cuyo grupo fundamental es libre en  $n$  generadores; en consecuencia el conjunto de clases de homotopía libre de curvas en una superficie está en biyección con las palabras cíclicas en letras dadas por los generadores y sus inversos.

Para cada entero no negativo  $n$ , el  $n$ -**alfabeto** o, más brevemente, el **alfabeto** es el conjunto de  $2n$  símbolos  $\mathbb{A}_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ .

Consideraremos palabras, en estas letras, que llamaremos palabras lineales, y las notaremos con mayúsculas.

**Ejemplo 3.1.** Si consideramos el alfabeto  $\{a_1, a_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2\}$  una palabra lineal sería  $V = a_1 a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_1$  y cualquier yuxtaposición de cualquier cantidad finita de estas letras también sería una palabra lineal.

También consideraremos palabras cíclicas en letras de  $\mathbb{A}_n$ , que notaremos con letras caligráficas. Se puede pensar en las palabras cíclicas como símbolos ubicados en los vértices de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad en  $\mathbb{C}$  sin distinguir entre rotaciones circulares de la misma palabra. Es decir, podemos leer la palabra empezando en cualquiera de sus letras, siempre respetando la orientación que tenga asignada la palabra.

Por convención se leerá la palabra cíclica en sentido contrario al de las agujas del reloj.

**Ejemplo 3.2.** En la siguiente figura podemos observar un ejemplo de una palabra cíclica.

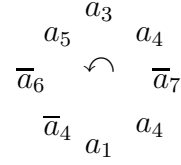


Figura 1:  $\mathcal{W} = c(a_5\bar{a}_6\bar{a}_4a_1a_4\bar{a}_7a_4a_3)$  palabra cíclica en letras de  $\mathbb{A}_7$

Si  $x_0x_1\dots x_{m-1}$  es una palabra lineal, entonces, por definición,  $\overline{x_0x_1\dots x_{m-1}} = \bar{x}_{m-1}\bar{x}_{m-2}\dots\bar{x}_0$  y para cada letra  $x$ ,  $\bar{\bar{x}} = x$ .

Una palabra lineal  $x_0x_1\dots x_{m-1}$  es **libremente reducida** si  $x_i \neq \bar{x}_{i+1}$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ .

**Ejemplo 3.3.** La palabra lineal  $a_5\bar{a}_5\bar{a}_4a_1$  no es libremente reducida mientras que  $\bar{a}_4a_1$  sí lo es.

Una palabra lineal  $W_1$  es un **representante lineal** de una palabra cíclica  $\mathcal{W}$  si  $W_1$  puede ser obtenida a partir de  $\mathcal{W}$  después de hacer un corte entre dos letras consecutivas de  $\mathcal{W}$ . En ese caso, escribimos  $\mathcal{W} = c(W_1)$ .

**Ejemplo 3.4.** Dada  $W_1 = a_1a_2a_1\bar{a}_2$  es un representante lineal de  $\mathcal{W} = c(a_1\bar{a}_2a_1a_2)$ .

También se puede notar que dada una palabra cíclica hay en principio más de un representante lineal.

Si  $\mathcal{W}$  es una palabra cíclica,  $W_1$  es un representante lineal  $\mathcal{W}$ , y  $n$  es un entero positivo, se define  $\mathcal{W}^n$  como  $c(W_1^n)$  (o sea concatenar  $W_1$   $n$  veces y luego considerar la palabra cíclica dada por esa palabra lineal),  $\overline{\mathcal{W}}$  como  $c(\overline{W_1})$ , y  $\mathcal{W}^{-n}$  como  $\overline{\mathcal{W}^n}$ . Estas son operaciones básicas entre clases de conjugación en grupos y resultan bien definidas. Es decir que después de concatenar  $n$  veces, la palabra cíclica que queda definida es la misma sin importar cual sea el representante lineal que se hubiese elegido.

**Ejemplo 3.5.** Si  $\mathcal{W} = c(a_1\bar{a}_2)$  entonces  $\mathcal{W}^2 = c(a_1\bar{a}_2a_1\bar{a}_2)$  y  $\overline{\mathcal{W}} = c(a_2\bar{a}_1)$ .

Una palabra cíclica es **reducida** (o cíclicamente reducida) si es no vacía y todos sus representantes lineales son libremente reducidos, o sea el arreglo de símbolos o anillo es reducido.

Una palabra cíclica reducida es **primitiva** si no puede ser escrita como  $\mathcal{W}^r$  para algún  $r \geq 2$  y alguna palabra cíclica reducida  $\mathcal{W}$ .

**Ejemplo 3.6.** Dada  $\mathcal{W} = c(a_1\bar{a}_2a_1\bar{a}_2)$  entonces no es primitiva ya que  $\mathcal{W} = c(a_1\bar{a}_2)^2$ . En cambio la palabra  $\mathcal{W} = c(a_1a_2a_1a_2\bar{a}_1)$  es primitiva.

La **longitud** de una palabra lineal (resp. cíclica)  $W$  (resp.  $\mathcal{W}$ ) es la cantidad de letras contadas con multiplicidad con la que aparece y será notado como  $\ell(W)$  (resp.  $\ell(\mathcal{W})$ ).



**Ejemplo 3.7.** En el caso lineal  $\ell(a_1a_1a_2\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_2) = 6$  y análogamente en el caso de una palabra cíclica  $\ell(c(a_1a_1a_2\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_2)) = 6$ .

Llamaremos **subpalabra** de una palabra cíclica  $\mathcal{W}$  a una subpalabra de un representante lineal de  $\mathcal{W}$ , es decir se eligen dos letras (podría ser una única letra) en la palabra cíclica, y la subpalabra, se lee desde la primera de las letras hasta la última respetando la orientación de la palabra cíclica. En particular la longitud de una subpalabra es menor o igual que la longitud de la palabra cíclica.

**Ejemplo 3.8.** Dada la palabra cíclica  $\mathcal{W} = c(abc\bar{a}\bar{b}cac)$  podemos encontrar, entre otras, las siguientes subpalabras:

- las subpalabras de longitud uno son  $a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, c, a$  y  $c$ ;
- las de longitud dos son  $ab, bc, c\bar{a}, \bar{a}\bar{b}, \bar{b}c, ca, ac$  y  $ca$ ;
- las de longitud tres son  $abc, bc\bar{a}, c\bar{a}\bar{b}, \bar{a}\bar{b}c, \bar{b}ca, cac, aca$  y  $cab$ ;

y así podemos seguir con las subpalabras de longitud cuatro, cinco, seis, siete y ocho. Se puede observar que en la lista que se enumeró anteriormente hay palabras repetidas, es decir que en una palabra cíclica que podría ser primitiva o no, se podría encontrar más de una vez la misma subpalabra.

### Símbolo de superficie y signos

Sea  $\mathcal{O}$  una palabra cíclica (reducida o no) tal que todas las letras de  $\mathbb{A}_n$  aparecen exactamente una vez. De ahora en más, trabajaremos con una palabra  $\mathcal{O}$  fija y todas nuestras construcciones dependerán de esta elección. Esta palabra  $\mathcal{O}$  será llamada el **símbolo de la superficie**.

**Ejemplo 3.9.** Si consideramos el alfabeto  $\mathbb{A}_3 = \{a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  un símbolo de superficie  $\mathcal{O}$  posible sería  $c(abc\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ . Pero claramente este no es el único, cualquier permutación de estas letras dará lugar a otra palabra cíclica  $\mathcal{O}$  que también será símbolo de superficie.

Para cada palabra cíclica  $\mathcal{W}$  (reducida o no), asociamos un número,  $o(\mathcal{W}) \in \{-1, 0, 1\}$  como sigue. Si  $\mathcal{W}$  es no vacía y tal que existe una inyección que preserve el orden (resp. si existe una inyección que lo invierta) en el anillo de las letras de  $\mathcal{W}$  a las letras de  $\mathcal{O}$  entonces  $o(\mathcal{W}) = 1$  (resp.  $o(\mathcal{W}) = -1$ ). En los demás casos, o sea si  $\mathcal{W}$  es vacía o no existe una inyección que preserve o invierta la orientación, entonces  $o(\mathcal{W}) = 0$ .

En otras palabras, si se encuentran las letras de la palabra  $\mathcal{W}$  en el mismo orden que al leer algún representante lineal del símbolo de superficie, entonces  $o(\mathcal{W}) = 1$ . Si pasa esto último pero en el orden inverso entonces  $o(\mathcal{W}) = -1$ . Si ninguna de las opciones anteriores se cumple, es decir las letras de la palabra  $\mathcal{W}$  aparecen desordenadas en  $\mathcal{O}$  o la palabra es vacía, entonces  $o(\mathcal{W}) = 0$ .

De la siguiente definición dependerá el resto de este trabajo, con lo cual es de vital importancia. Si bien a primera vista esta definición resulta arbitraria, más adelante se darán argumentos geométricos que permitirán entender la utilidad y el porqué de esta definición.

**Definición 3.10.** Sean  $P, Q$  dos palabras lineales. El par ordenado  $(P, Q)$  está  $\mathcal{O}$ -**linkeado** o más brevemente linkeado, si  $P$  y  $Q$  son reducidas, de longitud por lo menos dos y se cumple alguna de las siguientes condiciones.

- (1)  $P = p_1p_2, Q = q_1q_2$  y  $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2)) \neq 0$ .
- (2)  $P = p_1Yp_2, Q = q_1Yq_2, p_1 \neq q_1, p_2 \neq q_2$  e  $Y$  es una palabra lineal de longitud al menos uno, y si escribimos  $Y$  como  $x_1Xx_2$  (donde  $X$  es la palabra vacía si  $Y$  tiene longitud dos y  $x_1$  coincide con  $x_2$  si la longitud de  $Y$  es uno), entonces  $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1x_1)) = o(c(p_2q_2\bar{x}_2))$ .
- (3)  $P = p_1Yp_2, Q = q_1\bar{Y}q_2, p_1 \neq \bar{q}_2, p_2 \neq \bar{q}_1$  e  $Y$  es una palabra lineal de longitud al menos uno, y si uno escribe  $Y$  como  $x_1Xx_2$  (donde  $X$  puede ser la palabra vacía y  $x_1$  puede ser igual a  $x_2$ ), entonces  $o(c(q_2\bar{p}_1x_1)) = o(c(\bar{q}_1p_2\bar{x}_2))$ .

□

Más adelante veremos que los pares linkeados detectan puntos de autointersección de una curva o puntos de intersección entre dos curvas, de ahí la importancia de esta definición.

**Definición 3.11.** Si  $\mathcal{W}$  es una palabra cíclica reducida, notamos  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{W})$  al conjunto de todos los pares linkeados  $(P, Q)$ , donde  $P$  y  $Q$  son subpalabras de  $\mathcal{W}$ , y contando estos pares con la multiplicidad con la que aparecen. □

Es decir  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{W})$  más que un conjunto es un multiset o bag (Ver apéndice A).

**Ejemplo 3.12.** ([1] Ejemplo 2.2) Sea  $\mathcal{O} = c(a_1a_2\bar{a}_1\bar{a}_2a_3a_4\bar{a}_3\bar{a}_4)$  y se considera  $\mathcal{W} = c(a_1a_2\bar{a}_3a_1a_1a_3\bar{a}_2a_1)$ . Hay pares linkeados en  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{W})$  de todos los tipos:

- (1) los pares;  $(a_2\bar{a}_3, \bar{a}_3a_1), (\bar{a}_3a_1, a_2\bar{a}_3), (a_2\bar{a}_3, a_1a_3), (a_1a_3, a_2\bar{a}_3), (\bar{a}_3a_1, a_3\bar{a}_2), (a_3\bar{a}_2, \bar{a}_3a_1), (a_1a_3, a_3\bar{a}_2)$  y  $(a_3\bar{a}_2, a_1a_3)$  son todos los pares que satisfacen la definición 3.10 (1);
- (2)  $(\bar{a}_3a_1a_1, a_1a_1a_3), (a_1a_1a_3, \bar{a}_3a_1a_1), (\bar{a}_2a_1a_1, a_1a_1a_2)$  y  $(a_1a_1a_2, \bar{a}_2a_1a_1)$  son todos los pares que satisfacen la definición 3.10 (2);
- (3)  $(a_1a_2\bar{a}_3a_1, a_1a_3\bar{a}_2a_1)$  y  $(a_1a_3\bar{a}_2a_1, a_1a_2\bar{a}_3a_1)$  son los pares que satisfacen la definición 3.10 (3);

Aquí se incluyen algunos diagramas para visualizar el ejemplo, para esto también se resaltaron las letras en juego. Si consideramos el par  $(a_2\bar{a}_3, \bar{a}_3a_1)$ :

Si consideramos el par  $(\bar{a}_3a_1a_1, a_1a_1a_3)$ :

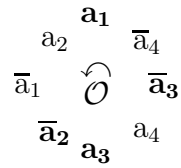


Figura 2:  $o(c(\bar{a}_2 a_3 \bar{a}_3 a_1)) = 1$  porque estas letras se pueden encontrar en el sentido de  $\mathcal{O}$ .

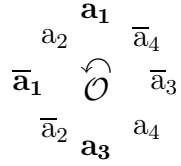


Figura 3:  $o(c(a_3 \bar{a}_1 a_1)) = o(c(a_1 a_3 \bar{a}_1)) = -1$  porque las letras de ambas palabras  $a_3 \bar{a}_1 a_1$  y  $a_1 a_3 \bar{a}_1$  se encuentran en sentido inverso al de  $\mathcal{O}$ .

**Observación 3.13.** Como una subpalabra lineal de una palabra cíclica está totalmente determinada por su letra inicial y final, entonces, el conjunto de subpalabras lineales de una palabra cíclica reducida  $\mathcal{W}$  contiene  $\ell(\mathcal{W})^2$  elementos (recordar que se cuenta cada palabra con la multiplicidad con la que aparezca). Con lo cual el conjunto de pares linkeados es finito y contiene a lo sumo  $\ell(\mathcal{W})^4$  elementos.



## 4. Diagramas

En esta sección se mostrará a través de diagramas como describir una superficie con borde a partir de ciertas palabras cíclicas. Al revés, veremos (con diagramas) cómo dada una superficie orientada con borde, esta se podría modelar con una palabra cíclica  $\mathcal{O}$ .

Describiremos curvas, más precisamente lazos, en estas superficies vía palabras cíclicas. Esto último dará lugar a trabajar sobre los grupos de homotopía de cada una de estas superficies. Haremos una clasificación de los grupos de homotopía para cada una de las superficies dada por una palabra cíclica (que sólo dependerá de la cantidad de letras que aparezcan en el símbolo de la superficie).

Como antes, empezamos fijando una palabra cíclica  $\mathcal{O}$  (reducida o no) tal que todas las letras de  $\mathbb{A}_n$  aparecen exactamente una vez. Notaremos con  $P_{\mathcal{O}}$  al polígono (convexo) de  $4n$  lados, tal que estos están etiquetados con sentido contrario al de las agujas del reloj de la siguiente manera: uno elige un lado y lo etiqueta con la primer letra de  $\mathcal{O}$ , el siguiente no se etiqueta, el siguiente lleva la segunda letra de  $\mathcal{O}$ , el siguiente no se etiqueta, y así sucesivamente, como se muestra en la siguiente figura.

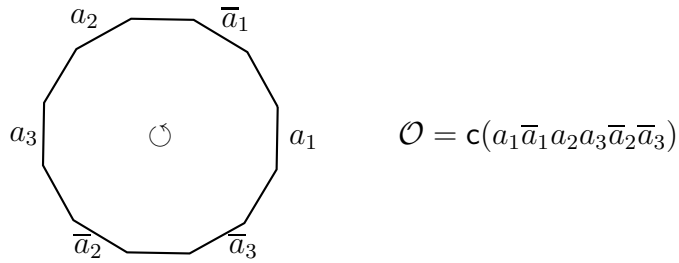


Figura 4: El polígono de  $4n$ -lados  $P_{\mathcal{O}}$

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , identificamos los lados  $a_i$  y  $\bar{a}_i$  sin crear cintas de Moebius. De esta manera, obtenemos una superficie orientable  $\Sigma_{\mathcal{O}}$  con borde.

**Ejemplo 4.1.** Si se toma  $\mathcal{O}$  la palabra vacía se obtiene un disco, con  $\mathcal{O} = c(a\bar{a})$  se obtiene un cilindro (hueco), con  $\mathcal{O} = c(a_1 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2)$  se obtiene el toro pinchado y con  $\mathcal{O} = c(a_1 \bar{a}_1 a_2 \bar{a}_2)$  el cilindro pinchado (1 vez), con  $\mathcal{O} = c(a_1 a_2 a_3 \bar{a}_3 \bar{a}_2 \bar{a}_1)$  el cilindro pinchado 2 veces, y así, aumentando la cantidad de letras podemos obtener distintas superficies con borde (en la siguiente figura se detallan las construcciones de algunas de estas superficies).

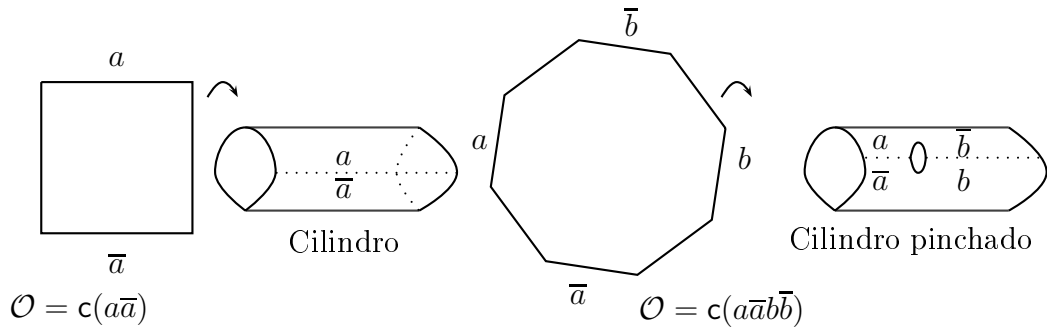
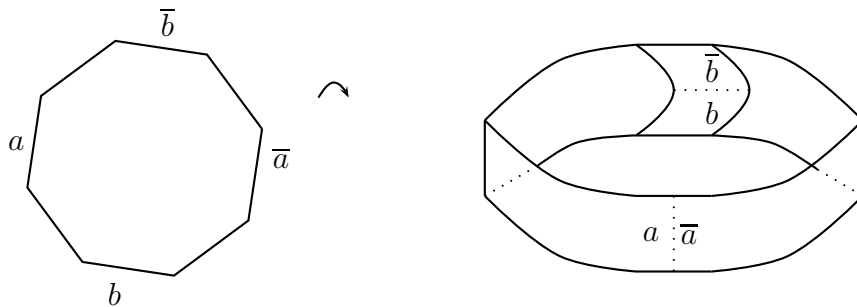


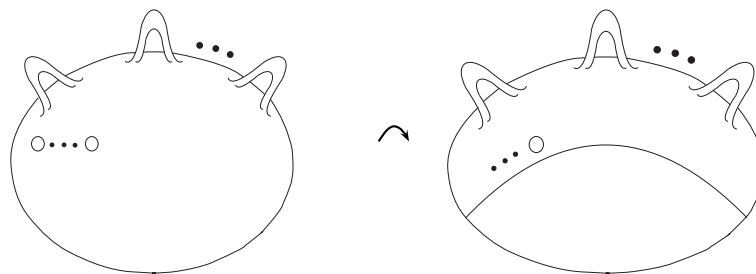
Figura 5: Cilindros



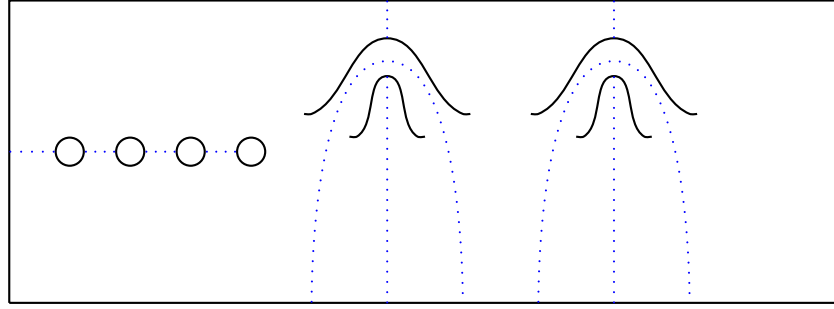
Las únicas superficies que se pueden obtener a partir de cuatro letras son el cilindro pinchado de la figura 5 y el toro pinchado.

Figura 6: Toro pinchado

Más generalmente, toda superficie orientable con borde se puede modelar con una de estas palabras cíclicas. Para esto hay que partir de que toda superficie orientable con borde es una unión conexas de cierta cantidad de toros y cierta cantidad de componentes de borde.



Se procede de la siguiente manera: se toma una componente de borde de la superficie y vía homotopía se realiza un estiramiento de la misma. De esta manera se puede pensar a la superficie como un rectángulo con  $g$  manijas y  $n$  agujeros (o componentes de borde) como se ve en la siguiente figura.



En particular en el último diagrama superficie cuenta con cinco componentes de borde (cuatro aparecen en el diagrama como circunferencias y la restante es el rectángulo exterior) y dos manijas. Con líneas punteadas se indican los cortes que deberían realizar para obtener una superficie homeomorfa a un polígono de cierta cantidad de lados. Más precisamente, cada vez que se realice uno de los cortes indicados con líneas de puntos, se etiqueta cada uno de estos bordes con letras  $a_i$ ,  $\bar{a}_i$  indistintamente. Esto dará lugar a un símbolo de superficie y luego a un polígono que en este ejemplo en particular es de 32 lados, de los cuales 16 estarán etiquetados.

**Observación 4.2.** Del diagrama anterior se puede extraer como conclusión lo siguiente: por cada dos componentes de borde se deberá realizar un corte, por cada manija (llamamos  $g$  al género o cantidad de manijas) se necesitan dos cortes. En total  $2g + n - 1$  cortes y por cada corte se tienen dos letras. Así, dada  $S$  una superficie orientable con género  $g$  y  $n$  componetes de borde, el polígono que modeliza esta superficie tiene  $4(2g + n - 1)$  lados, es decir  $2(2g + n - 1) = \#\mathbb{A}_n$  donde el alfabeto es un conjunto del tipo  $\mathbb{A}_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ .

Podemos observar también, que dadas dos o más palabras cíclicas distintas  $\mathcal{O}$  (dado  $n$  hay un total de  $(2n - 1)!$  símbolos de superficie posibles), estas pueden dar lugar a la misma superficie. Por ejemplo, las palabras  $\mathcal{O} = c(a_1 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2)$  y  $\mathcal{O} = c(a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_1 a_2)$  dan lugar al toro pinchado, mientras que  $\mathcal{O} = c(a_1 \bar{a}_1 a_2 \bar{a}_2)$  y  $\mathcal{O} = c(\bar{a}_1 a_1 \bar{a}_2 a_2)$  dan lugar al cilindro pinchado. En general, dado un símbolo de superficie  $\mathcal{O}$ , si se intercambian los lados etiquetados con las letras  $a_i$  y  $\bar{a}_i$  para cualquier  $i$ , se habrá cambiado la palabra  $\mathcal{O}$  pero la superficie será la misma, ya que se identificaban los lados etiquetados con estas letras. Por otro lado si se eligen  $i$  y  $j$  y se intercambian  $a_i$  y  $\bar{a}_i$  por  $a_j$  y  $\bar{a}_j$  respectivamente, se obtiene la misma superficie a pesar de haber cambiado el símbolo de superficie.

Nos interesa ahora poder describir curvas en estas superficies, pero sin distinguir entre curvas homotópicas.

Notamos con  $\pi: P_{\mathcal{O}} \rightarrow \Sigma_{\mathcal{O}}$  la proyección y con  $E_{x_i}$  la proyección del lado etiquetado con  $x_i$ . Observemos que  $E_{x_i} = E_{\bar{x}_i}$ .

Un lazo en  $\Sigma_{\mathcal{O}}$  es una curva cerrada en  $\Sigma_{\mathcal{O}}$ .

Sea  $c$  en el interior de  $P_{\mathcal{O}}$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , sea  $q_i$  y  $s_i$  un par de puntos tal que  $\pi(q_i) = \pi(s_i)$ , y que  $q_i$  (resp.  $s_i$ ) este en el interior del lado etiquetado con  $a_i$

(resp.  $\bar{a}_i$ ). Notamos con  $a_i$  la clase de homopía del lazo que comienza en  $\pi(c)$ , sigue la proyección del segmento desde  $c$  hasta  $q_i$  y luego a lo largo de la proyección del segmento desde  $s_i$  hacia  $c$ . Entonces  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  es el conjunto de generadores del grupo fundamental de  $\Sigma_{\mathcal{O}}$ . Este último es un hecho conocido pero agregamos aquí una observación que permite entenderlo de una manera muy gráfica y más aún podemos caracterizar el grupo fundamental. Para demostrar la caracterización de estos grupos de homotopía de debe hacer uso del teorema de van Kampen.

**Observación 4.3.** ■ Si  $n = 0$  entonces la superficie asociada es el disco que, como es contractil, es homotópicamente nulo.

- Si  $n = 1$  entonces  $\mathcal{O} = c(a\bar{a})$ , la superficie que obtenemos es un cilindro, que es homotópicamente equivalente a un anillo y entonces resulta  $\pi_1 = \mathbb{Z}$ .
- Si  $2 \leq n$  entonces  $\ell(\mathcal{O}) = 2n$ , al pegar el lado  $a_i$  con el lado  $\bar{a}_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$  obtenemos una superficie homotópica a un bouquet de  $S^1$ 's, cuyo grupo fundamental es el grupo libre  $\underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n\text{-veces}}$  (ver el siguiente diagrama).

De esta manera, en cuanto a homotopía se refiera, resulta indistinto el orden en el cual aparezcan las letras de  $\mathcal{O}$  (es decir las superficies son homotópicas).

Podemos agregar también que todas estas superficies tienen grupo de homotopía no abeliano para todo  $2 \leq n$ .

En la siguiente figura mostramos como sería la situación cuando  $n = 2$ , pero para cualquier otra cantidad  $n$  de letras el procedimiento sería análogo.

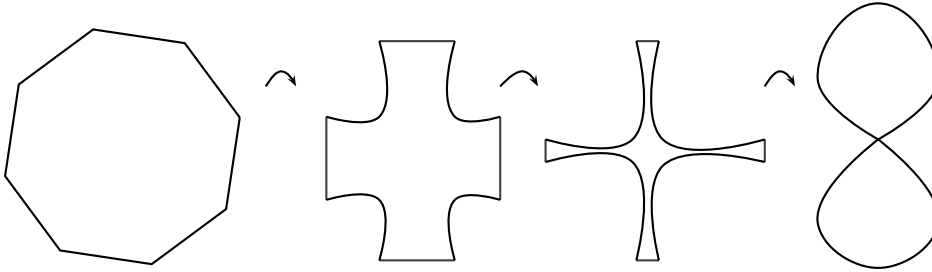


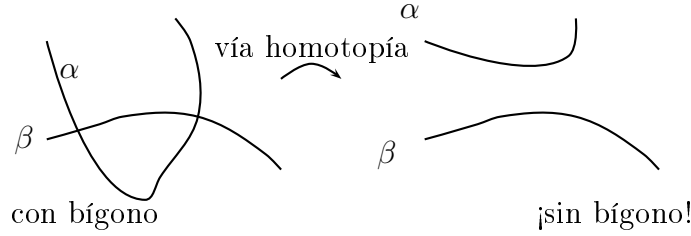
Figura 7: Los tres primeros diagramas son homotópicos y en el último identificamos las caras correspondientes a las letras  $a_i$  con  $\bar{a}_i$  y obtenemos una flor o bouquet de 2-pétalos cuyo  $\pi_1$  es  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Si repetimos el procedimiento con un polígono de  $4n$  lados o sea  $2n$  letras, obtendremos una flor o bouquet de  $n$ -pétalos (que por el teorema de van Kampen se puede probar) que tiene  $\pi_1 = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$  (donde  $*$  es el producto libre de los grupos, ver apéndice).

Una consecuencia de 4.2 y la observación anterior es la siguiente: una superficie de género  $g$  con  $n$  componentes de borde tiene grupo fundamental isomorfo al producto libre  $\underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{2g+n-1 \text{ veces}}$ .



Si  $\mathcal{W}$  es un palabra cíclica reducida en letras de  $\mathbb{A}_n$ , un lazo  $\alpha$  en  $\Sigma_{\mathcal{O}}$  es un **representante de  $\mathcal{W}$**  si  $\alpha$  es libremente homotópica a una curva  $\beta$  que pasa a través de  $c$  tal que la clase de homotopía (basada en  $c$ )  $\beta$  escrita en generadores  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  es un representante lineal de  $\mathcal{W}$ .

Una curva (con o sin borde)  $\beta$  (resp. un par de lazos  $\alpha, \beta$ ) en una superficie  $\Sigma$  tiene un **bígono** si existe un par de arcos  $u$  y  $v$  sub-arcos de  $\beta$  (resp.  $u$  sub-arco de  $\alpha$  y  $v$  sub-arco de  $\beta$ ), tal que los puntos extremos de  $u$  son los mismos que los puntos extremos de  $v$  y el lazo que resulta de recorrer primero a lo largo de  $u$  y después a lo largo de  $v$  es homotópicamente nula en  $\Sigma$ .



De ahora en adelante, cada vez que consideremos una palabra  $\mathcal{W} = c(x_0x_1x_2 \dots x_{m-1})$ , para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , notaremos con  $x_i$  la letra de  $\mathcal{W}$  con subíndice  $i$  módulo  $m$ . Esta convención también se aplica a otros objetos con subíndices.

Un **segmento** es una aplicación de un intervalo cerrado y acotado del eje real en la superficie. Si  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{s-1}$  es una sucesión de segmentos orientados de  $P_{\mathcal{O}}$  tal que para cada  $i \in \{0, 1, \dots, s-2\}$ , la proyección del punto final de  $A_i$  es igual a la proyección del punto inicial de  $A_{i+1}$ , entonces  $\pi(A_0)\pi(A_1) \dots \pi(A_{s-1})$  es un arco en  $\Sigma_{\mathcal{O}}$ . Escribiremos  $\pi(A_iA_{i+1} \dots A_{i+j})$  en vez de  $\pi(A_i)\pi(A_{i+1}) \dots \pi(A_{i+j})$ . Claramente, si el punto final de  $\pi(A_{s-1})$  es igual que el punto inicial de  $\pi(A_0)$  entonces  $\pi(A_0A_1 \dots A_{s-1})$  es un lazo.

En la siguiente definición se darán pautas generales para la construcción de curvas en los diagramas que definen superficies.

**Definición 4.4.** Sea  $\mathcal{W} = c(x_0x_1x_2 \dots x_{m-1})$  una palabra cíclica reducida y sea  $\alpha$  un representante de  $\mathcal{W}$ . Diremos que  $\alpha$  es un **representante segmentario de  $\mathcal{W}$**  si existe una sucesión de segmentos orientados  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$  en  $P_{\mathcal{O}}$  tal que  $\alpha = \pi(A_0A_1 \dots A_{m-1})$ , y

- (1) Para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ ,  $A_i$  es un arco orientado que comienza en el interior del lado etiquetado con  $\bar{x}_i$ , y termina en el interior del lado etiquetado con  $x_{i+1}$ .
- (2) Para cada  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ ,  $A_i$  interseca  $A_j$  a lo sumo un punto.
- (3) Los puntos finales de los arcos  $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$  son todos distintos.
- (4) No hay intersecciones triples entre los arcos  $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ .
- (5) Para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ , el interior de  $A_i$  esta contenido en el interior de  $P_{\mathcal{O}}$ .

□

En las siguientes figuras se detallan algunos ejemplos de representantes segmentarios de palabras cíclicas.

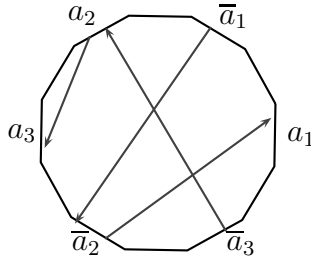


Figura 8:  $\mathcal{W} = c(a_1 \bar{a}_2 a_3 a_2)$  y  $\mathcal{O} = c(a_2 a_3 \bar{a}_2 \bar{a}_3 a_1 \bar{a}_1)$

**Ejemplo 4.5.** Considerando la palabra  $\mathcal{W} = c(a_1 \bar{a}_2 a_3 a_2)$  debemos trazar un segmento desde el lado etiquetado con la letra  $\bar{a}_1$  hasta el lado correspondiente a la letra  $\bar{a}_2$ , este segmento “aparece” en el lado etiquetado con la letra  $a_2$ , y de ahí parte otro segmento hacia el lado correspondiente a  $a_3$ , este “aparece” en  $\bar{a}_3$  y llega hasta  $a_2$ , y por último, desde  $\bar{a}_2$  hasta  $a_1$ , donde empezó. O sea, esta palabra cíclica da lugar a un lazo en la superficie.

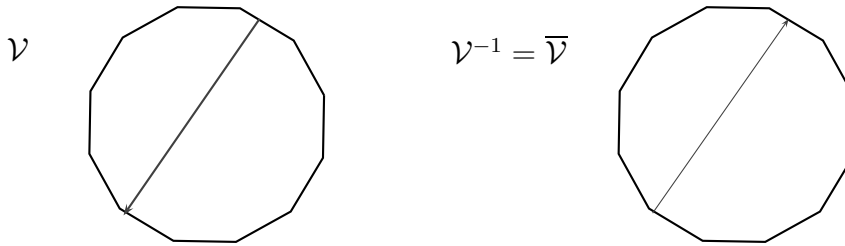
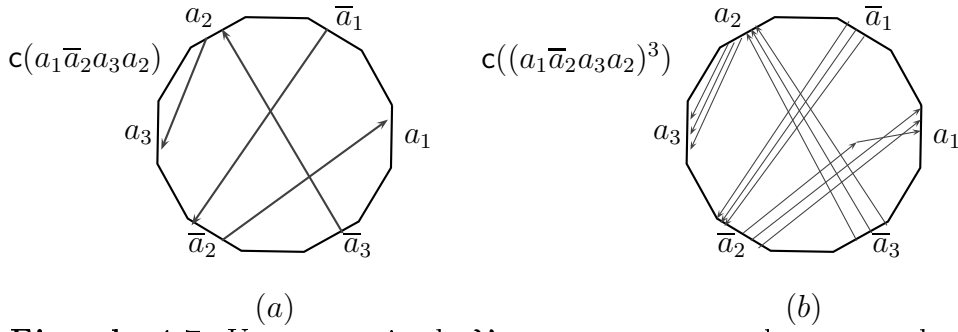


Figura 9:  $\mathcal{V}$  y  $\bar{\mathcal{V}}$  son “la misma curva” pero con sentido opuesto.

**Ejemplo 4.6.** Por cada subpalabra  $a_1 a_2$  de  $\mathcal{V}$  se tiene un segmento del lado etiquetado con  $\bar{a}_1$  hacia el lado etiquetado con  $a_2$ .

En  $\bar{\mathcal{V}}$  encontraremos  $\bar{a}_2 \bar{a}_1$ , que es el mismo segmento recorrido al revés, es decir va desde  $a_2$  hacia  $\bar{a}_1$ .

El siguiente lema caracteriza los representantes segmentarios de las palabras cíclicas con bígonos.



**Ejemplo 4.7.** Una potencia de  $\mathcal{V}$  es como enroscar la curva sobre sí misma, aquí graficamos un representante segmentario de una curva y del cubo de esa curva, también podemos notar que al enroscar aparecen “nuevos” puntos de autointersección, es decir algunos parecen copias de los que ya aparecían como puntos de autointersección de la curva y otros, “nuevos”, que (veremos más adelante) no serán detectados por pares linkeados.

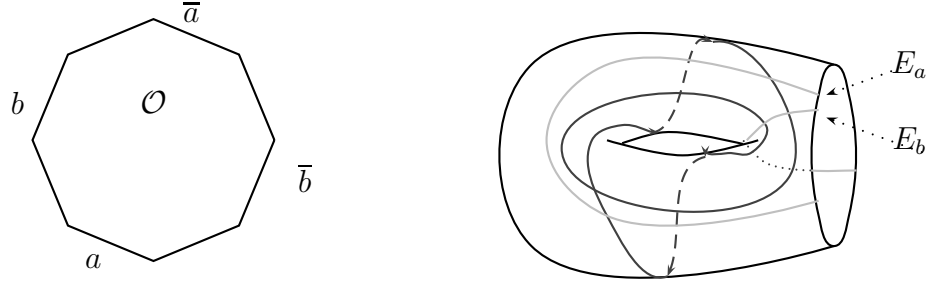


Figura 10: Un representante de  $\mathcal{V} = c(aabb)$ .

**Lema 4.8.** ([1] Lema 3.2) Sea  $\mathcal{W} = c(x_0 x_1 x_2 \dots x_{m-1})$  una palabra reducida y sea  $\alpha = \pi(A_0 A_1 \dots A_{m-1})$  un representante segmentario de  $\mathcal{W}$ . Entonces  $\alpha$  tiene un bígono si y sólo si existen  $i, j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ,  $j \neq i$ , y  $k \geq 0$  tal que vale alguna de las siguientes condiciones

- (1)  $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) \neq \emptyset$ ,  $\pi(A_{i+k}) \cap \pi(A_{j+k}) \neq \emptyset$  y para cada  $h \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ,  $\pi(A_{i+h}) \cap \pi(A_{j+h}) = \emptyset$ .
- (2)  $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) \neq \emptyset$ ,  $\pi(A_{i+k}) \cap \pi(A_{j-k}) \neq \emptyset$  y para cada  $h \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ,  $\pi(A_{i+h}) \cap \pi(A_{j-h}) = \emptyset$ .

En otras palabras lo que dice el lema anterior, es que si dos curvas se cruzan y después de la misma cantidad de pasos se vuelven a cruzar entonces encierran un bígono, independientemente de que vayan en la misma o contraria dirección. Más precisamente la opción (1) se refiere al caso en que ambas curvas tengan la misma dirección, mientras que el caso (2) trata la misma situación pero en el caso en el que las curvas tienen orientación opuesta.

**Proposición 4.9.** ([1] Proposición 3.3) Sea  $\mathcal{W} = \mathbf{c}(x_0x_1 \dots x_{m-1})$  una palabra cíclica reducida y primitiva. Entonces existe un representante segmentario  $\alpha = \pi(A_0A_1 \dots A_{m-1})$  de  $\mathcal{W}$  tal que  $\alpha$  no tiene bígonos.

**Proposición 4.10.** ([1] Proposición 3.4) Sea  $r \geq 1$  y sea  $\mathcal{W} = \mathbf{c}(y_0y_1 \dots y_{m-1})^r$  una palabra cíclica reducida tal que  $\mathbf{c}(y_0y_1 \dots y_{m-1})$  es primitiva. Entonces existe un representante segmentario de  $\mathcal{W}$ ,  $\alpha = \pi(A_0A_1 \dots, A_{mr-1})$  tal que para cada par  $i, j \in \{0, 1, \dots, mr-1\}$  las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (1)  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  e  $i \equiv j \pmod{m}$ .
- (2)  $i = j$  ó  $i = mr - 1$  ó  $j = mr - 1$ .

Más aún, todos los bígonos de  $\alpha$  tienen sus puntos extremos en las intersecciones de  $A_{mr-1}$  con  $A_{mj-1}$  para algún  $j \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ .

Gracias a estas dos últimas proposiciones podemos tomar representantes que no tengan bígonos, o que tengan una mínima cantidad de ellos. En la siguiente sección veremos que esto equivale a tomar un representante de una curva que tenga una mínima cantidad de puntos de autointersección.

En todos los diagramas que graficaremos en adelante tomaremos un representante segmentario sin bígonos (en el caso en que la palabra cíclica sea primitiva y reducida) o con una mínima cantidad de ellos (cuando la palabra no sea primitiva).

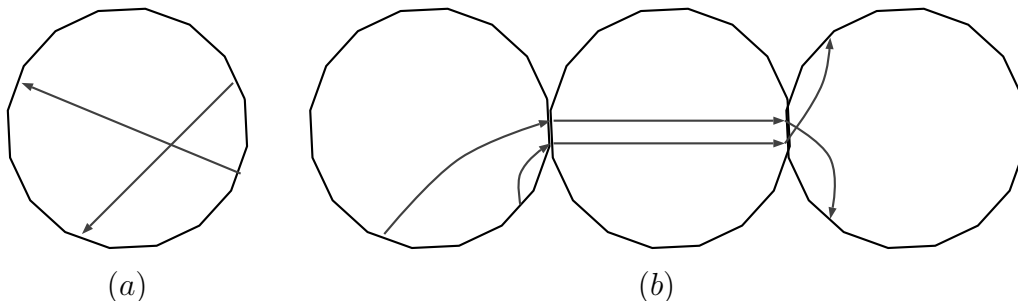
**Definición 4.11.** Una clase de homotopía es **simple** si tiene un representante simple, es decir, que no se autointerseca.  $\square$

Las clases de homotopía simples satisfacen ciertas propiedades que no son ciertas para el resto de las clases de homotopía. Por ejemplo si la clase de homotopía es simple entonces su cocorchete será 0. Mientras que hay clases no simples (que tampoco son potencia de una clase simple) con cocorchete 0.

## 5. Relación pares linkeados vs. puntos de intersección

En esta sección se analizarán la relación que guardan el conjunto de pares linkeados con el conjunto de puntos de intersección de una curva. Par esto se ha recopilado una serie de teoremas.

Comenzaremos con un diagrama para motivar la idea.



En la situación de la figura (a) es claro que se tiene un punto en la intersección de estos dos arcos. Si en cambio se observa el polígono de la Figura (b) que está a la izquierda no es claro que exista un punto en la intersección, continuamos entonces graficando la curva, en el segundo polígono sigue sin quedarnos claro si estas dos curvas se cortan. Continuamos entonces graficando la curva hasta que comience y termine en lados distintos, así sabremos si se intersecan los arcos o no. Esta es la idea que capturan los pares linkeados. Si el par  $(P, Q)$  verifica (1) en la definición de par linkeado estaremos en la situación de la figura (a). Si en cambio se observa la figura (b) se verifica la opción (2) de la definición de par linkeado.

La construcción del diagrama (b) será detallada más adelante.

**Definición 5.1.** Sean  $U$  y  $V$  un par de arcos de representantes segmentarios de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, tal que las palabras de las que provienen son  $x_i x_{i+1} \dots x_{i+j+1}$  e  $y_k y_{k+1} \dots y_{k+j+1}$  respectivamente ( $j \geq 0$ ). Más aún, asumamos que exactamente una de las siguientes condiciones sucede

- (1)  $x_i \neq y_j$ ,  $x_{i+j+1} \neq y_{k+j+1}$  y  $x_{i+1} x_{i+2} \dots x_{i+j} = y_{k+1} y_{k+2} \dots y_{k+j}$ .
- (2)  $x_i \neq \bar{y}_{k+j+1}$ ,  $x_{i+j+1} \neq \bar{y}_k$  y  $x_{i+1} x_{i+2} \dots x_{i+j} = \bar{y}_{k+j} \bar{y}_{k+j-1} \dots \bar{y}_{k+1}$ .

Diremos que  $\{U, V\}$  es un **par de arcos semiparalelo** en el caso (1) y **antiparalelo** en el caso (2).

□

Observar que el primer ítem de la definición anterior está relacionado con los pares linkeados tipo (1) o tipo (2) mientras que el segundo ítem está relacionado con los pares linkeados de tipo (3).

**Definición 5.2.** Sean  $\mathcal{V}$  una palabra cíclica primitiva y reducida de longitud  $m$ ,  $1 \leq r$  y sea  $\mathcal{W} = \mathcal{V}^r$ . Tomemos un representante segmentario de  $\mathcal{W}$  que no tenga bígono si

$r = 1$  (existe por la proposición 4.9) y que verifique las hipótesis de la proposición 4.10 si  $r \geq 1$  minimal. Sea  $r > 1$  y  $\alpha$  un representante segmentario de  $\mathcal{W}$  que tiene la mínima cantidad de puntos de autointersección. Notaremos con  $P_\alpha$  el conjunto de puntos de intersección de  $\pi(A_{r_{m-1}})$  con  $\pi(A_{k_{m-1}})$ , para  $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$  y notaremos con  $L_\alpha$  al conjunto de puntos de autointersección de  $\alpha$  que no estén en  $P_\alpha$ . Entonces el conjunto de puntos de autointersección de un representante segmentario minimal  $\alpha$  es la unión disjunta de  $P_\alpha$  y  $L_\alpha$ . Cuando  $r = 1$   $P_\alpha$  es vacío y por definición  $L_\alpha$  es el conjunto de puntos de autointersección.  $\square$

La definición anterior hace una importante distinción entre los puntos de intersección de una curva.

En el siguiente teorema podemos observar una notable relación entre uno de estos dos subconjuntos y el conjunto de pares de subpalabras linkeadas. Pero antes un lema previo.

**Lema 5.3.** ([1] Lema 3.7) *Sea  $\mathcal{W} = c(x_0x_1 \dots x_{m-1})$  una palabra cíclica reducida y sea  $\alpha$  un representante segmentario minimal de  $\mathcal{W}$ . Sea  $p$  un punto de autointersección de  $\alpha$ , tal que  $p \in L_\alpha$ . Entonces existe un único par de arcos semiparalelo de  $\alpha$ ,  $\{U, V\}$ , tal que  $p \in U \cap V$ . Más aún, si  $U = \pi(A_iA_{i+1} \dots A_{i+j})$  y  $V = \pi(A_kA_{k+1} \dots A_{k+j})$ , entonces  $0 \leq j \leq \ell(\mathcal{W}) - 1$  y existe un único  $u \in \{0, 1, \dots, j\}$  tal que  $p \in \pi(A_{i+u})$  y  $p \in \pi(A_{k+j-u})$  en el caso paralelo y  $p \in \pi(A_{k+j-u})$  en el caso antiparalelo.*

**Teorema 5.4.** ([1] Teorema 3.9) *Sea  $\mathcal{W} = c(x_0x_1 \dots x_{m-1})$  una palabra cíclica reducida en letras de  $\mathbb{A}_n$  y sea  $\alpha$  un representante segmentario minimal de  $\mathcal{W}$ . Entonces los puntos de autointersección de  $\alpha$  en  $L_\alpha$  están en correspondencia biunívoca con el conjunto de pares linkeados de  $\mathcal{W}$  de la forma  $\{(P, Q), (Q, P)\}$ .*

En la siguiente figura veremos una interpretación gráfica del teorema anterior para esto formalizaremos la idea usada en el diagrama del comienzo de esta sección.

Se asocia a cada palabra lineal  $x_i x_{i+1} \dots x_{i+j}$  una sucesión de copias de  $P_{\mathcal{O}}$  pegadas de la siguiente manera: se consideran  $j-1$  copias  $P_{\mathcal{O}}^1, P_{\mathcal{O}}^2, P_{\mathcal{O}}^3, \dots, P_{\mathcal{O}}^{j-1}$  del polígono  $P_{\mathcal{O}}$ . Sea  $S = (P_{\mathcal{O}}^1 \cup P_{\mathcal{O}}^2 \cup \dots \cup P_{\mathcal{O}}^{j-1}) / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia generada por los pares  $(y, z)$  para los cuales existe un  $h \in \{1, 2, \dots, j-1\}$  tal que  $y$  está en el lado de  $P_{\mathcal{O}}^{i+h-1}$  etiquetado con  $x_{i+h}$ ,  $z$  está en el lado de  $P_{\mathcal{O}}^{i+h}$  etiquetado con  $\bar{x}_{i+h}$  y  $\pi(y) = \pi(z)$ . Un  $S$  así se llama un **strip** de la palabra  $x_i x_{i+1} \dots x_{i+j}$ . Observemos que para cada  $h \in \{1, 2, \dots, j-1\}$ ,  $P_{\mathcal{O}}^h$  está embebido en  $S$ . Por lo tanto podemos pensar el polígono como un subconjunto de  $S$ . El morfismo  $P_{\mathcal{O}}^1 \cup P_{\mathcal{O}}^2 \cup \dots \cup P_{\mathcal{O}}^{j-1} \rightarrow \Sigma_{\mathcal{O}}$  que restringido a cada una de las copias de  $P_{\mathcal{O}}$  es la proyección  $\pi : S \rightarrow \Sigma_{\mathcal{O}}$ .

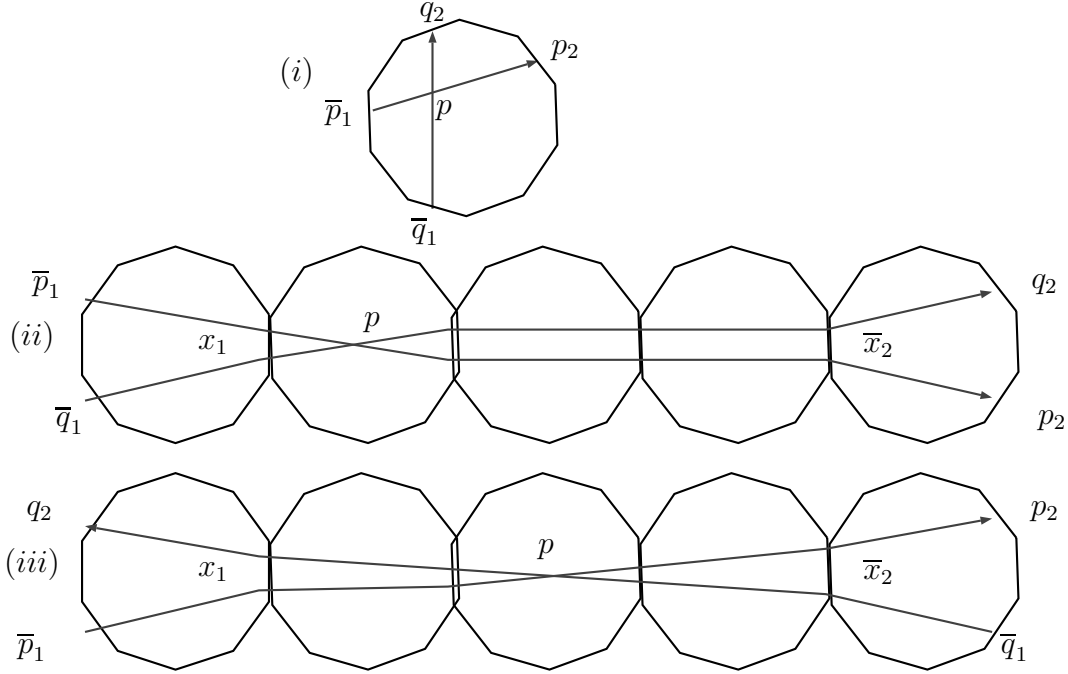
**Observación 5.5.** Por construcción, un representante segmentario minimal de una palabra cíclica primitiva  $\mathcal{W}$  tiene la mínima cantidad de puntos de autointersección en su clase de homotopía. Como consecuencia del teorema anterior se tiene que la cantidad mínima de puntos de autointersección es igual a la mitad del cardinal del conjunto de pares linkeados de  $\mathcal{W}$ .

En cambio si la palabra  $\mathcal{W}$  no es primitiva, o sea,  $\mathcal{W} = \mathcal{V}^n$  con  $\mathcal{V}$  primitiva, entonces el cardinal de los puntos de autointersección es el mismo que la mitad cardinal del conjunto de pares linkeados de  $\mathcal{W}$  más  $n - 1$  puntos provenientes de enroscar la curva  $n$  veces. O sea, estos últimos puntos de autointersección no serán detectados por pares linkeados.

**Teorema 5.6.** (*[1] Teorema 3.13*) Sean  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  dos palabras primitivas y reducidas. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  un buen par de representantes de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ . Entonces hay una correspondencia uno a uno entre los puntos de intersección de  $\alpha$  y  $\beta$ , y el conjunto de pares linkeados de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ .

Los últimos dos teoremas muestran la estrecha relación entre el conjunto de puntos de intersección entre dos curvas y el conjunto de pares linkeados, y por otro lado la relación entre puntos de autointersección de una curva con el conjunto de pares linkeados.

Veamos gráficamente, esta relación entre los pares linkeados y los puntos de intersección de una curva. Utilizaremos la definición 5.1 de pares de arcos semiparalelos y antiparalelos. La intención de este diagrama es mostrar el porqué de la definición de pares  $\mathcal{O}$ -linkeados.



- En (i) consideramos  $(P, Q)$  que verifica (1) en la definición 3.10 de par linkeado, o sea  $c(\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2) \neq 0$ , donde  $P = p_1p_2$  (o sea, hay un arco que sale de  $\bar{p}_1$  y va hacia  $p_2$ ) y  $Q = q_1q_2$  (o sea, hay un arco de  $\bar{q}_1$  hacia  $q_2$ ). Es decir que podemos encontrar las letras  $\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2$  respetando la orientación de  $\mathcal{O}$  o invirtiéndola. Cada vez que suceda, como se ve en la figura, tendremos un punto de intersección.
- En (ii) tomamos  $(P, Q)$  que verifica (2) en la definición de par linkeado, donde  $P = p_1x_1\chi x_2p_2$  y  $Q = q_1x_1\chi x_2q_2$ . Para asegurar que estas curvas se cruzan, dado que empiezan en lados distintos, siguen “paralelas”, y salen por lados distintos, hay que pedir que el orden de las letras  $\bar{p}_1\bar{q}_1x_1$  y  $p_2q_2\bar{x}_2$  sea el mismo, y esto era justamente la definición 3.10 (2).
- En (iii) tomamos  $(P, Q)$  que verifica (3) en la definición de par linkeado, donde  $P = p_1x_1\chi x_2p_2$  y  $Q = q_1\bar{x}_2\bar{\chi}\bar{x}_1q_2$ . O sea una curva va en una dirección y la otra en dirección contraria. Otra vez para que se crucen (o sea para que exista un punto de intersección) hay que pedir que el orden de las letras  $q_2\bar{p}_1x_1$  y  $\bar{q}_1p_2\bar{x}_2$  sea el mismo, es decir se verifique 3.10 (3).

Este análisis vale tanto para subpalabras de una misma palabra, es decir, para dos arcos de un mismo lazo, como para subpalabras de dos palabras distintas, es decir arcos de dos lazos distintos.



## 6. Definición combinatoria del cocorchete

Esta sección está dedicada a la definición combinatoria del cocorchete como lo hace Chas en [1]. Sin embargo cada vez que se muestre un ejemplo se lo resolverá de ambas maneras, geométrica y combinatoriamente. De esta manera obtendremos una visión global del problema y su solución.

Notaremos con  $\mathbb{V}$  al espacio vectorial generado (formalmente) por las palabras no vacías y reducidas en letras de  $\mathbb{A}_n$ . Observar que si  $n \geq 2$  la dimensión de este espacio vectorial es  $\chi_0$ .

Se define un coproducto en  $\mathbb{V}$ , como el morfismo lineal  $\delta: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$  que satisface ciertas identidades.

Para esto se necesitan algunas definiciones previas que aquí se detallan.

A cada par ordenado  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{W})$  asociamos dos palabras cíclicas  $\delta_1(P, Q) = c(W_1)$  y  $\delta_2(P, Q) = c(W_2)$  de la siguiente manera:

- (I) Asumiendo que se cumple (1) o (2) de la Definición 3.10. Se realizan dos cortes en  $\mathcal{W}$ , uno inmediatamente antes de  $p_2$  y el otro inmediatamente antes de  $q_2$ . Se obtienen así dos palabras lineales  $W_1$  y  $W_2$ , la primera, comienza con  $p_2$ , la última, comienza con  $q_2$ .
- (II) Si la condición (3) es la que se cumple, sea  $W_1$  la subpalabra lineal de  $\mathcal{W}$  que comienza con  $p_2$  y termina con  $q_1$ , y sea  $W_2$  la subpalabra lineal de  $\mathcal{W}$  que comienza con  $q_2$  y termina en  $p_1$ .

Los siguientes lemas son de gran importancia ya que permitirán la buena definición del coproducto en  $\mathbb{V}$ .

**Lema 6.1.** ([1] Lema 2.4) *Sea  $\mathcal{W}$  una palabra cíclica reducida. Para cada  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{W})$ , las palabras lineales  $W_1$  y  $W_2$  de la definición anterior son disjuntas en  $\mathcal{W}$ . Más aún,  $W_1$  y  $W_2$  son no vacías y podemos escribir  $\mathcal{W} = c(W_1W_2)$  en el caso en que el par verifique (I) en la definición 3.10 y  $\mathcal{W} = c(YW_1\bar{Y}W_2)$  si el par verifica (II) en 3.10.*

**Lema 6.2.** ([1] Proposición 2.5) *Sea  $\mathcal{W}$  una palabra cíclica reducida y sea  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{W})$  un par linkeado. Entonces  $\delta_1(P, Q)$  y  $\delta_2(P, Q)$  son palabras cíclicas reducidas. Más aún,  $\delta_1(P, Q)$  y  $\delta_2(P, Q)$  son no vacías.*

Se asocia a cada par linkeado  $(P, Q)$  un signo de la siguiente manera:

$$\text{sign}(P, Q) = \begin{cases} o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2)) & \text{si } (P, Q) \text{ satisface la Definición 3.10 (1).} \\ o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1x_1)) & \text{si } (P, Q) \text{ satisface la Definición 3.10 (2).} \\ o(c(q_2\bar{p}_1x_1)) & \text{si } (P, Q) \text{ satisface la Definición 3.10 (3).} \end{cases}$$

**Lema 6.3.** ([1] Lema 2.7) Sea  $\mathcal{W}$  una palabra cíclica,  $P$  y  $Q$  subpalabras de  $\mathcal{W}$ . Entonces se tiene que:

- (1) Para cada par linkeado  $(P, Q)$ ,  $\text{sign}(P, Q) = 1$  ó  $\text{sign}(P, Q) = -1$ .
- (2) Si  $(P, Q)$  es un par linkeado  $(Q, P)$  es también un par linkeado. Más aún,  $\text{sign}(P, Q) = -\text{sign}(Q, P)$ .

*Demostración.* Una demostración de (1) se puede encontrar en [1].

Probemos (2) por casos.

- $(P, Q)$  verifica (1) en la definición de par linkeado con  $P = p_1p_2$  y  $Q = q_1q_2$  si y sólo si  $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1p_2q_2)) \neq 0$ .

$(Q, P)$  verifica (1) si y sólo si  $o(c(\bar{q}_1\bar{p}_1q_2p_2)) \neq 0$ .

Entonces, como el orden entre las letras es inverso, si uno fuese 1 el otro será -1, y viceversa.

- $(P, Q)$  verifica (2) con  $P = p_1Yp_2$  y  $Q = q_1Yq_2$  si y sólo si  $o(c(\bar{p}_1\bar{q}_1x_1)) = o(c(p_2q_2\bar{x}_2))$ .  $(Q, P)$  verifica (2) si y sólo si  $o(c(\bar{q}_1\bar{p}_1x_1)) = o(c(q_2p_2\bar{x}_2))$ . También se puede observar que el orden está invertido.

- Por último,  $(P, Q)$  verifica (3) con  $P = p_1Yp_2$  y  $Q = q_1\bar{Y}q_2$  si y sólo si  $o(c(q_2\bar{p}_1x_1)) = o(c(\bar{q}_1p_2\bar{x}_2))$ .

Antes de seguir recordemos que si  $Y = x_1Xx_2$  entonces  $\bar{Y} = \bar{x}_2\bar{X}\bar{x}_1$ .

$(Q, P)$  verifica (3) si y sólo si  $o(c(p_2\bar{q}_1\bar{x}_2)) = o(c(\bar{p}_1q_2\bar{x}_2))$ . Que también verifica que el orden está invertido.

■

Ahora, usando las definiciones anteriores de  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , se define el cocorchete:

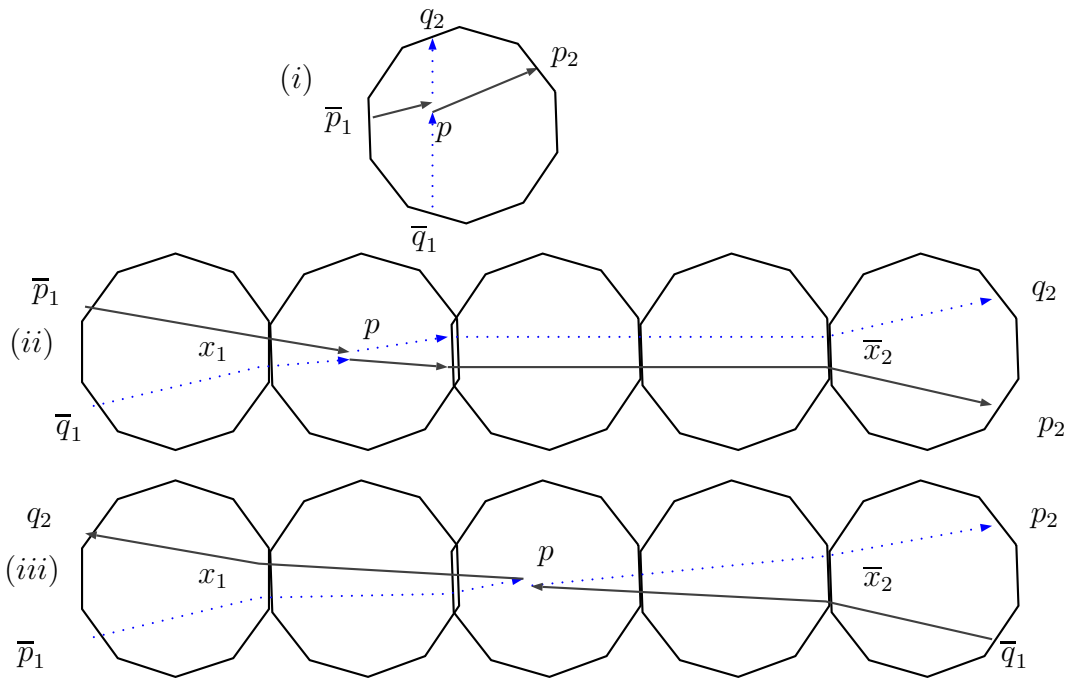
**Definición 6.4.** Llamaremos cocorchete  $\delta: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$  a la aplicación lineal tal que para toda palabra cíclica reducida  $\mathcal{W}$ ,

$$\delta(\mathcal{W}) = \sum_{(P,Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{W})} \text{sign}(P, Q) \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q).$$

□

Por definición, el conjunto  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{W})$  es finito, y por el lema 6.2,  $\delta(\mathcal{W})$  está bien definido.

En la siguiente figura podemos observar como el cocorchete “separa” la curva en dos por cada punto de autointersección detectado por cada par  $(P, Q)$   $\mathcal{O}$ -linkeado.



Veamos caso por caso cual es la función que cumple el cocorchete aplicado a una curva  $\mathcal{W}$ . Es decir, puesto que para cada par  $(P, Q)$   $\mathcal{O}$ -linkeado,  $\delta_1(P, Q)$  y  $\delta_2(P, Q)$ , están definidos de manera diferente, separaremos nuestro análisis en las tres opciones que tiene este par por ser linkeado.

- Si el par verifica (1) en la definición 3.10 entonces  $\delta_1(P, Q)$  y  $\delta_2(P, Q)$  son las curvas correspondientes al diagrama (i), dependiendo la orientación de la palabra  $\mathcal{O}$  y el signo del par podremos saber cual corresponde a  $\delta_1(P, Q)$  y cual a  $\delta_2(P, Q)$ . Observar que si la curva original tenía un punto de autointersección, después de “cortar y pegar” de esta forma, las curvas resultantes ya no se cortan en ese punto.
- Si el par verifica (2) en la definición 3.10, entonces vale el análisis anterior pero observando el diagrama (ii).
- Si el par verifica (3) en la definición 3.10, lo que sucede es que la curva tiene dos arcos que van “paralelos” pero con direcciones opuestas (o sea un par de arcos antiparalelos). En este caso  $\delta_1(P, Q)$  y  $\delta_2(P, Q)$  no son exactamente las curvas representadas en el diagrama (iii) por el siguiente motivo:  $\delta_1(P, Q)$  y  $\delta_2(P, Q)$  son palabras cíclicas reducidas, y si observamos el diagrama, las palabras que representarían a estas curvas no lo serían. Lo que si es cierto es que si se escriben las palabras correspondientes al diagrama y reducimos, es decir, cada vez que se encuentren juntas las letras  $a_i$  y  $\bar{a}_i$  estas se eliminan de la palabra, entonces encontraremos  $\delta_1(P, Q)$  y  $\delta_2(P, Q)$ . Es decir hubiese bastado con el primer y el último de los polígonos. Como antes, para saber cual corresponde a  $\delta_1(P, Q)$  y cual a  $\delta_2(P, Q)$  hay que tener en cuenta el signo del par y la orientación de la palabra cíclica  $\mathcal{O}$ .

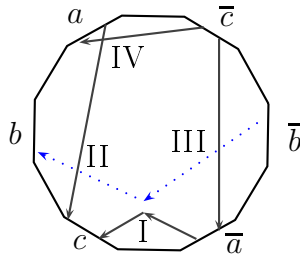


Figura 11: Términos asociados a  $I$ .

**Ejemplo 6.5.** Sea  $\mathcal{O} = c(abc\bar{a}\bar{b}\bar{c})$  y  $\mathcal{V} = c(abc\bar{a}c)$ . Queremos calcular  $\delta(\mathcal{V})$  para esto buscamos pares linkeados (hay 8 ya que la curva tiene 4 puntos de autointersección como se observa en la Figura). Haciendo una lista completa con todas las subpalabras posibles, encontramos 6 pares de tipo (1) y 2 pares de tipo (3):

- $(P, Q) = (ab, bc)$  que tiene signo positivo y da lugar a  $\delta_1(P, Q) = c(b)$ ,  $\delta_2(P, Q) = c(\bar{c}\bar{a}ca)$  y el simétrico  $(Q, P)$ . Ver (I).
- $(P, Q) = (ab, \bar{a}c)$  que tiene signo negativo y da lugar a  $\delta_1(P, Q) = c(bc\bar{a})$ ,  $\delta_2(P, Q) = c(ca)$  y su simétrico  $(Q, P)$ . Ver (II).
- $(P, Q) = (bc, \bar{c}\bar{a})$  de signo positivo que da lugar a  $\delta_1(P, Q) = c(c)$ ,  $\delta_2(P, Q) = c(\bar{a}\bar{c}ab)$ , y su simétrico  $(Q, P)$ . Ver (III)
- $(P, Q) = (cab, \bar{c}\bar{a}c)$  de signo positivo y resulta  $\delta_1(P, Q) = c(bc)$ ,  $\delta_2(P, Q) = c(c)$ , y claro su simétrico  $(Q, P)$ . Ver (IV).

Así obtenemos

$$\delta(\mathcal{V}) = \underbrace{c(b) \otimes c(\bar{c}\bar{a}ca) - c(\bar{c}\bar{a}ca) \otimes c(b)}_{\text{por I}} + \underbrace{c(bc\bar{a}) \otimes c(ca) - c(ca) \otimes c(bc\bar{a})}_{\text{por II}} +$$

$$\underbrace{c(c) \otimes c(\bar{a}\bar{c}ab) - c(\bar{a}\bar{c}ab) \otimes c(c)}_{\text{por III}} + \underbrace{c(bc) \otimes c(c) - c(c) \otimes c(bc)}_{\text{por IV}}$$

Ahora veamos como sería verlo con la definición de la sección 2:

Empezemos descomponiendo la curva a partir del punto de autointersección indicado con el número  $I$ . De este punto salen dos arcos, debemos ordenarlos de tal manera que definan la misma orientación de la superficie, es decir el arco que sale de  $I$  y llega al lado etiquetado con la letra  $b$  es el primero (en el diagrama ver curva de color azul) seguimos la curva hasta volver al punto original. Luego recorreremos el resto de la curva pero comenzando con el otro arco. El término correspondiente a estas curvas lleva signo positivo. Análogamente, eligiendo el orden contrario en los arcos salientes de  $I$  obtendremos el segundo término del desarrollo correspondiente a este punto.

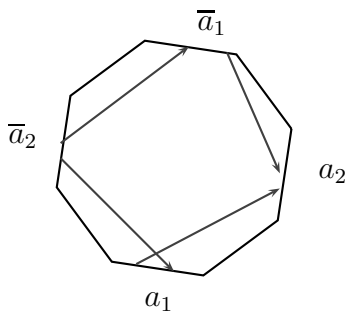
De la misma manera descompondremos la curva por cada uno de los puntos restantes.

Es claro que si la curva no se autointerseca, entonces,  $\delta(\mathcal{V}) = 0$ . Esto motivó a Turaev a preguntarse si la recíproca de esta implicación era verdadera. El resultado es que esto no es cierto, y aquí transcribimos un ejemplo (que le debemos a Chas):

**Ejemplo 6.6.** Sean  $\mathcal{O} = c(a_1 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2)$  y  $\mathcal{V} = c(a_1 a_2 \bar{a}_1 a_2)$ .

Los únicos pares linkeados son  $(P, Q) = (a_2 \bar{a}_1 a_2, a_2 a_1 a_2)$  y su simétrico  $(Q, P)$  ambos de tipo (3).

Entonces  $\delta(\mathcal{V}) = c(a_2) \otimes c(a_2) - c(a_2) \otimes c(a_2) = 0$ , pero si se observa el diagrama esta curva tiene un punto de autointersección.



Al calcular  $\delta(\mathcal{V}^2)$  veremos más adelante con la ayuda de una fórmula general que este no dará como resultado 0.



## 7. Definición combinatoria del corchete

Siguiendo con la versión combinatoria, describiremos en esta sección una nueva aplicación, llamada corchete, sobre el espacio vectorial de las palabras cíclicas. Como en la sección anterior, cada vez que se muestre un ejemplo, se lo resolverá combinatoria y geoméricamente.

Dadas  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  dos palabras cíclicas, elegimos un par de letras consecutivas en cada palabra. Haciendo un corte entre cada par de de estos pares de letras, se obtienen dos palabras lineales,  $V_1$  y  $W_1$ . La palabra lineal  $V_1W_1$  determina una palabra cíclica,  $c(V_1W_1)$  (posiblemente no reducida). En otras palabras, un par de cortes en un par de palabras cíclicas determina una tercer palabra cíclica. Con esta idea se define el corchete, sólo resta dejar claro como obtener esta tercer palabra cíclica.

Copiando la idea de  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$ , dadas dos palabras cíclicas  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ , definiremos un conjunto (en realidad un multiset), que contendrá todos los pares  $(P, Q)$  tales que  $P$  sea subpalabra de una potencia natural de  $\mathcal{V}$  y  $Q$  subpalabra de una potencia natural de  $\mathcal{W}$ , de forma tal que el par sea linkeado. A este multiset lo notaremos  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ .

Aquí un ejemplo que muestra la necesidad de tomar subpalabras de potencias naturales de las palabras.

**Ejemplo 7.1.** ([1]) Si consideramos el alfabeto  $\mathbb{A}_2 = \{a_1, a_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2\}$  y se define  $\mathcal{O} = a_1a_2\bar{a}_1\bar{a}_2$ . Sea  $\mathcal{V} = a_1a_1a_2$ ,  $\mathcal{W} = a_1a_1a_2a_1a_1a_2a_1$ ,  $P = a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_2$  y  $Q = a_1a_1a_1a_2a_1a_1a_2a_1a_1a_1$ . Entonces  $(P, Q)$  es un par  $\mathcal{O}$ -linkeado. Donde  $P$  es una subpalabra de  $\mathcal{V}^4$  pero no una subpalabra de  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}^2$  ni  $\mathcal{V}^3$ . Análogamente,  $Q$  es una subpalabra de  $\mathcal{W}^2$  pero no una subpalabra de  $\mathcal{W}$ .

**Definición 7.2.** Para cada par de palabras cíclicas reducidas,  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ , se define el **multiset de pares linkeados de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$** ,  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ , como el conjunto de todos los pares  $(P, Q)$  para los cuales existe un par de enteros no negativos  $j$  y  $k$  tal que  $P$  es una subpalabra de  $\mathcal{V}^j$ ,  $Q$  es una subpalabra de  $\mathcal{W}^k$ , donde  $\ell(\mathcal{V}^{j-1}) < \ell(P) \leq \ell(\mathcal{V}^j)$  y  $\ell(\mathcal{W}^{k-1}) < \ell(Q) \leq \ell(\mathcal{W}^k)$ . (Aquí, definimos  $\ell(\mathcal{V}^0) = \ell(\mathcal{W}^0) = 0$ .) Siempre contando cada par con la multiplicidad con la que aparezca.  $\square$

La definición de  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  no implica trivialmente que este conjunto sea finito. Sin embargo es un hecho que  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  es un conjunto finito, y su cardinal será acotado en la siguiente proposición. Otro tema relacionado con pares linkeados formados por subpalabras de potencias de palabras cíclicas, es si la longitud de estas subpalabras esta acotado.

**Proposición 7.3.** ([1] Proposición 2.9) Sean  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  dos palabras cíclicas reducidas. Entonces existen a lo sumo  $\ell(\mathcal{V}) \cdot \ell(\mathcal{W})$  elementos en  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ .

**Lema 7.4.** ([1] Proposición 2.12) Sean  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  dos palabras cíclicas que no son potencia de la misma palabra cíclica y sean  $P$  una palabra lineal. Sean  $k, l$  un par de enteros

no negativos tales que  $P$  es una subpalabra de  $\mathcal{V}^k$  y tanto  $P$  o  $\bar{P}$  es una subpalabra de  $\mathcal{W}^l$ . Más aún, asumamos que  $(k-1)\ell(\mathcal{V}) < \ell(P)$  y  $(l-1)\ell(\mathcal{W}) < \ell(P)$ . Entonces  $\ell(P) < \ell(\mathcal{V}) + \ell(\mathcal{W})$ .

La siguiente proposición nos permite acotar la búsqueda de subpalabras de potencias naturales de palabras cíclicas.

**Proposición 7.5.** ([1] Proposición 2.13) Sean  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  dos palabras cíclicas. Entonces  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  es el conjunto de pares linkeados  $(P, Q)$  tal que:

- $P$  es una subpalabra de  $\mathcal{V}^j$ ,  $Q$  es una subpalabra de  $\mathcal{W}^k$ ,
- $\ell(\mathcal{V}^{j-1}) < \ell(P) \leq \ell(\mathcal{V}^j)$ ,  $\ell(\mathcal{W}^{k-1}) < \ell(Q) \leq \ell(\mathcal{W}^k)$  donde  $j, k$  son enteros positivos con  $j < 2 + \frac{\ell(\mathcal{W})}{\ell(\mathcal{V})}$  y  $k < 2 + \frac{\ell(\mathcal{V})}{\ell(\mathcal{W})}$ .

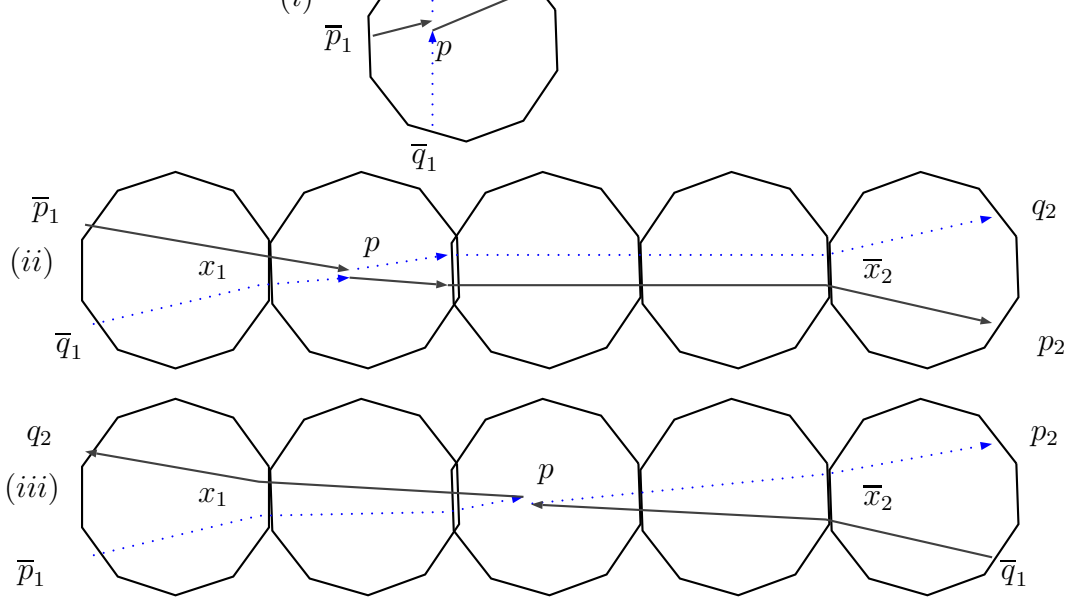
Nos dirigimos a definir el corchete, para esto tenemos que decidir como cortar y pegar las palabras  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{Z}$  y así obtener una nueva palabra cíclica reducida.

**Definición 7.6.** Se asocia a cada par  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$  una palabra cíclica  $\gamma(P, Q) = c(W_1 Z_1)$ , donde  $W_1$  y  $Z_1$  son palabras lineales definidas como sigue.

- (I) Si se verifican las condiciones (1) o (2) de la Definición 3.10 para el par  $(P, Q)$ ,  $W_1$  es el representante lineal de  $\mathcal{W}$  que se obtiene al cortar  $\mathcal{W}$  inmediatamente antes de  $p_2$  y  $Z_1$  es el representante de  $\mathcal{Z}$  que se obtiene al cortar  $\mathcal{Z}$  inmediatamente antes  $q_2$  (no confundir representante lineal de la palabra con representante lineal de una potencia de la palabra).
- (II) Si se verifica la condición (3) de la Definición 3.10 para el par  $(P, Q)$ . Entonces  $W_1$  es la palabra lineal de  $\mathcal{W}$  que empieza justo después del final de  $Y$  y termina justo antes de la primer letra de  $Y$ , por otro lado  $Z_1$  es la subpalabra de  $\mathcal{Z}$  que empieza justo después de la última letra de  $\bar{Y}$  y termina justo antes del comienzo de  $\bar{Y}$ . (Se puede observar que  $Y$  puede no ser una subpalabra de  $\mathcal{W}$  ni de  $\mathcal{Z}$ , pero siempre se pueden encontrar la primera y la última letra de  $Y$  en  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{Z}$ ).

□





Esta vez, dado que hay dos curvas en juego, identificaremos una curva con línea de puntos y la otra con línea llena.

Como antes, el diagrama (i) corresponde a un par  $(P, Q)$  que verifica 3.10 (1), (ii) a un par que verifica (2), y (iii) que verifica (3). Por cada par  $\mathcal{O}$ -linkeado, es decir, por cada punto de intersección entre estas curvas, obtendremos una nueva curva que partiendo del punto intersección, recorre toda una curva, sin tocar el punto intersección recorre la otra y vuelve al punto de inicio. En otras palabras, recorre ambas curvas de forma tal que no se crucen en el punto original. Esto lo hace para cada par  $\mathcal{O}$ -linkeado.

**Proposición 7.7.** ([1] Proposición 2.15) Para cada par de palabras cíclicas reducidas  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{Z}$ , y para cada par linkeado  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$ ,  $\gamma(P, Q)$  es cíclicamente reducida. En particular,  $\gamma(P, Q)$  es no vacía.

La proposición anterior permitirá la buena definición del corchete.

**Definición 7.8.** Se define el corchete  $[\cdot, \cdot]: \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$  como la aplicación lineal tal que a cada par de palabras cíclicas,  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{Z}$ ,

$$[\mathcal{W}, \mathcal{Z}] = \sum_{(P, Q) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})} \text{sign}(P, Q) \gamma(P, Q).$$

□

Como hemos visto anteriormente,  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  es finito y así el corchete está bien definido.

Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 7.9.** Dadas las siguientes palabras  $\mathcal{O} = c(a_1 a_2 a_3 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3)$ ,  $\mathcal{W} = c(a_1 a_2 a_3)$  y  $\mathcal{V} = c(a_2 a_1)$ . Entonces los pares linkeados son  $(a_2 a_3, a_1 a_2)$  de signo negativo y tipo (1), y  $(a_3 a_1 a_2 a_3, a_2 a_1 a_2 a_1)$  de tipo (2) y signo negativo.

Entonces se tiene  $[\mathcal{W}, \mathcal{V}] = -c(a_3 a_1 a_2 a_2 a_1) - c(a_3 a_1 a_2 a_1 a_2)$ .

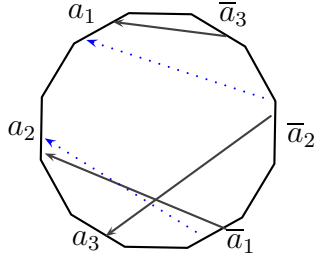


Figura 12:  $\mathcal{O} = c(a_1 a_2 a_3 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3)$ ,  $\mathcal{W} = c(a_1 a_2 a_3)$  y  $\mathcal{V} = c(a_2 a_1)$ .

Resumiendo, en el espacio vectorial  $\mathbb{V}$  tenemos definidos un corchete y un corchete. Resulta además, como consecuencia inmediata de la siguiente proposición, que  $(\mathbb{V}, [, ], \delta())$  es una biálgebra. Más aún esta biálgebra es involutiva es decir  $[, ] \circ \delta = 0$ .

**Proposición 7.10.** ([1] Proposición 4.1) Para cada  $\mathcal{W}, \mathcal{V} \in \mathbb{V}$  se tiene que  $\delta(\mathcal{W}) = \Delta(\mathcal{W})$  y  $[\mathcal{W}, \mathcal{V}] = \langle \mathcal{W}, \mathcal{V} \rangle$ .

Reproducimos aquí una demotración de este hecho:

*Demostración.* Se probará que  $\delta(\mathcal{V}) = \Delta(\mathcal{V})$ . Escribimos  $\mathcal{V} = \mathcal{W}^r$  donde  $\mathcal{W}$  es una palabra cíclica reducida y primitiva. Sea  $\alpha$  un representante segmentario minimal de  $\mathcal{V}$  y sea  $S$  el conjunto de puntos de autointersección de  $\alpha$ .

Recordemos que  $S$  es una unión disjunta de los conjuntos  $I_\alpha$  y  $P_\alpha$  donde  $P_\alpha$  es el conjunto de puntos de intersección de  $A_{rm}$  con  $A_{km}$ , para  $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ . Habíamos visto anteriormente que  $I_\alpha$  está en correspondencia biunívoca con el conjunto de pares linkeados de  $\mathcal{W}$  de la forma  $\{(P, Q), (Q, P)\}$ . Para cada  $q \in S$ , si  $\mathcal{V}_1^q$  y  $\mathcal{V}_2^q$  son como en la sección 2, entonces

$$\Delta(\mathcal{V}) = \sum_{q \in S} \mathcal{V}_1^q \otimes \mathcal{V}_2^q - \mathcal{V}_2^q \otimes \mathcal{V}_1^q.$$

Por definición de  $P_\alpha$ ,

$$\sum_{q \in P_\alpha} \mathcal{V}_1^q \otimes \mathcal{V}_2^q - \mathcal{V}_2^q \otimes \mathcal{V}_1^q = \sum_{i=1}^{r-1} \mathcal{W}^i \otimes \mathcal{W}^{r-i} - \mathcal{W}^{r-i} \otimes \mathcal{W}^i = 0.$$

Consideramos  $p \in I_\alpha$  y sea  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  un par linkeado correspondiente a  $p$ . Si  $\text{sign}(P, Q) = 1$  entonces  $\mathcal{W}_1^p = \delta_1(P, Q)$  y  $\mathcal{W}_2^p = \delta_2(P, Q)$  y si  $\text{sign}(P, Q) = -1$  entonces  $\mathcal{W}_1^p = \delta_2(P, Q)$  y  $\mathcal{W}_2^p = \delta_1(P, Q)$ . Entonces

$$\Delta(\mathcal{V}) = \sum_{q \in S_\mathcal{O}} \mathcal{W}_1^q \otimes \mathcal{W}_2^q - \mathcal{W}_2^q \otimes \mathcal{W}_1^q = \delta(\mathcal{V}).$$

La prueba de  $[\mathcal{V}, \mathcal{W}] = \langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle$  es análoga. ■

Es claro que si dos curvas  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  no se intersecan entonces  $[\mathcal{V}, \mathcal{W}] = 0$ , pero no vale la vuelta. Hay ejemplos de curvas que si se intersecan y su corchete es 0.

**Teorema 7.11.** [1] Sean  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  dos palabras cíclicas reducidas y tal que  $\mathcal{V}$  tiene un representante simple que no es homólogo a cero. Entonces existe dos representantes  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  respectivamente tal que el corchete de  $\mathcal{V}$  con  $\mathcal{W}$  calculado en base a los puntos de intersección de  $\alpha$  y  $\beta$  no tiene cancelación. En otras palabras, la cantidad de términos (contados con multiplicidad) de  $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$  es igual a la cantidad mínima de puntos en la intersección de representantes de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ .



## 8. Cocorchete de una potencia de una palabra cíclica

La relación entre la operación corchete y la operación potencia fue investigada por Chas y Krongold en [4] cambiando la descripción combinatoria por otra que hace referencia a la geometría hiperbólica. Aquí proponemos una fórmula en términos de la descripción combinatoria original, no sólo del corchete sino también del cocorchete. Estas dos secciones son la parte principal de esta tesis.

Comenzaremos describiendo  $\delta(\mathcal{W}^n)$  para cualquier entero  $n$  en términos de  $\delta(\mathcal{W})$ ; en la próxima sección haremos lo propio con el corchete de potencias de dos palabras cíclicas.

Uno de los intereses al querer calcular el cocorchete y corchete de potencias de una palabra cíclica, está fundado en la conjetura que proponen Krongold y Chas en [4] (Conjetura 5.1) que dice lo siguiente:

Sea  $\mathcal{V}$  una palabra cíclica primitiva, entonces  $\mathcal{V}$  contiene un representante simple si y sólo si vale uno de los siguientes items:

- (1)  $\delta(\mathcal{V}^p) = 0$  para todo entero  $p$ .
- (2)  $\delta(\mathcal{V}^p) = 0$  para algún entero  $p \notin \{-1, 0, 1\}$ .
- (3)  $[\mathcal{V}^p, \mathcal{V}^q] = 0$  para todo par de enteros  $p$  y  $q$ .
- (4)  $[\mathcal{V}^p, \mathcal{V}^q] = 0$  para cualquier par de enteros distintos  $p$  y  $q$  tal que  $|p| \geq 3$  o  $|q| \geq 3$ .
- (5)  $[\mathcal{V}, \mathcal{V}^q] = 0$  para algún entero  $q \in \{-2, -1, 2\}$ .

Estas conjeturas refinan la pregunta que se realizó Turaev cuando descubre el cocorchete. Recordar que si  $\mathcal{V}$  tiene un representante simple entonces  $\delta(\mathcal{V}) = 0$ , en un momento Turaev se preguntó si esta sería una caracterización de (clases con un representante de) curvas simples. Chas encontró un contraejemplo con  $\delta(\mathcal{V}) = 0$  pero  $\mathcal{V}$  no simple (ver 6.6). En este ejemplo  $\delta(\mathcal{V}^2) \neq 0$ . Con lo cual tiene el item (2) con  $p = 2$ .

Esto induce las siguientes preguntas para las que todavía no tenemos respuesta:

$$¿\delta(\mathcal{V}^2) = 0 \Rightarrow \mathcal{V} \text{ tiene un representante simple?}$$

$$¿\delta(\mathcal{V}^2) = 0 \Rightarrow \delta(\mathcal{V}) = 0?$$

El intento de dar respuesta a esta pregunta es una de las motivaciones que tuvimos para buscar fórmulas para el cocorchete de potencias. Buscaremos describir el cocorchete de potencias enteras, para esto separaremos la tarea en dos.

Empezaremos por preguntarnos como sería  $\delta(\mathcal{W}^{-1}) = \delta(\overline{\mathcal{W}})$ , suponiendo que es conocido el desarrollo de  $\delta(\mathcal{W})$ . Mostraremos en particular que el cocorchete resulta un antimorfismo de coálgebras.

### 8.1. $\delta(\overline{\mathcal{W}})$

Para comenzar a trabajar con el desarrollo de  $\delta(\overline{\mathcal{W}})$  relacionaremos subpalabras de la palabra  $\mathcal{W}$  con las subpalabras de  $\overline{\mathcal{W}}$ .

**Observación 8.1.** (I)  $P$  es subpalabra de  $\mathcal{V}$  si y sólo si  $\overline{P}$  es subpalabra de  $\overline{\mathcal{V}}$ .

(II)  $(P, Q)$  es linkeado si y sólo si  $(\overline{P}, \overline{Q})$  es linkeado (y además  $\text{sign}(P, Q) = \text{sign}(\overline{P}, \overline{Q})$ ).

*Demostración.* Como la primer observación es trivial, demostraremos (II), y lo haremos por casos:

- $(P, Q)$  verifica (1), en la definición de par linkeado,  $P = p_1 p_2$ ,  $Q = q_1 q_2$  si y sólo si  $\overline{P} = \overline{p_2} \overline{p_1}$  y  $\overline{Q} = \overline{q_2} \overline{q_1}$  y  $c(\overline{p_1} \overline{q_1} p_2 q_2) = c(p_2 q_2 \overline{p_1} \overline{q_1})$ .
- $(P, Q)$  verifica (2), con  $P = p_1 \Upsilon p_2$  y  $Q = q_1 \Upsilon q_2$  si y sólo si  $o(c(\overline{p_1} \overline{q_1} x_1)) = o(c(p_2 q_2 \overline{x_2}))$ .  $\overline{P} = \overline{p_2} \overline{\Upsilon} \overline{p_1}$  y  $\overline{Q} = \overline{q_2} \overline{\Upsilon} \overline{q_1}$  verifica (2) si y sólo si  $o(c(p_2 q_2 \overline{x_2})) = o(c(\overline{p_1} \overline{q_1} x_1))$ .
- $(P, Q)$  verifica (3), con  $P = p_1 \Upsilon p_2$  y  $Q = q_1 \overline{\Upsilon} q_2$  si y sólo si  $o(c(q_2 \overline{p_1} x_1)) = o(c(\overline{q_1} p_2 \overline{x_2}))$ . Por otro lado  $\overline{P} = \overline{p_2} \overline{\Upsilon} \overline{p_1}$  y  $\overline{Q} = \overline{q_2} \Upsilon \overline{q_1}$  verifica (3) si y sólo si  $o(c(\overline{q_1} p_2 \overline{x_2})) = o(c(q_2 \overline{p_1} x_1))$ .

■

**Proposición 8.2.** Si

$$\delta(\mathcal{V}) = \sum_{(P, Q) \in \text{LP}_1(\mathcal{V})} \text{sign}(P, Q) \delta_1(P, Q) \otimes \delta_2(P, Q)$$

entonces

$$\delta(\overline{\mathcal{V}}) = \sum_{(P, Q) \in \text{LP}_1(\mathcal{V})} \text{sign}(P, Q) \overline{\delta_2(P, Q)} \otimes \overline{\delta_1(P, Q)}.$$

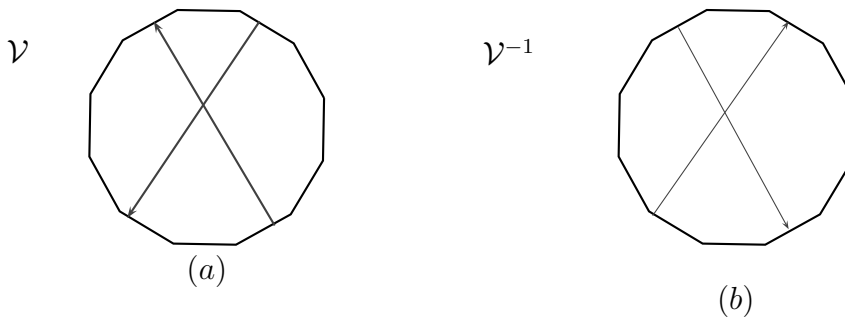


Figura 13: Por cada punto de autointersección en  $\mathcal{V}$  hay un punto de autointersección en  $\overline{\mathcal{V}}$ .

*Demostración.* Por la observación anterior los conjuntos  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  y  $\mathbf{LP}_1(\overline{\mathcal{V}})$  están en correspondencia 1 a 1 (contando cada elemento con su multiplicidad), y el signo correspondiente a  $(P, Q)$  es el mismo que para  $(\overline{P}, \overline{Q})$ . Analizaremos entonces la relación entre  $\delta_1(P, Q)$ ,  $\delta_2(P, Q)$ ,  $\delta_1(\overline{P}, \overline{Q})$  y  $\delta_2(\overline{P}, \overline{Q})$ .

- Si  $(P, Q)$  y  $(\overline{P}, \overline{Q})$  verifican (1) en la definición de par linkeado, con  $P = p_1p_2$  y  $Q = q_1q_2$ , entonces

$$\delta_1(P, Q) = c(p_2 \dots q_1), \delta_2(P, Q) = c(q_2 \dots p_1), \delta_1(\overline{P}, \overline{Q}) = c(\overline{p}_1 \dots \overline{q}_2)$$

y por último

$$\delta_2(\overline{P}, \overline{Q}) = c(\overline{q}_1 \dots \overline{p}_2).$$

Así obtenemos

$$\delta_1(\overline{P}, \overline{Q}) = \overline{\delta_2(P, Q)} \text{ y } \delta_2(\overline{P}, \overline{Q}) = \overline{\delta_1(P, Q)}.$$

- Si  $(P, Q)$  y  $(\overline{P}, \overline{Q})$  verifican (2) con  $P = p_1Yp_2$ ,  $Q = q_1Yq_2$  e  $Y = x_1Xx_2$ . Analizaremos por casos:

\* Si las palabras  $P$  y  $Q$  no se superponen o bien sólo se superponen de la siguiente manera:  $p_1 = q_2$  o bien  $p_2 = q_1$ . Entonces

$$\delta_1(P, Q) = c(p_2 \dots x_2), \delta_2(P, Q) = c(q_2 \dots x_2), \delta_1(\overline{P}, \overline{Q}) = c(\overline{p}_1 \dots \overline{x}_1)$$

y

$$\delta_2(\overline{P}, \overline{Q}) = c(\overline{q}_1 \dots \overline{x}_1),$$

que a simple vista no parece verificar  $\delta_1(\overline{P}, \overline{Q}) = \overline{\delta_2(P, Q)}$  y  $\delta_2(\overline{P}, \overline{Q}) = \overline{\delta_1(P, Q)}$ .

Para ver que se cumple lo que se afirma en esta proposición elegimos el siguiente representante lineal de  $\mathcal{V}$ ,

$$V_1 = \underbrace{q_2 \dots p_1 x_1 X x_2}_{\delta_2(P, Q)} \underbrace{p_2 \dots q_1 x_1 X x_2}_{\delta_1(P, Q)}$$

y entonces

$$\overline{V}_1 = \overline{x}_2 \overline{X} \overline{x}_1 \underbrace{\overline{q}_1 \dots \overline{p}_2 \overline{x}_2 \overline{X} \overline{x}_1}_{\delta_2(\overline{P}, \overline{Q})} \overline{p}_1 \dots \overline{q}_2$$

y lo que quedó sin marcar con la llave en esta última línea es  $\delta_1(\overline{P}, \overline{Q})$ . Observar que en ambos casos se verifica lo pedido, es decir no son la misma palabra lineal pero sí son la misma como palabras cíclicas.

\*Si las palabras  $P$  y  $Q$  se superponen de la siguiente manera

$$\mathcal{V} = c(p_1 A q_1 B p_2 C q_2 D) \text{ entonces } \overline{\mathcal{V}} = c(\overline{D} \overline{q}_2 \overline{C} \overline{p}_2 \overline{B} \overline{q}_1 \overline{A} \overline{p}_1)$$

donde  $Y = Aq_1B = Bp_2C$ . De esta manera tenemos

$$\delta_1(P, Q) = c(p_2C), \delta_2(P, Q) = c(\underbrace{q_2Dp_1}_W \underbrace{Aq_1B}_Y), \delta_1(\overline{P}, \overline{Q}) = c(\underbrace{\overline{p_1Dq_2}}_{\overline{W}} \underbrace{\overline{Cp_2B}}_{\overline{Y}})$$

y

$$\delta_2(\overline{P}, \overline{Q}) = c(\overline{q_1A}).$$

De esta manera es claro que  $\overline{\delta_2(P, Q)} = \delta_1(\overline{P}, \overline{Q})$ , y dado que el resto de la palabra  $\mathcal{V}$  y  $\overline{\mathcal{V}}$  está formado por  $\delta_1(P, Q)$  y  $\delta_2(\overline{P}, \overline{Q})$  respectivamente entonces  $\delta_1(\overline{P}, \overline{Q}) = \delta_2(\overline{P}, \overline{Q})$ .

\* Si las palabras  $P$  y  $Q$  se superponen de la siguiente manera

$$\mathcal{V} = c(p_1Aq_2Bq_1Cp_2D) \text{ entonces } \overline{\mathcal{V}} = c(\overline{Dp_2Cq_1Bq_2Ap_1})$$

donde  $Y = Aq_2Bq_1C = Cp_2Dp_1A$ . De esta manera tenemos

$$\delta_1(P, Q) = c(p_2Dp_1A), \delta_2(P, Q) = c(\underbrace{q_2Bq_1C}_W), \delta_1(\overline{P}, \overline{Q}) = c(\underbrace{\overline{p_1Dp_2C}}_Z)$$

y

$$\delta_2(\overline{P}, \overline{Q}) = c(\overline{q_1Bq_2A}).$$

Notar que  $W$  es la subpalabra de  $Y = Aq_2Bq_1C$  que resulta al quitar la subpalabra  $A$ , por otro lado  $Z$  es la subpalabra de  $\overline{Y} = \overline{Cp_2Dp_1A}$  que resulta al quitar la subpalabra  $\overline{A}$ . Así  $\overline{\delta_2(P, Q)} = \delta_1(\overline{P}, \overline{Q})$ . De esta manera hemos probado que todos los pares de tipo 2 verifican lo pedido.

- Si el par verifica (3) con  $P = p_1Yp_2$  y  $Q = q_1\overline{Y}q_2$ . Entonces  $\overline{P} = \overline{p_2}\overline{Y}\overline{p_1}$  y  $\overline{Q} = \overline{q_2}\overline{Y}\overline{q_1}$ . Recordemos que  $Y$  e  $\overline{Y}$  no se superponen y que  $W_1$  y  $W_2$  son no vacías gracias a la buena definición del cocorchete. Así resulta

$$\delta_1(P, Q) = c(p_2 \dots q_1), \delta_2(P, Q) = c(q_2 \dots p_1), \delta_1(\overline{P}, \overline{Q}) = c(\overline{p_1} \dots \overline{q_2})$$

y por último

$$\delta_2(\overline{P}, \overline{Q}) = c(\overline{q_1} \dots \overline{p_2}).$$

En definitiva, en todos los casos resultan las igualdades

$$\delta_1(\overline{P}, \overline{Q}) = \overline{\delta_2(P, Q)} \text{ y } \delta_2(\overline{P}, \overline{Q}) = \overline{\delta_1(P, Q)}.$$

■

**Observación 8.3.** Podemos llegar entonces a la siguiente conclusión

$$\delta(\overline{\mathcal{V}}) = -(\overline{(\quad)} \otimes \overline{(\quad)})(\delta(\mathcal{V}))$$



Repasamos algunas definiciones:

**Definición 8.4.** Dadas  $(\mathbb{V}, [,])$  y  $(\mathbb{W}, [,])$  dos álgebras de Lie. Un morfismo  $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  es un morfismo de álgebras de Lie si

$$[f(x), f(y)] = f([x, y]).$$

□

**Definición 8.5.** Dadas  $(\mathbb{V}, \delta)$  y  $(\mathbb{W}, \delta)$  dos coálgebras de Lie. Un morfismo  $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  es un morfismo de coálgebras de Lie si

$$\delta(f(x)) = (f \otimes f)(\delta(x)).$$

□

Entonces en 8.3 se dice que  $\overline{(\ )}$  es un antimorfismo de coálgebras de Lie.

## 8.2. $\delta(\mathcal{W}^n)$ para $n \in \mathbb{N}$

Nos dedicaremos ahora, a describir el cocorchete de una potencia natural de una palabra cíclica primitiva, en función del cocorchete de la misma.

Para comenzar, describiremos en la siguiente proposición, la relación que existe entre los conjuntos de pares linkeados. La idea intuitiva que nos guió a pensar en esta relación, es que al enroscar una curva sobre sí misma, no aparecen nuevos puntos de intersección, es decir, sólo aparecen copias del mismo punto. Esto último no es enteramente cierto, ya que, como mostramos en secciones anteriores, al enroscar  $n$  veces una curva aparecen  $n - 1$  nuevos puntos de intersección, pero estos no serán contados por pares linkeados.

**Proposición 8.6.** *Sea  $\mathcal{V}$  una palabra cíclica reducida y primitiva tal que  $\ell(\mathcal{V}) \geq 2$ , y  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}^n)$  entonces  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  (la otra inclusión es trivial). Es decir que como conjuntos, y sin contar la “multiplicidad” del elemento, los conjuntos  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V}^n)$  y  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  son iguales.*

*Demostración.* Supongamos que no, o sea existe un par  $\mathcal{O}$ -linkeado  $(P, Q)$  tal que  $\ell(\mathcal{V}) \leq \ell(P) - 1 = \ell(Q) - 1$ . Ahora analizamos caso por caso;

- Si  $(P, Q)$  verifica la definición 3.10 (1): Donde  $P = p_1p_2$  y  $Q = q_1q_2$  no son subpalabras de  $\mathcal{V}$  entonces  $\ell(\mathcal{V}) = 1$ , pero en ese caso en  $\mathcal{V}^2$  no podría haber pares de subpalabras linkeadas.
- Si  $(P, Q)$  verifica la definición 3.10 (2): Donde  $P = p_1Yp_2$  y  $Q = q_1Yq_2$ . Consideramos los siguientes casos:
  - (a) Si  $\ell(\mathcal{V}) \leq \ell(Y) = \ell(P) - 2$  tomo  $V_1$  el representante lineal de  $\mathcal{V}$  que comienza con la primer letra de  $Y$ . Entonces podemos encontrar  $V_1$  tanto en  $P$

$$P = p_1 \overbrace{y_1 \cdots y_{\ell(\mathcal{V})}}^{\mathcal{V}_1} \cdots y_n p_2$$

como en Q

$$Q = q_1 \underbrace{y_1 \cdots y_{\ell(\mathcal{V})}}_{\mathcal{V}_1} \cdots y_n q_2$$

con lo cual  $p_1 = q_1$  que es absurdo si el par era linkeado.

(b) Si  $\ell(\mathcal{V}) = \ell(\mathcal{Y}) + 1 = \ell(\mathcal{P}) - 1$ . Considero el representante lineal  $\mathcal{V}_1$  de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $y_1$  y termina en  $p_2$

$$P = p_1 \overbrace{y_1 \cdots y_n p_2}^{\mathcal{V}_1}$$

$$Q = q_1 y_1 \cdots y_n q_2$$

Como  $\ell(\mathcal{P}) = \ell(\mathcal{Q})$  puedo “encontrar” este representante lineal en Q, o sea, existe un  $j$  natural tal que  $y_1 = y_j, y_2 = y_{j+1} \cdots$

Observemos primero, que si  $\ell(\mathcal{V}) = \ell(\mathcal{Y}) + 1$  entonces  $p_1 = p_2$ . Si

$$\mathcal{V}_1 = y_1 \cdots y_n p_2$$

la letra que seguiría para comenzar  $\mathcal{V}_1$  otra vez sería  $y_1$  pero la letra anterior a esta debe ser  $p_1$ . Análogamente con Q.

De esta manera sólo escribiremos p y q en lugar de  $p_1, p_2, q_1$  y  $q_2$  respectivamente (podemos llamar  $y_{n+1} = p$ ).

Ahora bien, escribimos

$$P = p\mathcal{V}_1 = p \overbrace{y_1 y_2 \cdots y_{j-2} y_{j-1} y_j y_{j+1} \cdots y_n p}^{\mathcal{V}_1}$$

$$\begin{array}{l} P : p \ y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_j \ \cdots \\ Q : q \ y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_j \ y_{j+1} \ \cdots \ y_1 \ \cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P : p \ y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_1 \ y_2 \ \cdots \\ Q : q \ y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_j \ y_{j+1} \ \cdots \ y_1 \ y_2 \ \cdots \end{array} = p(y_1 \cdots y_{j-1})^\ell = pV$$

probaremos que  $\mathcal{V}$  es una potencia de  $c(y_1 y_2 \cdots y_{j-2} y_{j-1})$ . Supongamos que no. Primero tomamos  $j$  mínimo que cumple lo pedido. Así tenemos que  $y_k = y_{k+j-1}$  para todo  $k$  módulo  $(n+1)$ . Si  $j-1$  no divide a  $n+1$  entonces existe  $0 < r < j-1$  con  $y_k = y_{k+r} = y_{k+(r+1)-1}$  para todo  $k$ . Elegimos entonces  $j' = r+1 < j$  que es absurdo pues  $j$  era mínimo. Así llegamos al absurdo ya que suponíamos que  $\mathcal{V}$  era primitiva.

- Si  $(P, Q)$  verifica la definición 3.10 (3): Donde  $P = p_1 Y p_2$  y  $Q = q_1 \bar{Y} q_2$ 
  - (a) Si  $\ell(\mathcal{V}) \leq \ell(Y) = \ell(P) - 2$ . En este caso se puede encontrar un representante lineal de  $\mathcal{V}$  en  $P$  tomo en particular, el representante lineal  $V_1$  de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $y_1$  en  $P$  y como  $\ell(Y) = \ell(\bar{Y})$ . Llamemos  $X_1 = y_1 y_2 \dots y_j = \bar{y}_j \bar{y}_{j-1} \dots \bar{y}_1$ .

$$V_1 = \overbrace{y_1 y_2 \dots y_j}^{X_1} y_{j+1} \dots y_{\ell(\mathcal{V})}$$

$$V_1 = \underbrace{\bar{y}_j \bar{y}_{j-1} \dots \bar{y}_1}_{X_1} \bar{y}_{\ell(\mathcal{V})} \dots \bar{y}_{j+1}$$

Si  $j$  es par  $X_1$  no es reducida, ya que las dos letras “del medio” serán  $a_{j/2}$  y  $\bar{a}_{j/2}$ . Como  $X_1$  era subpalabra de  $\mathcal{V}$ , esta última tampoco será reducida. Así resulta absurdo. Si en cambio,  $j$  es impar hay una letra que verifica  $y_t = \bar{y}_t$ , que también es absurdo ( $t = (j + 1)/2$ ).

- (b) Si  $\ell(\mathcal{V}) = \ell(Y) + 1 = \ell(P) - 1$ . Llamemos  $V_1 = y_1 y_2 \dots y_n p_2$  a un representante lineal de  $\mathcal{V}$  que también podemos encontrar en  $Q = q_1 \bar{y}_n \dots \bar{y}_1 q_2$ . Aquí los siguientes casos:

Caso 1: existe  $1 \leq j \leq n$  tal que  $y_1 = \bar{y}_j$ .

$$P : p_1 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_j \ \dots$$

$$Q : q_1 \ \bar{y}_n \ \bar{y}_{n-1} \ \dots \ \bar{y}_j \ \bar{y}_{j-1} \ \dots \ \bar{y}_1 \ \dots$$

Si  $j = 1$   $y_1 = \bar{y}_1$  que no puede ser. Si  $2 \leq j \leq n$   $y_1 = \bar{y}_j \dots y_j = \bar{y}_1$  es decir que  $y_1 y_2 \dots y_j = \bar{y}_j \dots \bar{y}_1$  llegando otra vez a un absurdo.

Caso 2:  $y_1 = q_1 \dots p_2 = \bar{y}_1$  y de aquí que  $p_2 = \bar{q}_1$  pero como el par era linkeado esto no puede ocurrir.

Caso 3:  $y_1 = q_2, p_1 = \bar{y}_1$  entonces  $\bar{p}_1 = y_1$  y por lo tanto  $q_2 = \bar{p}_1$  y al igual que en el caso anterior esto no puede pasar si el par era linkeado.

■

Dado  $n$  un número natural, analizamos la multiplicidad con la que aparece cada par  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  en  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V}^n)$ .

Si el par  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  verifica (1) o (2) tenemos que  $p_1$  y  $q_1$  son distintos, tomaremos entonces el representante lineal  $V_1 = p_1 \dots q_1 \dots$  de  $\mathcal{V}$ . Así

$$V_1^n = \overbrace{p_1 \dots q_1}^{V_1} \dots \overbrace{p_1 \dots q_1}^{V_1} \dots \dots \dots \overbrace{p_1 \dots q_1}^{V_1} \dots$$

es un representante de  $\mathcal{V}_1^n$ .

Consideramos las siguientes posibilidades:

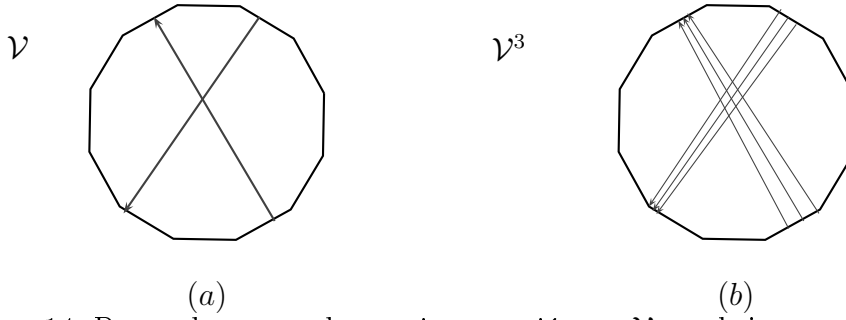


Figura 14: Por cada punto de autointersección en  $\mathcal{V}$  se obtienen  $n^2$  puntos de autointersección en  $\mathcal{V}^n$ .

(1)

$$V_1^n = \underbrace{\overbrace{p_1 \dots p_1}^P \dots \overbrace{q_1 \dots q_1}^Q}_{V_1} \dots \underbrace{p_1 \dots q_1}_{V_1} \dots \dots \underbrace{p_1 \dots q_1}_{V_1} \dots$$

Que el par (P, Q) se encuentre “en el primer representante” de  $\mathcal{V}$ . Pero si pensamos en la palabra cíclica y rotamos, encontraremos n copias de esta misma situación.

(2)

$$V_1^n = \underbrace{\overbrace{p_1 \dots p_1}^P \dots q_1}_{V_1} \dots \underbrace{p_1 \dots \overbrace{q_1 \dots q_1}^Q}_{V_1} \dots \dots \underbrace{p_1 \dots q_1}_{V_1} \dots$$

Si encuentro P en el primer representante y Q en el segundo, y rotamos, vamos a encontrar n copias de esta misma situación.

⋮  
⋮  
⋮

(n) Por último tomando P en el primer representante y Q en el último

$$V_1^n = \underbrace{\overbrace{p_1 \dots p_1}^P \dots q_1}_{V_1} \dots \underbrace{p_1 \dots q_1}_{V_1} \dots \dots \underbrace{p_1 \dots \overbrace{q_1 \dots q_1}^Q}_{V_1} \dots$$

Y otra vez rotando encontraremos n copias de esta situación.

El análisis anterior es válido en los casos en que (P, Q) verifique la definición 3.10 (1) o (2). Estudiemos que pasa si el par verifica (3). Este caso es distinto al anterior pues  $p_1$  y  $q_1$  podrían ser iguales. Pero si estamos considerando  $\mathcal{V}$  reducida (entonces  $\mathcal{V}^n$  también es reducida) las palabras  $Y$  e  $\bar{Y}$  no pueden superponerse.

Recordemos que en este caso teníamos que  $P = p_1 Y p_2$  y  $Q = q_1 \bar{Y} q_2$ . Así, P y Q no se superponen o  $p_2 = q_1$ . Entonces podemos tomar el representante lineal de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $p_2$  y razonamos como en el caso anterior.

**Observación 8.7.** Por cada par  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  y  $n \in \mathbb{N}$ , encontramos un total de  $n^2$  copias en  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V}^n)$ . O sea

$$n^2 \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}) = \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}^n)$$

También es cierto que no todas estas copias del mismo par darán lugar a los mismos  $\delta_1(P, Q)$  y  $\delta_2(P, Q)$  en  $\delta(\mathcal{V}^n)$ . Esta será nuestra siguiente tarea.

Notemos con  $W_1$  y  $W_2$  a los correspondientes cortes realizados en  $\mathcal{V}$  para el par  $(P, Q)$  y con  $Z_1, Z_2$  a los cortes correspondientes a  $\mathcal{V}^n$  (es decir  $\delta_1(P, Q) = c(Z_1)$  y  $\delta_2(P, Q) = c(Z_2)$  los correspondientes a  $\delta(\mathcal{V}^n)$ ). Si el par  $(P, Q)$  verifica (1) o (2) en la definición de par linkeado, veamos que pasa en cada una de las posibilidades anteriores.

Supongamos que estamos en el caso (1) del análisis anterior sólo que tomamos el representante lineal  $V_1$  de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $p_2$

$$V_1^n = \underbrace{p_2 \dots q_2}_{W_1} \underbrace{\dots p_2 \dots q_2}_{W_2} \dots \underbrace{\dots p_2 \dots q_2}_{V_1^{n-1}}$$

O sea  $\delta_1(\mathcal{V}^n) = c(Z_1) = c(W_1)$  y  $\delta_2(\mathcal{V}^n) = c(Z_2) = c(W_2 V_1^{n-1})$

Y si estamos en el caso (2)

$$V_1^n = \underbrace{p_2 \dots q_2}_{V_1} \dots \underbrace{p_2 \dots q_2}_{W_1} \dots \underbrace{\dots p_2 \dots q_2}_{W_2} \dots \underbrace{\dots p_2 \dots q_2}_{V_1^{n-2}}$$

O sea  $\delta_1(\mathcal{V}^n) = c(Z_1) = c(V_1 W_1)$  y  $\delta_2(\mathcal{V}^n) = c(Z_2) = c(W_2 V_1^{n-2})$

⋮  
⋮  
⋮  
⋮

Si estamos en el caso (n)

$$V_1^n = \underbrace{\dots p_2 \dots q_2}_{V_1^{n-1}} \dots \underbrace{\dots p_2 \dots q_2}_{W_1} \dots \underbrace{\dots q_2}_{W_2}$$

O sea  $\delta_1(\mathcal{V}^n) = c(Z_1) = c(V_1^{n-1} W_1)$  y  $\delta_2(\mathcal{V}^n) = c(Z_2) = c(W_2)$

Ahora si el par  $(P, Q)$  verifica (3) utilizaremos los representantes lineales

$$V_1 = \underbrace{p_2 \dots q_1}_{W_3} \bar{Y} \underbrace{q_2 \dots p_1}_{W_4} Y,$$

$$V_3 = YW_3\bar{Y}W_4$$

de  $\mathcal{V}$  (recordar que dado que  $Y$  e  $\bar{Y}$  no se superponen, de la única manera que se pueden superponer las palabras  $P$  y  $Q$  es que  $q_2 = p_1$  o bien  $q_1 = p_2$ ).

Consideramos el caso (1) del análisis anterior, donde las palabras  $P$  y  $Q$  “se encuentran en el mismo representante lineal de  $\mathcal{V}$ ”.

$$V_1^n = \underbrace{p_2 \dots q_1}_{W_3} \bar{Y} \underbrace{q_2 \dots p_1}_{W_4} \underbrace{Y p_2 \dots q_1 \bar{Y} q_2 \dots p_1 Y \dots p_2 \dots q_1 \bar{Y} q_2 \dots p_1}_{V_3^{n-1}} Y$$

Entonces  $\delta_1(\mathcal{V}^n) = c(Z_1) = c(W_3)$  y  $\delta_2(\mathcal{V}^n) = c(Z_2) = c(W_4 V_3^{n-1})$

y si consideramos el caso (2)

$$V_1^n = \underbrace{p_2 \dots q_1 \bar{Y} q_2 \dots p_1}_{V_1} \underbrace{Y p_2 \dots q_1}_{W_3} \bar{Y} \underbrace{q_2 \dots p_1}_{W_4} \underbrace{Y p_2 \dots q_1 \bar{Y} q_2 \dots p_1}_{V_3^{n-2}} Y$$

Entonces  $\delta_1(\mathcal{V}^n) = c(Z_1) = c(V_1 W_3)$  y  $\delta_2(\mathcal{V}^n) = c(Z_2) = c(W_4 V_3^{n-2})$

⋮  
⋮  
⋮

y si consideramos el caso (n)

$$V_1^n = \underbrace{p_2 \dots q_1 \bar{Y} q_2 \dots p_1}_{V_1^{n-2}} \underbrace{Y p_2 \dots q_1 \bar{Y} q_2 \dots p_1}_{W_3} \dots \underbrace{p_2 \dots q_1}_{W_3} \bar{Y} \underbrace{q_2 \dots p_1}_{W_4} Y$$

Entonces  $\delta_1(\mathcal{V}^n) = c(Z_1) = c(V_1^{n-2} W_3)$  y  $\delta_2(\mathcal{V}^n) = c(Z_2) = c(W_4)$

Gracias al análisis previo llegamos a la siguiente fórmula (que describe el cocorchete de una potencia de una palabra en base al cocorchete de una primitiva):

**Teorema 8.8.** *Sea  $\mathcal{V}$  primitiva tal que*

$$\delta(\mathcal{V}) = \sum_{(P,Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}): (1) \circ (2)} \text{sign}(P, Q) c(W_1) \otimes c(W_2) + \sum_{(P,Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}): (3)} \text{sign}(P, Q) c(W_3) \otimes c(W_4)$$

entonces

$$\delta(\mathcal{V}^n) = n \left[ \sum_{(P,Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}): (1) \text{ o } (2)} \text{sign}(P, Q) \sum_{0 \leq i \leq n-1} c(V_1^i W_1) \otimes c(W_2 V_1^{n-1-i}) + \sum_{(P,Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}): (3)} \text{sign}(P, Q) \sum_{0 \leq i \leq n-1} c(V_1^i W_3) \otimes c(W_4 V_3^{n-1-i}) \right]$$

Donde para cada par  $\mathcal{O}$ -linkeado  $(P, Q)$  tenemos:

$V_1$  es el representante lineal de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $p_2$ .

$W_1$  es la subpalabra de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $p_2$  y termina justo antes de  $q_2$ .

$W_2$  es la subpalabra de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $q_2$  y termina justo antes de  $p_2$ .

$W_3$  es la subpalabra de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $p_2$  y termina en  $q_1$ .

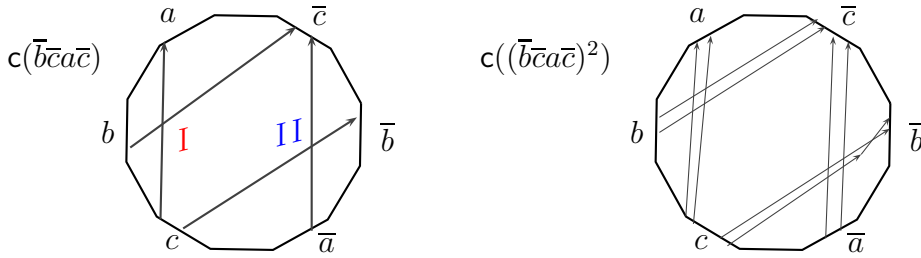
$W_4$  es la subpalabra de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $q_2$  y termina con  $p_1$ .

Por último  $V_3$  es el representante lineal de  $\mathcal{V}$  tal que  $V_3 = YW_3\bar{Y}W_4$ .

### 8.3. Ejemplos

#### Un ejemplo concreto

Calcularemos  $\delta(\mathcal{V})$  y  $\delta(\mathcal{V}^2)$  comparándolo con  $\delta(\mathcal{V})$  para una curva en concreto en el toro con dos agujeros.



Si consideramos  $\mathcal{V} = c(\bar{b}c\bar{a}\bar{c})$  los pares linkeados serán  $(P_1, Q_1) = (\bar{b}c, \bar{c}a)$ ,  $(Q_1, P_1)$ ,  $(P_2, Q_2) = (\bar{c}\bar{b}, a\bar{c})$  y  $(Q_2, P_2)$ , donde  $(P_1, Q_1)$  y  $(P_2, Q_2)$  tienen signo positivo (todos estos pares verifican (1) en la definición 3.10). Utilizamos dos colores distintos para distinguir los cortes provocados por estos pares  $\mathcal{O}$ -linkeados distintos y al mismo tiempo no sobrecargar la notación.

Entonces (ver primer diagrama)

$$\delta(\mathcal{V}) = \underbrace{c(\overbrace{\bar{c}}^{W_1^{PQ}}) \otimes c(\overbrace{a\bar{c}\bar{b}}^{W_2^{PQ}})}_{por(I)} - c(a\bar{c}\bar{b}) \otimes c(\bar{c}) +$$

$$\underbrace{c(\overline{bca}) \otimes c(\overline{c}) - c(\overline{c}) \otimes c(\overline{bca})}_{por II}$$

Analizamos este ejemplo con la definición de Goldman y Turaev. Empecemos con el punto  $I$ , primero se ordenan los arcos salientes de este punto con la misma orientación que define la palabra  $\mathcal{O}$  (es decir el símbolo de la superficie) entonces el primer arco será el que llega al lado etiquetado con la letra  $\overline{c}$ , y este arco “aparece” en el lado etiquetado con la letra  $c$  y luego regresa al punto  $I$  formando un lazo es decir  $c(\overline{c})$ . Luego saliendo de  $I$  recorreremos el arco que llega al lado etiquetado con la letra  $a$ , aparece en el lado etiquetado con  $\overline{a}$ , llega a  $\overline{c}$ , aparece en el lado etiquetado con la letra  $c$ , de ahí a  $\overline{b}$ , aparece en el lado etiquetado con la letra  $b$  y de ahí llega a  $I$  otra vez formando otro lazo, más precisamente  $c(a\overline{c}\overline{b})$ . Esto último da lugar al término  $c(\overline{c}) \otimes c(a\overline{c}\overline{b})$

El segundo término que se observa en el primer desarrollo es el simétrico de este último, con el signo opuesto ya se cambia el orden en los arcos salientes de  $I$ .

Por otro lado, realizamos el mismo procedimiento en el punto  $II$ . Se ordenan los arcos salientes del punto  $II$  respetando la orientación del símbolo de la superficie. El primer arco será el que sale de  $II$  y llega al lado etiquetado con la letra  $\overline{b}$ , este arco llega al lado etiquetado con la letra  $b$  y parte hacia el lado correspondiente a la letra  $\overline{c}$ , aparece en  $c$  y va hacia  $a$ , y desde  $\overline{a}$  llega a  $II$  otra vez. Es decir  $c(\overline{bca})$ .

Si en cambio se sale del punto  $II$  con el segundo arco se llega al lado etiquetado con la letra  $\overline{c}$ , aparece en el lado correspondiente a la letra  $c$  y vuelve al punto  $II$  formando el lazo  $c(\overline{c})$ .

En consecuencia se obtiene el término  $c(\overline{bca}) \otimes c(\overline{c})$ , y por supuesto su simétrico  $c(\overline{c}) \otimes c(\overline{bca})$  con signo asociado  $-1$ .

Si en cambio se considera  $\overline{\mathcal{V}}$ , (recordemos que es la misma curva pero con sentido opuesto) los pares linkeados serán  $(\overline{P}_1, \overline{Q}_1)$  y  $(\overline{P}_2, \overline{Q}_2)$  ambos de signo positivo y sus simétricos con signo negativo.

Entonces

$$\delta(\overline{\mathcal{V}}) = \underbrace{c(\overline{bca}) \otimes c(\overline{c}) - c(\overline{c}) \otimes c(\overline{bca})}_{por I} +$$

$$\underbrace{c(\overline{c}) \otimes c(\overline{acb}) - c(\overline{acb}) \otimes c(\overline{c})}_{por(II)}$$

Es decir, que recorreremos primero (y en sentido contrario) la curva que recorríamos última.



Ahora veamos que pasa si tomamos  $\mathcal{V}^2$ . Como podemos observar en el diagrama, ahora hay 4 puntos de intersección “provenientes de I” y otros 4 “provenientes de II”, además hay un punto extra que no va a ser detectado por los pares (P, Q) (de todas maneras si usamos la definición de cocorhete Goldman-Turaev se puede observar que los términos correspondientes a este punto se anularán entre si). También sabemos que por cada par contabilizado en  $\mathcal{V}$  encontraremos “4 copias” en  $\mathcal{V}^2$ .

Así obtenemos (ver segundo diagrama)

$$\delta(\mathcal{V}^2) = 2 \left[ \underbrace{c(\overbrace{\bar{c}a\bar{c}b}^{V_1} \overbrace{\bar{c}}^{W_1^{PQ}})} \otimes c(\overbrace{a\bar{c}b}^{W_2^{PQ}})} - c(a\bar{c}b) \otimes c(\bar{c}a\bar{c}b\bar{c}) \right]_{por I} +$$

$$\underbrace{c(\overbrace{\bar{c}}^{W_1^{PQ}})} \otimes c(\overbrace{a\bar{c}b}^{W_2^{PQ}} \overbrace{\bar{c}a\bar{c}b}^{V_1}) - c(a\bar{c}b\bar{c}a\bar{c}b) \otimes c(\bar{c}) \right]_{por I} +$$

$$\underbrace{c(\overbrace{\bar{b}c\bar{a}c}^{V_1} \overbrace{\bar{b}c\bar{a}}^{W_1^{PQ}})} \otimes c(\overbrace{\bar{c}}^{W_2^{PQ}})} - c(\bar{c}) \otimes c(\bar{b}c\bar{a}c\bar{b}c\bar{a}) \right]_{por II} +$$

$$\underbrace{c(\overbrace{\bar{b}c\bar{a}}^{W_1^{PQ}})} \otimes c(\overbrace{\bar{c}}^{W_2^{PQ}} \overbrace{\bar{b}c\bar{a}c}^{V_1}) - c(\bar{c}\bar{b}c\bar{a}c) \otimes c(\bar{b}c\bar{a}) \right]_{por II}$$

Se puede observar en el ejemplo anterior que  $V_1$  indicado con color rojo no es el mismo que el  $V_1$  indicado con azul, es decir,  $V_1$  depende del par (P, Q).

### El caso $n = 2$ para una superficie en general

$$\delta(\mathcal{V}^2) = 2 \left[ \sum_{(P,Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}): (1) \circ (2)} \text{sign}(P, Q) \sum_{0 \leq i \leq 1} c(V_1^i W_1) \otimes c(W_2 V_1^{1-i}) + \right.$$

$$\left. \sum_{(P,Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}): (3)} \text{sign}(P, Q) \sum_{0 \leq i \leq 1} c(V_1^i W_3) \otimes c(W_4 V_3^{1-i}) \right]$$

Donde para cada par  $\mathcal{O}$ -linkeado tenemos:

$V_1$  es el representante lineal de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $p_2$ .

$W_1$  es la subpalabra de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $p_2$  y termina justo antes de  $q_2$ .

$W_2$  es la subpalabra de  $\mathcal{V}$  que comienza con  $q_2$  y termina justo antes de  $p_2$ .

$W_3$  comienza con  $p_2$  y termina en  $q_1$ .

$W_4$  comienza con  $q_2$  y termina con  $p_1$ .

Por último  $V_3$  es el representane lineal de  $\mathcal{V}$  tal que  $V_3 = YW_3\bar{Y}W_4$ .

Los siguientes dos ejemplos son nombrados en [1](ejemplo 5.8) considerando  $\mathcal{O} = c(a_1a_2\bar{a}_1\bar{a}_2a_3a_4\bar{a}_3\bar{a}_4)$ , los desarrollaremos aquí pero con otro símbolo de superficie. Esto es porque si la palabra que describe la curva no contiene a las letras  $a_i, \bar{a}_i$  entonces podemos ubicar la palabra en una biálgebra “más chica”, es decir con un alfabeto donde no aparezcan las letras  $a_i$  y  $\bar{a}_i$ . Este reemplazo no cambiará signos ni cantidad de pares linkeados.

**Ejemplo 8.9.** En el ejemplo 6.6 se mostró una curva donde  $\delta(\mathcal{V}) = 0$ , calculemos ahora  $\delta(\mathcal{V}^2)$ . Recordamos  $\mathcal{V} = c(a_1a_2\bar{a}_1a_2)$ ,  $\mathcal{O} = c(a_1a_2\bar{a}_1\bar{a}_2)$  y los pares linkeados  $(P, Q)$  y  $(Q, P)$  donde  $P = a_2\bar{a}_1a_2$  y  $Q = a_2a_1a_2$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{V}^2) &= 2[c(a_2\bar{a}_1a_2a_1a_2) \otimes c(a_2) - c(a_2) \otimes c(a_2\bar{a}_1a_2a_1a_2) \\ &\quad + c(a_2) \otimes c(a_2a_1a_2\bar{a}_1a_2) - c(a_2a_1a_2\bar{a}_1a_2) \otimes c(a_2)] \neq 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 8.10.** Sean  $\mathcal{O} = c(a_1a_2\bar{a}_1\bar{a}_2a_3\bar{a}_3)$  y  $\mathcal{V} = c(a_2a_3a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_1)$ . Los pares linkeados son  $(P_1, Q)$ ,  $(P_2, Q)$  (de signo positivo) y sus simétricos, donde  $P_1 = P_2 = \bar{a}_1\bar{a}_1$  y  $Q = a_3a_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{V}) &= c(\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3) \otimes c(a_2a_3\bar{a}_1) - c(a_2a_3\bar{a}_1) \otimes c(\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3) \\ &\quad + c(\bar{a}_1a_2a_3) \otimes c(a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1) - c(a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1) \otimes c(\bar{a}_1a_2a_3). \end{aligned}$$

De esta manera  $\delta(\mathcal{V}) = 0$  porque como palabras cíclicas  $c(\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3) = c(a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1)$  y  $c(a_2a_3\bar{a}_1) = c(\bar{a}_1a_2a_3)$ , ambos correspondientes al primer y último termino. Análogamente con el segundo y tercer término. Si las palabras fuesen lineales ninguna de esta simplificaciones serían posibles.

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{V}^2) &= c(\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3) \otimes c(a_2a_3\bar{a}_1) - c(a_2a_3\bar{a}_1) \otimes c(\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3) \\ &\quad + c(\bar{a}_1a_2a_3a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3) \otimes c(a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1) - c(a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1) \otimes c(\bar{a}_1a_2a_3a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3) \\ &\quad + c(\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3) \otimes c(a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3a_2a_3\bar{a}_1) - c(a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3a_2a_3\bar{a}_1) \otimes c(\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3) \\ &\quad + c(\bar{a}_1a_2a_3) \otimes c(a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1) - c(a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1\bar{a}_1a_2a_3a_2a_3\bar{a}_1\bar{a}_1) \otimes c(\bar{a}_1a_2a_3) \end{aligned}$$

De esta manera no sólo podemos notar que  $\delta(\mathcal{V}^2) \neq 0$  sino que no es posible la simplificación de término alguno.

## 9. Corchete de potencias de dos palabras cíclicas

### 9.1. $[\mathcal{W}^n, \mathcal{Z}^m]$

La idea de esta sección es poder calcular  $[\mathcal{W}^n, \mathcal{Z}^m]$  sabiendo  $[\mathcal{W}, \mathcal{Z}]$ , para cualquier par  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Esto permite “ahorrar cuentas”, en el siguiente sentido, si se sabe el desarrollo del corchete para la palabra cíclica primitiva, no es necesario buscar pares linkeados de las potencias de esta palabra. Así basta con buscar sólo los pares linkeados de la palabra cíclica primitiva.

Dados  $n, m \in \mathbb{N}$ , por definición  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$  y  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{W}^n, \mathcal{Z}^m)$  son iguales como conjuntos. Así sólo resta analizar con que multiplicidad aparece cada par  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$  en  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{W}^n, \mathcal{Z}^m)$ .

Dado  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$  consideramos el representante lineal  $W_1$  de  $\mathcal{W}$  que comienza con  $p_1$  y el representante lineal  $Z_1$  de  $\mathcal{Z}$  que comienza con  $q_1$ , entonces tenemos que  $W_1^n$  es un representante lineal de  $\mathcal{W}^n$  y  $Z_1^m$  es representante lineal de  $\mathcal{Z}^m$ . Donde

$$W_1^n = \underbrace{p_1 \dots p_1}_{W_1} \dots \underbrace{p_1 \dots p_1}_{W_1}$$

$$Z_1^m = \underbrace{q_1 \dots q_1}_{Z_1} \dots \underbrace{q_1 \dots q_1}_{Z_1}$$

por cada  $P$  en  $W_1^n$  hay  $m$  posibles  $Q$  tal que el par  $(P, Q)$  es linkeado, y como hay  $n$  posibles  $P$  en  $W_1^n$  entonces hay  $n \cdot m$  pares  $(P, Q)$  en  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{W}^n, \mathcal{Z}^m)$ .

Por otro lado, veamos la relación entre  $\gamma(P, Q)$  correspondiente a  $[\mathcal{W}, \mathcal{Z}]$  y  $\gamma(P, Q)$  correspondiente a  $[\mathcal{W}^n, \mathcal{Z}^m]$ , para poder concluir una relación entre  $[\mathcal{W}, \mathcal{Z}]$  y  $[\mathcal{W}^n, \mathcal{Z}^m]$ . Analicemos dos casos

- Si  $(P, Q)$  verifica (1) o (2) en la definición 3.10 consideramos el representante lineal  $W_1$  de  $\mathcal{W}$  que comienza con  $p_2$  y el representante lineal  $Z_1$  de  $\mathcal{Z}$  que comienza con  $q_2$ . De esta manera  $\gamma(P, Q)$  (el correspondiente a  $\mathcal{W}^n \mathcal{Z}^m$ )

$$\gamma(P, Q) = c(\underbrace{p_2 \dots p_2}_{W_1^n} \dots \underbrace{q_2 \dots q_2}_{Z_1^m} \dots)$$

mientras que el correspondiente a  $\mathcal{W}\mathcal{Z}$  sería

$$\gamma(P, Q) = c(\underbrace{p_2 \dots}_{W_1} \underbrace{q_2 \dots}_{Z_1})$$



Por cada punto de inter. entre  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{Z}$  hay  $2 \times 3$  puntos de inter. entre  $\mathcal{W}^2$  y  $\mathcal{Z}^3$ .

Figura 15: Comparación entre  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$  y  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{W}^n, \mathcal{Z}^m)$ .

- Si  $(P, Q)$  verifica (3) en la definición 3.10 consideramos la subpalabra  $W$  de  $\mathcal{W}$  que comienza con  $p_2$  y termina con  $p_1$  y la subpalabra  $Z$  de  $\mathcal{Z}$  que comienza con  $q_2$  y termina con  $q_1$ , además consideramos el representante lineal  $W_1$  de  $\mathcal{W}$  que comienza en  $p_2$  y el representante lineal  $Z_1$  de  $\mathcal{Z}$  que comienza con  $q_2$ . Entonces

$$\gamma(P, Q) = c(\underbrace{p_2 \dots p_1}_{W_1^{n-1}W} \underbrace{q_2 \dots q_1}_{Z_1^{m-1}Z}).$$

Así llegamos a la siguiente fórmula:

**Teorema 9.1.** *Si*

$$[\mathcal{W}, \mathcal{Z}] = \sum_{(P, Q) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z}): (1) \circ (2)} \text{sign}(P, Q) c(W_1 Z_1) + \sum_{(P, Q) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z}): (3)} \text{sign}(P, Q) c(WZ)$$

(donde, para cada par linkeado,  $W_1$  es el representante lineal de  $\mathcal{W}$  que comienza con  $p_2$ ,  $Z_1$  es el representante lineal de  $\mathcal{Z}$  que comienza con  $q_2$ ,  $W$  y  $Z$  son subpalabras de  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{Z}$  respectivamente, tal que  $W$  comienza en  $p_2$  y termina en  $p_1$  y  $Z$  comienza en  $q_2$  y termina en  $q_1$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ )

entonces

$$[\mathcal{W}^n, \mathcal{Z}^m] = nm \left[ \sum_{(P, Q) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z}): (1) \circ (2)} \text{sign}(P, Q) c(W_1^n Z_1^m) + \sum_{(P, Q) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z}): (3)} \text{sign}(P, Q) c(W_1^{n-1} W Z_1^{m-1} Z) \right]$$

**Ejemplo 9.2.** Sea  $\mathcal{O} = c(a\bar{a}b\bar{c}\bar{c})$  y sean  $\mathcal{W} = c(abc)$  y  $\mathcal{Z} = c(\bar{c}\bar{b}a)$ . Los pares  $\mathcal{O}$ -linkeados son  $(P, Q) = (bca, ac\bar{b})$ , que tiene signo positivo y es de tipo 2 y  $(P, Q) = (abc, \bar{c}\bar{b}a)$ , que tiene signo positivo y es de tipo 3. Entonces

$$[\mathcal{W}, \mathcal{Z}] = c(\underbrace{abc}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{\bar{b}ac}_{\mathcal{Z}_1}) + c(\underbrace{ca}_{\mathcal{W}} \underbrace{ac}_{\mathcal{Z}})$$

Y si consideramos  $\mathcal{W}^2$  y  $\mathcal{Z}$  obtenemos

$$[\mathcal{W}^2, \mathcal{Z}] = 2[c(\underbrace{abc}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{abc}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{\bar{b}ac}_{\mathcal{Z}_1}) + c(\underbrace{cab}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{ca}_{\mathcal{W}} \underbrace{ac}_{\mathcal{Z}})].$$

Más ejemplos:

$$[\mathcal{W}^3, \mathcal{Z}] = 3[c(\underbrace{abc}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{abc}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{abc}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{\bar{b}ac}_{\mathcal{Z}_1}) + c(\underbrace{cab}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{cab}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{ca}_{\mathcal{W}} \underbrace{ac}_{\mathcal{Z}})]$$

$$[\mathcal{W}^2, \mathcal{Z}^2] = 4[c(\underbrace{abc}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{abc}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{\bar{b}ac}_{\mathcal{Z}_1} \underbrace{\bar{b}ac}_{\mathcal{Z}_1}) + c(\underbrace{cab}_{\mathcal{W}_1} \underbrace{ca}_{\mathcal{W}} \underbrace{\bar{b}ac}_{\mathcal{Z}_1} \underbrace{ac}_{\mathcal{Z}})]$$

## 9.2. $[\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{W}}]$

Si bien con argumentos geométricos la relación

$$[\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{W}}] = \overline{[\mathcal{V}, \mathcal{W}]}$$

resulta trivial, no es inmediata una demostración combinatoria. De todos modos veremos cuales son los casos en los que se puede observar fácilmente la relación entre los términos de  $[\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{W}}]$  y  $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ .

En 8.1 mostramos la biyección que existe entre el conjunto de pares linkeados correspondientes a  $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  con los correspondientes a  $(\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{W}})$ .

Para un par  $(P, Q)$  que verifica (1) o (3) ( $(\overline{P}, \overline{Q})$  verifica (1) o (3) respectivamente) es inmediata la igualdad

$$c(\overbrace{p_2 \dots p_1}^{\mathcal{V}} \overbrace{q_2 \dots q_1}^{\mathcal{W}}) = \overline{c(\underbrace{\overline{p_1} \dots \overline{p_2}}_{\overline{\mathcal{V}}} \underbrace{\overline{q_1} \dots \overline{q_2}}_{\overline{\mathcal{W}}})}$$

Para un par  $(P, Q)$  que verifica (2) ( $(\overline{P}, \overline{Q})$  verifica (2)). Separaremos en casos, el primero es evidente, el segundo requiere un poco más de trabajo y el último se desdobra en una cantidad importante de casos, es por eso que no detallaremos las cuentas.

- Caso 1:  $\ell(P) = \ell(Q) \leq \min\{\ell(\mathcal{V}), \ell(\mathcal{W})\}$ , es decir, las palabras  $P$  y  $Q$  son subpalabras de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  respectivamente.

$$\mathcal{V} = c(p_1 Y p_2 A) \quad \mathcal{W} = c(q_1 Y q_2 B)$$

$$c(\overbrace{p_2 A p_1 Y}^{\mathcal{V}} \overbrace{q_2 B q_1 Y}^{\mathcal{W}}) = \overline{c(\overbrace{\overline{p_1 A p_2 Y}}^{\overline{\mathcal{V}}} \overbrace{\overline{q_1 B q_2 Y}}^{\overline{\mathcal{W}}})}.$$

- Caso 2:  $\ell(\mathcal{V}) < \ell(\mathcal{P}) = \ell(\mathcal{Q}) \leq \ell(\mathcal{W})$ , es decir, la palabra  $\mathcal{P}$  es subpalabra de una potencia de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{Q}$  es subpalabra de  $\mathcal{W}$ . El caso simétrico es análogo.

$$\mathcal{V} = c(p_1 Y^*) \quad \mathcal{W} = c(q_1 Y q_2 B)$$

Aquí dos posibilidades, puede que  $Y^*$  sea toda o parte de la palabra  $Y$ . La primera es trivial ( $Y = Y^*$  y  $p_1 = p_2$ ).

$$c(p_2 Y q_2 B q_1 Y) = \overline{c(\overline{p_1 Y q_1 B q_2 Y})}$$

Si consideramos la otra posibilidad,  $Y^*$  es sólo una parte de la palabra  $Y$ , podemos escribir  $Y^* = Y_1 p_2 Y_2$ ,  $\mathcal{V} = c(p_1 Y_1 p_2 Y_2)$  y  $\mathcal{W} = c(q_1 Y q_2 B)$  donde  $Y = (Y_1 p_2 Y_2 p_1)^i Y_1$  con  $i \geq 1$ .

En  $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$  encontramos el término

$$\mathcal{Z} = c((p_2 Y_2 p_1 Y_1) q_2 B q_1 (Y_1 p_2 Y_2 p_1)^i Y_1) = ((Y_1 p_2 Y_2 p_1)^{i+1} Y_1 q_2 B q_1).$$

En  $[\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{W}}]$  encontramos el término

$$\mathcal{O} = c(\overline{p_1 Y_2 p_2 Y_1 q_1 B q_2 Y_1} (\overline{p_1 Y_2 p_2 Y_1})^i) = c(\overline{(\overline{p_1 Y_2 p_2 Y_1})^{i+1} q_1 B q_2 Y_1}).$$

Caso 3: Si  $\max\{\ell(\mathcal{V}), \ell(\mathcal{W})\} < \ell(\mathcal{P}) = \ell(\mathcal{Q})$ , es decir,  $\mathcal{P}$  es subpalabra de una potencia de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{Q}$  es una subpalabra de una potencia de  $\mathcal{W}$ . En este caso podemos escribir  $\mathcal{V} = c(p_1 Y^*)$  y  $\mathcal{W} = c(q_1 Y^\circ)$  donde  $Y^*$  y  $Y^\circ$  pueden ser toda la palabra  $Y$  o sólo una parte de ella. Esto derivará en tres subcasos:

Caso 3.1: Si  $Y = Y^* = Y^\circ$  entonces  $p_1 = p_2$  y  $q_1 = q_2$ . Resulta inmediato que

$$c(p_2 Y q_2 Y) = \overline{c(\overline{p_1 Y q_1 Y})}.$$

Caso 3.2: Si  $Y = Y^*$  y por otro lado  $Y^\circ$  es subpalabra (estricta) de  $Y$ . El caso simétrico es análogo. Escribimos  $\mathcal{V} = c(p_1 Y)$ ,  $\mathcal{W} = c(q_1 Y^\circ) = (q_1 Y_1 q_2 Y_2)$ , donde  $p_1 = p_2$  y  $Y = (Y_1 q_2 Y_2 q_1)^i Y_1$  con  $i \geq 1$ . Con un procedimiento parecido al caso 2 se concluye este caso.

Caso 3.3: Este es el caso no trivial, es decir el caso donde  $Y^*$  y  $Y^\circ$  no son toda la palabra  $Y$  y es el caso que no detallaremos.

Queremos estudiar ahora como se relacionan  $[\mathcal{W}, \mathcal{Z}]$  y  $[\mathcal{W}, \overline{\mathcal{Z}}]$ . Para esto vamos a necesitar la siguiente observación:

**Proposición 9.3.**  $(P, Q)$  es  $\mathcal{O}$ -linkeado si y sólo si  $(P, \overline{Q})$  es  $\mathcal{O}$ -linkeado. En ese caso tienen signos opuestos.

*Demostración.* Como siempre lo demostraremos por casos:

- $(P, Q) = (p_1 p_2, q_1 q_2)$   $(P, \overline{Q}) = (p_1 p_2, \overline{q_2 q_1})$   
 $(P, Q)$  verifica (1) si y sólo si  $o(c(\overline{p_1 q_1 p_2 q_2})) \neq 0$   
 $(P, \overline{Q})$  verifica (1) si y sólo si  $o(c(\overline{p_1 q_2 p_2 q_1})) \neq 0$   
y podemos ver que que las letras aparecen con orientación inversa.
- $(P, Q) = (p_1 Y p_2, q_1 Y q_2)$  si y sólo si  $(P, \overline{Q}) = (p_1 Y p_2, \overline{q_2 Y q_1})$  (recordar que escribimos  $Y = x_1 X x_2$ )  
 $(P, Q)$  verifica (2) si y sólo si  $o(c(\overline{p_1 q_1 x_1})) = o(c(p_2 q_2 \overline{x_2}))$   
 $(P, \overline{Q})$  verifica (3) si y sólo si  $o(c(\overline{q_1 p_1 x_1})) = o(c(q_2 p_2 \overline{x_2}))$   
y se verifica que  $o(c(\overline{p_1 q_1 x_1})) = -o(c(\overline{q_1 p_1 x_1}))$   $o(c(p_2 q_2 \overline{x_2})) = -o(c(q_2 p_2 \overline{x_2}))$ .
- $(P, Q) = (p_1 Y p_2, q_1 \overline{Y} q_2)$  si y sólo si  $(P, \overline{Q}) = (p_1 Y p_2, \overline{q_2 Y q_1})$   
 $(P, Q)$  verifica (3) si y sólo si  $o(c(q_2 \overline{p_1 x_1})) = o(c(\overline{q_1 p_2 \overline{x_2}}))$   
 $(P, \overline{Q})$  verifica (2) si y sólo si  $o(c(\overline{p_1 q_2 x_1})) = o(c(p_2 \overline{q_1 \overline{x_2}}))$   
y como antes, se verifica que  $o(c(q_2 \overline{p_1 x_1})) = -o(c(\overline{p_1 q_2 x_1}))$  y  $o(c(\overline{q_1 p_2 \overline{x_2}})) = -o(c(p_2 \overline{q_1 \overline{x_2}}))$ . ■

De esta manera podemos observar que como conjuntos  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$  y  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \overline{\mathcal{Z}})$  están en correspondencia biunívoca, y más aún como multisets, ya que por cada par linkeado  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$  con multiplicidad  $t$  tendremos  $(P, \overline{Q}) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \overline{\mathcal{Z}})$  con la misma multiplicidad. Notar también que si el par  $(P, Q)$  es de tipo (2) entonces el par  $(P, \overline{Q}) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{W}, \overline{\mathcal{Z}})$  es de tipo (3) y viceversa.

### 9.3. Relación entre $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$ y $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}^n, \mathcal{V}^m)$

Una de las preguntas que se plantean en [1] es la siguiente: Dados  $n$  y  $m$  dos enteros no nulos y sea  $\mathcal{V}$  una palabra cíclica primitiva y reducida. ¿La cantidad de términos del corchete entre  $\mathcal{V}^n$  y  $\mathcal{V}^m$  es igual a  $2|m.n|$  multiplicado por la cantidad mínima de puntos de intersección?

**Observación 9.4.** Empecemos observando la relación entre  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  y  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}^n, \mathcal{V}^m)$  para  $n, m \in \mathbb{N}$ . Recordemos que  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V}) = \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}^n)$  (como conjuntos) para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Por otro lado  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \mathbf{LP}_2(\mathcal{V}^n, \mathcal{V}^m)$  pues  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{V})$  está formado por pares

de subpalabras de alguna potencia natural de  $\mathcal{V}$ . Con lo cual, tomando  $N$  suficientemente grande  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V}) = \mathbf{LP}_1(\mathcal{V}^N) = \mathbf{LP}_2(\mathcal{V}^n, \mathcal{V}^m)$ . Así  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V}) = \mathbf{LP}_2(\mathcal{V}^n, \mathcal{V}^m)$  (como conjuntos).

En cuanto a la multiplicidad, por cada par  $(P, Q) \in \mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  se tienen  $n.m$  copias en  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}^n, \mathcal{V}^m)$ . Es decir que  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}^n, \mathcal{V}^m) = n.m\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$ , y recordando que  $\#\mathbf{LP}_1(\mathcal{V}) = 2\#l_\alpha$ , entonces en el desarrollo de  $[\mathcal{V}^n, \mathcal{V}^m]$  habrá a lo sumo  $nm2\#l_\alpha$  términos. En particular si  $n = m = 1$  entonces tenemos que  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  y  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{V})$  son iguales como conjuntos y más aún como multisets.

En [4] Chas y Krongold prueban lo siguiente:

**Teorema 9.5.** *Sea  $\mathcal{V}$  una clase de clase de conjugación del grupo fundamental, que además es primitiva (es decir que no sea potencia de otra) de una superficie orientada. Sean  $p$  y  $q$  dos enteros positivos distintos, donde alguno de ellos es por lo menos 3. La cantidad de términos (contados con la multiplicidad con la que aparezcan) del corchete de Goldman  $[\mathcal{V}^p, \mathcal{V}^q]$  es  $2.p.q$  veces la cantidad mínima posible de puntos de autointersección de representantes en su clase de conjugación.*

Gracias al desarrollo previo habíamos encontrado  $2nm\#l_\alpha$  como cota superior a la cantidad de términos en el desarrollo del corchete  $[\mathcal{V}^p, \mathcal{V}^q]$ , gracias a este teorema se sabe que (por lo menos para  $p$  y  $q$  distintos y uno de ellos mayor o igual a tres) estos términos son todos distintos, es decir en ese caso ningún término se simplifica.

**Observación 9.6.** Ahora compararemos  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  con  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{V}})$ . Recordemos que cada vez que el par  $(P, Q)$  está  $\mathcal{O}$ -linkeado donde  $P$  y  $Q$  son subpalabras de  $\mathcal{V}$ , tendremos que  $(P, \overline{Q})$  está  $\mathcal{O}$ -linkeado pensando a  $P$  como subpalabra de  $\mathcal{V}$  y  $\overline{Q}$  como subpalabra de  $\overline{\mathcal{V}}$ . De esta manera los conjuntos  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  y  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{V}})$  están en correspondencia biunívoca (y pasa lo mismo si los pensamos como multisets, es decir la multiplicidad es la misma).

El mismo razonamiento se podría utilizar para comparar  $\mathbf{LP}_1(\mathcal{V})$  con  $\mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ .



Figura 16: Por cada punto de autointersección de  $\mathcal{V}$  encontramos dos tanto en la intersección de  $\mathcal{V}$  con  $\mathcal{V}$  como en la intersección de  $\mathcal{V}$  con  $\overline{\mathcal{V}}$ .



### 9.3.1. Relación entre $[\mathcal{V}, \mathcal{V}]$ y $[\mathcal{V}, \overline{\mathcal{V}}]$

Una de las conjeturas citadas en [1] es la siguiente: una palabra cíclica reducida tiene un representante simple si y sólo si  $[\mathcal{V}, \overline{\mathcal{V}}] = 0$ .

Analizaremos

$$[\mathcal{V}, \overline{\mathcal{V}}] = \sum_{(P, \overline{Q}) \in \mathbf{LP}_2(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{V}})} \text{sgn}(P, \overline{Q}) \gamma(P, \overline{Q}).$$

Veamos lo que sucede por casos:

- $(P, Q)$  verifica (1) si y sólo si  $(P, \overline{Q})$  verifica (1) y en ese caso

$$\gamma(P, Q) = c(\overbrace{p_2 \dots p_1}^{W_1} \overbrace{q_2 \dots q_1}^{W_2})$$

y

$$\gamma(P, \overline{Q}) = c(p_2 \dots p_1 \overline{q_1} \dots \overline{q_2}) = c(\overbrace{p_2 \dots p_1}^{W_1} \overbrace{\overline{q_2} \dots \overline{q_1}}^{\overline{W}_2}).$$

O sea que  $\gamma(P, Q) = c(W_1 W_2)$  si y sólo si  $\gamma(P, \overline{Q}) = c(W_1 \overline{W}_2)$

- $(P, Q)$  verifica (2) si y sólo si  $(P, \overline{Q})$  verifica (3) y en ese caso

$$\gamma(P, Q) = c(\overbrace{p_2 \dots p_1 Y}^{W_1} \overbrace{q_2 \dots q_1 Y}^{W_2})$$

y

$$\gamma(P, \overline{Q}) = c(p_2 \dots p_1 \overline{q_1} \dots \overline{q_2}).$$

Y si permitimos escribir  $c(p_2 \dots p_1 \overline{q_1} \dots \overline{q_2}) = c(\overbrace{p_2 \dots p_1 Y}^{W_1} \overbrace{\overline{Y} \overline{q_1} \dots \overline{q_2}}^{\overline{W}_2})$

entonces también se verifica que  $\gamma(P, Q) = c(W_1 W_2)$  si y sólo si  $\gamma(P, \overline{Q}) = c(W_1 \overline{W}_2)$ .

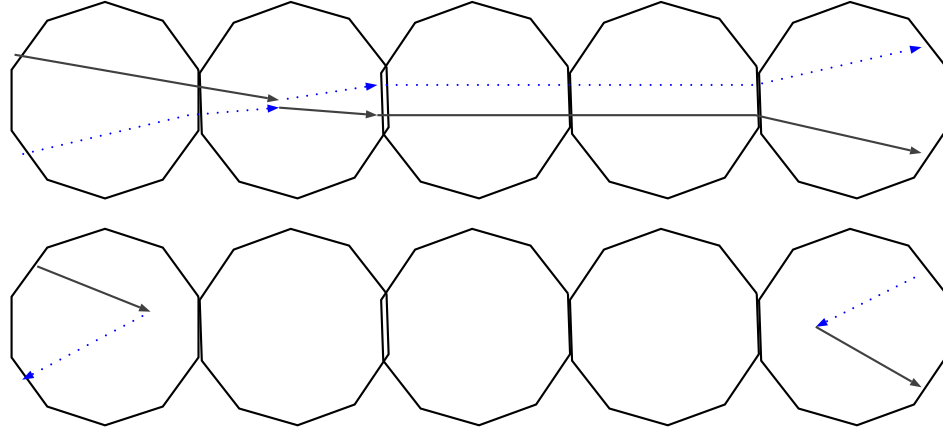
- $(P, Q)$  verifica (3) si y sólo si  $(P, \overline{Q})$  verifica (2) y en ese caso

$$\gamma(P, Q) = c(p_2 \dots p_1 q_2 \dots q_1)$$

y

$$\gamma(P, \overline{Q}) = c(\overbrace{p_2 \dots p_1 Y}^{W_1} \overbrace{\overline{q_1} \dots \overline{q_2} Y}^{\overline{W}_2}).$$

Y si otra vez permitimos escribir  $c(p_2 \dots p_1 q_2 \dots q_1) = c(\overbrace{p_2 \dots p_1 Y}^{W_1} \overbrace{\overline{Y} q_2 \dots q_1}^{W_2})$  entonces otra vez vale que  $\gamma(P, Q) = c(W_1 W_2)$  si y sólo si  $\gamma(P, \overline{Q}) = c(W_1 \overline{W}_2)$ .



Recordemos que  $\text{sgn}(P, Q) = -\text{sgn}(P, \bar{Q})$ .

Hemos llegado entonces a lo siguiente

**Lema 9.7.** *Si*

$$[\mathcal{V}, \mathcal{V}] = \sum_{(P, Q) \in \text{LP}_1(\mathcal{V})} \text{sgn}(P, Q) \gamma(W_1 W_2)$$

donde  $W_1$  y  $W_2$  son como en el análisis anterior.

$$[\mathcal{V}, \bar{\mathcal{V}}] = \sum_{(P, Q) \in \text{LP}_1(\mathcal{V})} -\text{sgn}(P, Q) \gamma(W_1 \bar{W}_2)$$

Recordemos que  $[\mathcal{V}, \mathcal{V}] = 0$ , veamos sin embargo en el siguiente ejemplo como este hecho no implica que  $[\mathcal{V}, \bar{\mathcal{V}}] = 0$ .

**Ejemplo 9.8.** Utilizaremos  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{V}$  como en el ejemplo 8.10. De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} [\mathcal{V}, \bar{\mathcal{V}}] &= c(a_2 a_3 \bar{a}_1 \bar{a}_1 \bar{a}_1 a_2 a_3 a_1 \bar{a}_3 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_2 a_1 a_1) + c(a_2 a_3 \bar{a}_1 \bar{a}_1 \bar{a}_1 a_2 a_3 a_1 a_1 \bar{a}_3 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_2 a_1) \\ &\quad - c(\bar{a}_1 \bar{a}_1 a_2 a_3 a_2 a_3 \bar{a}_1 \bar{a}_3 \bar{a}_2 a_1 a_1 a_1 \bar{a}_3 \bar{a}_2) - c(\bar{a}_1 a_2 a_3 a_2 a_3 \bar{a}_1 \bar{a}_1 \bar{a}_3 \bar{a}_2 a_1 a_1 a_1 \bar{a}_3 a_2) \neq 0 \end{aligned}$$

En orden cada uno de estos términos corresponde a los pares  $(Q, \bar{P}_1)$ ,  $(Q, \bar{P}_2)$ ,  $(P_1, \bar{Q})$  y  $(P_2, \bar{Q})$ . Las primeras siete letras de cada uno de estos términos forman un representante lineal de  $\mathcal{V}$ , mientras que las últimas siete letras corresponden a un representante lineal de  $\bar{\mathcal{V}}$ . Observar que ninguno de los términos se cancelan.

Veamos mediante diagramas la situación, en el primer diagrama se describe el término asociado a un par  $(P, Q)$  que verifique (2) y aparece en  $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ . En el segundo diagrama se describe el término asociado al par  $(P, \bar{Q})$  que verifica (3) y aparece en  $[\mathcal{V}, \bar{\mathcal{W}}]$ .

Uno podría preguntarse si la fórmula que aparece en el lema anterior podría ser generalizada cambiando  $[\mathcal{V}, \mathcal{V}]$  por  $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$  y  $[\mathcal{V}, \bar{\mathcal{V}}]$  por  $[\mathcal{V}, \bar{\mathcal{W}}]$ . Veremos en un ejemplo que esto no es posible.

**Ejemplo 9.9.** Sean  $\mathcal{O} = c(a_1 a_2 a_3 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3)$ ,  $\mathcal{V} = c(a_1 a_2 \bar{a}_1 a_3)$  y  $\mathcal{W} = c(a_2 \bar{a}_1 a_3)$ .  $P = a_1 a_2 \bar{a}_1 a_3 a_1$  subpalabra de  $\mathcal{V}^2$  y  $Q = a_3 a_2 \bar{a}_1 a_3 a_2$  subpalabra de  $\mathcal{W}^2$ . Entonces el par  $(P, Q)$  es linkeado, de tipo (2) y signo positivo.

El término correspondiente en  $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$  es  $c(\overbrace{a_1 a_2 \bar{a}_1 a_3}^{V_1} \overbrace{a_2 \bar{a}_1 a_3}^{W_1})$ .

El término correspondiente en  $[\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{W}}]$  es  $\mathcal{Z} = c(a_1 \bar{a}_3 a_1 \bar{a}_2)$ .

Observar que  $\mathcal{Z} \neq c(V_1 \bar{W}_1)$ .

## A. Multisets

Un multiset es una generalización de un conjunto. Mientras que en un conjunto cada elemento se cuenta una única vez, en un multiset cada elemento tiene asociada una multiplicidad. Por ejemplo  $\{a, a\}$  es el mismo conjunto que  $\{a\}$  pero como multisets son distintos, ya que el primero tiene “dos elementos” y el segundo tiene sólo uno.

Esta idea se puede formalizar de la siguiente manera: un **multiset** es un par  $(A, m)$  donde  $A$  es algún conjunto y  $m$  es una aplicación  $m : A \rightarrow \mathbb{N}_0$  el conjunto  $A$  es el conjunto subyacente y para cada  $a \in A$  la multiplicidad (es decir la cantidad de veces que aparece este elemento) es el número  $m(a)$ .

En los multisets como en los conjuntos, se definen operaciones como unión e intersección, el producto cartesiano de dos multisets, etc.

La unión de dos multisets será otro multiset donde cada elemento perteneciente a la unión de los conjuntos subyacentes tendrá como multiplicidad la suma de las multiplicidades que tenía en cada uno de los multisets originales (esta última no es la única definición posible para la unión de multisets, se puede definir la multiplicidad de un elemento perteneciente a la unión como el máximo entre las multiplicidades que tenía el elemento en cada uno de los conjuntos subyacentes).

La intersección de dos multisets será también otro multiset tal que su conjunto subyacente será la intersección de los conjuntos y la multiplicidad de cada uno de ellos será el mínimo entre las anteriores multiplicidades.

El producto cartesiano de dos multisets será otro multiset que tendrá como conjunto subyacente el producto cartesiano de los conjuntos subyacentes. La multiplicidad de cada elemento  $(a, b)$  en el producto será el producto de las multiplicidades de los elementos  $a$  y  $b$  en sus respectivos multisets.

Un subconjunto de un multiset es otro multiset tal que los conjuntos subyacentes se contienen y la multiplicidad para cada elemento del subconjunto es menor o igual a la multiplicidad en el multiset original.

Podemos también multiplicar un multiset por un número natural  $n$ , obteniendo otro multiset, y eso significa que el conjunto de base es el mismo pero la multiplicidad de cada elemento se multiplicará por  $n$ . Observar que esto es coherente con la definición de unión de multisets comentada anteriormente. Es decir  $nA$  es el multiset  $\underbrace{A \cup A \cup \dots \cup A}_{n\text{-veces}}$  donde para cada elemento  $a \in A$  con multiplicidad  $t$  tendrá multiplicidad  $nt$  en  $nA$ .

La cardinalidad de un multiset (finito) es la suma de las multiplicidades de cada elemento del conjunto subyacente.

## B. Producto libre de grupos

Dado que vamos a considerar grupos que no necesariamente sean abelianos, escribiremos al grupo  $G$  en forma multiplicativa. Es decir, llamaremos 1 al neutro del

grupo,  $x^n$  será el producto de  $n$  copias de  $x$  para cada  $x \in G$  y  $x^{-1}$  notará el inverso de  $x$ .

En esta sección nos dedicaremos a estudiar un concepto similar al de la suma directa para grupos abelianos, pero para grupos arbitrarios, se denomina producto libre de grupos.

Dado  $G$  un grupo y  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$  una familia de subgrupos de  $G$  diremos que estos subgrupos generan  $G$  si para todo elemento  $x \in G$  existe una sucesión finita  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de elementos de los grupos  $G_\alpha$  tal que  $x = x_1 x_2 \dots x_n$ . Tal sucesión se denomina palabra (de longitud  $n$ ) en los grupos  $G_\alpha$  y se dice que representa al elemento  $x \in G$ .

Observar que al no contar con la conmutatividad en el grupo, en general, no es posible reorganizar el producto  $x_1 x_2 \dots x_n$  para agrupar los que pertenecen al mismo grupo. Pero si es posible que la escritura no sea única, es decir si  $x_i$  y  $x_j$  pertenecen al mismo subgrupo  $G_\alpha$  entonces también podremos representar al elemento con una palabra de longitud  $n - 1$ . Del mismo modo si alguno de los elementos es el neutro del grupo, este se podría suprimir y así obtener una palabra de menor longitud que representa al mismo elemento.

Aplicando estas operaciones de reducción, se puede obtener en general una palabra representando a  $x$  de forma  $y_1 y_2 \dots y_m$  donde no existe ningún grupo  $G_\alpha$  que contenga a dos elementos consecutivos y donde  $y_i \neq 1$  para todo índice  $i$ . Tal palabra se denomina reducida. Esta discusión no se aplica si el elemento es el neutro ya que en este caso se podría representar al neutro de la siguiente manera  $x.x^{-1}$ . En consecuencia, utilizaremos el convenio de que el conjunto vacío es una palabra reducida (de longitud cero) que representa el elemento neutro de  $G$ . Con este convenio es cierto que si los grupos  $G_\alpha$  generan  $G$  entonces todo elemento de  $G$  puede ser representado por una palabra reducida en los elementos de los grupos  $G_\alpha$ .

Observar si  $x = x_1 x_2 \dots x_n$  e  $y = y_1 y_2 \dots y_n$  entonces  $x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_n$  representa a  $xy$  pero puede que no sea reducida.

**Definición B.1.** Sea  $G$  un grupo, sea  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$  una familia de subgrupos de  $G$  que al mismo tiempo generan  $G$ . Supongamos que  $G_\alpha \cap G_\beta$  está formado sólo por el elemento neutro cuando  $\alpha \neq \beta$ . Diremos que  $G$  es el *producto libre* de los grupos  $G_\alpha$  si para cada  $x \in G$  existe una única palabra reducida en los grupos  $G_\alpha$  que representa a  $x$ . En este caso escribiremos

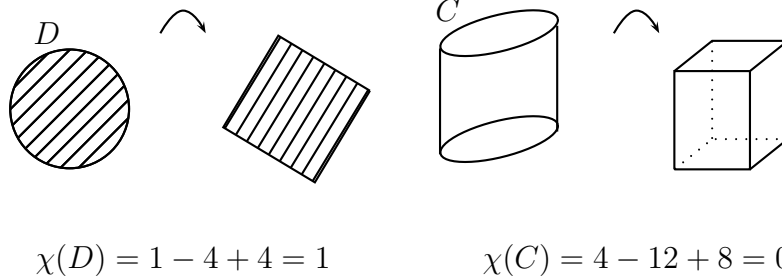
$$G = \prod_{\alpha \in J}^* G_\alpha$$

o, en caso finito,  $G = G_1 * G_2 * \dots * G_n$ . □

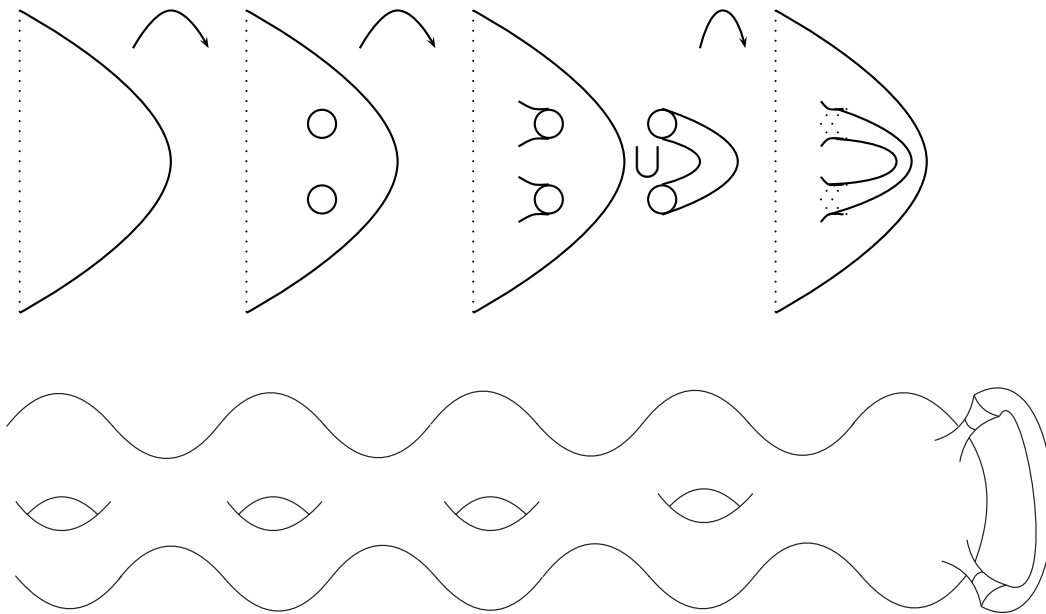
## C. Característica de Euler y Mayer-Vietoris

En este apéndice, vía Mayer-Vietoris, mostraremos con diagramas cómo varía la característica de Euler al agregar un agujero o una manija a una superficie.

Algunos cálculos previos usando la fórmula  $\chi = C - A + V$ :



Utilizando el cálculo anterior, veremos como cambia la característica de Euler al tapar dos agujeros de una superficie con un cilindro.

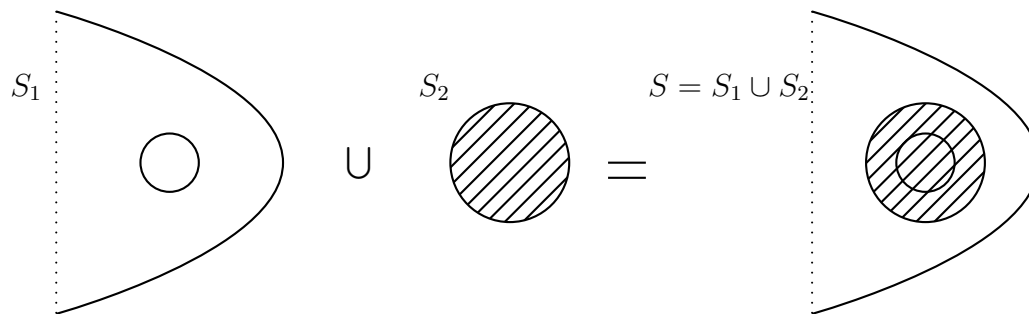


Llamemos  $S$  a la superficie original,  $S^*$  a la superficie resultante después de remover los dos discos,  $C$  al cilindro que se ve en la figura y  $S^* \cup C$  a la superficie resultante después de agregar una manija a la superficie  $S^*$ .

Observar que  $S^* \cap C$  es la unión disjunta de dos cilindros, que por la cuenta del comienzo y Mayer-Vietoris tiene característica de Euler 0.

$$\chi(S^* \cup C) = \chi(S^*) + \underbrace{\chi(C)}_0 - \underbrace{\chi(S^* \cap C)}_0.$$

En otras palabras, tapar dos agujeros con un asa no cambia la característica de Euler.



Pasaremos ahora a analizar lo que sucede si a una superficie se le quita un disco. En el diagrama anterior se representa la situación:

Llamaremos  $S$  a la superficie original,  $S_1$  a la superficie resultante de haber quitado un disco y  $S_2$  a un disco. Por Mayer-Vietoris se tiene que

$$\chi(S) = \chi(S_1 \cup S_2) = \chi(S_1) + \underbrace{\chi(S_2)}_1 - \underbrace{\chi(S_1 \cap S_2)}_0$$

es decir

$$\chi(S) = \chi(S_1) + 1$$

Se puede observar entonces que quitarle un disco a una superficie hace que la característica de Euler baje en una unidad. Generalizando esta idea, quitar  $n$  discos baja la característica de Euler en  $n$  unidades.

## Referencias

- [1] Chas, Moira. Combinatorial Lie bialgebras of curves on surfaces. arXiv:math/0105178v2[math.GR](2006)
- [2] Goldman, William M., Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. Invent. Math. 85, no. 2,(1986) 263-302.
- [3] Turaev, Vladimir G., Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 24, no. 6, (1991) 635–704.
- [4] Chas, Moira. Krongold, Fabiana. An algebraic characterization of simple closed curves on surfaces with boundary. arXiv:0801.3944v4[math.GT](2009)
- [5] Munkres, James. Topología 2<sup>a</sup> edición
- [6] John M. Lee Introduction to topological manifolds. Graduate Texts in Mathematics. 202. New York, NY: Springer. (2000).