



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teoría de Auslander-Reiten y teorema de Gabriel

Werner Germán Busch

Director: Marco Farinati

Fecha de Presentación: 23 de noviembre de 2017

Agradecimientos

Quiero agradecer ante todo a mi madre, que me bancó en este largo trayecto. Por su cariño, su amor y sus fuerzas, cualquier agradecimiento no alcanzaría a hacer justicia a la verdad.

A mi director de tesis Marco, que sabe casi ∞ sobre álgebra, soportó mis preguntontas, siempre tuvo humor y buena onda y me ayudó a que esta tesis sea lo que es.

Al jurado de esta tesis, por su tiempo en leer esta tesis.

Mi familia, que me bancó en este largo trayecto. A mi hermana, que quiero muchísimo, aunque nos peleemos. A mi abuela, que siempre pregunta cuándo me voy a recibir. A Jorge, mi cuñado y amigo. A mis amigos de tecnópolis y de la facu, Luis, Mauro y Yamenk.

Contents

Agradecimientos	3
Introducción	5
1 Representaciones de quivers	7
1.1 Definiciones, ejemplos, resultados	7
1.2 Suma directa e indescomponibles	10
1.3 Subrepresentaciones, funtor Hom, pull back y push out	12
1.4 Representaciones indescomponibles de un \mathbb{A}_3	18
2 Resoluciones proyectivas	22
2.1 Proyectivos e inyectivos	22
2.2 Resoluciones	27
2.3 La categoría de representaciones es hereditaria	31
2.4 Resoluciones minimales	32
3 Quivers con relaciones y el álgebra de caminos	36
3.1 El álgebra de caminos	37
3.2 Equivalencia con $Mod_{\frac{kQ}{I}}$	43
3.3 Extensiones, Ext y dimensión homológica	46
4 Traslación de Auslander-Reiten	51
4.1 Dualidad	51
4.2 $Hom(-, A)$	53
4.3 Funtor de Nakayama	55
4.4 Traslación de Auslander-Reiten	56
4.5 Categoría estable	61
5 Teoría de Auslander-Reiten	68
5.1 Morfismos casi partidos	68
5.2 Morfismos irreducibles	71
5.3 Quiver de Auslander Reiten	78
5.4 Fórmulas de Auslander-Reiten	84
6 Teorema de Gabriel	89
6.1 Forma cuadrática de un quiver	92
6.2 Raíces de una forma cuadrática	99
6.3 Teorema de Gabriel	100

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es dar una introducción, desarrollada y con ejemplos, de las bases de la teoría de representaciones de quivers finitos. Para eso utilizaremos las herramientas potentísimas desarrolladas conjuntamente por Maurice Auslander e Idun Reiten, cuyo concepto central es el de sucesión exacta que casi se parte (*almost split*). Seguimos principalmente el libro de Ralf Schiffler, *Quiver representations* (Springer, 2014), consultando el excelente libro de referencia de álgebras asociativas de Skowronński y Yamagata, *Frobenius Algebras I*.

En la tesis se puso énfasis en proveer ejemplos de la teoría, utilizando resultados conocidos en casos concretos, como el estudio del diagrama $\tilde{\mathbb{A}}_3$ o el cálculo de algunos quivers AR o de la dimensión homológica de su álgebra de caminos. Son ejemplos de resultados conocidos pero que no se suelen dar en la literatura y en este trabajo se los describe explícitamente. Por otra parte también se da la demostración de algunos pequeños resultados ya conocidos pero cuya demostración usualmente no se encuentra en los trabajos del tema, como el teorema 2.4. o 4.2. En otros casos se dan demostraciones simplificadas de las encontradas en los libros consultados, como en el lema 4.26 o 5.13; y en otros casos se amplían, aclaran y completan los detalles de algunos resultados como el teorema 6.16, 5.29 o 4.37.

Un quiver (carcaj en español) es simplemente un diagrama hecho de vértices y flechas que conectan esos vértices. En principio, parece un objeto perteneciente a la teoría de grafos, pero las preguntas que la teoría de quivers y la teoría de grafos se hacen son completamente distintas.

¿Por qué nos puede interesar estudiar esta clase de objetos? Empecemos por decir que a un quiver se le puede asociar una estructura algebraica natural, que es la de k -álgebra, con base los caminos del carcaj, la suma formal, y la concatenación de caminos como producto. Una posible respuesta a la pregunta es que el estudio de las k -álgebras (asociativas, unitarias, de dimensión finita) está íntimamente relacionada con esta estructura algebraica asociada al quiver. Más aún: estudiar la categoría de módulos finitamente generados sobre una k -álgebra es esencialmente lo mismo que estudiar el comportamiento algebraico de ese quiver. Así, podemos convertir un problema de algo que puede ser extremadamente abstracto en estudiar un diagrama de vértices y flechas.

El elemento principal para estudiar los quivers son sus *representaciones*, que no es más que substituir los vértices por espacios vectoriales, y las aristas por transformaciones lineales. Es decir, ahora pensamos al quiver como un diagrama de transformaciones lineales; y entonces podemos hacer álgebra. En la Parte 1 del trabajo damos las definiciones básicas de la teoría, y las operaciones que podemos hacer con las representaciones: suma directa, pull back, push out, aplicarles el funtor Hom , etc. También damos una primera introducción al llamado quiver de Auslander Reiten, conformado por las representaciones de tipo indescomponible como vértices, y morfismos *indescomponibles* como aristas.

En la Parte 2 continuamos el estudio de la categoría de representaciones, investigando sus representaciones proyectivas, cuya definición es calcada a la definición usual para R -módulos. También probamos que la categoría de representaciones indescomponibles tiene una propiedad

muy especial, que es ser *hereditaria*: toda subrepresentación de una representación proyectiva, es proyectiva también. Veremos también ciertas resoluciones proyectivas minimales, que son las resoluciones proyectivas "más chicas" en un sentido preciso.

La parte 3 establece el puente entre la teoría de representaciones y el álgebra de módulos, demostrando que la primera es (categóricamente) exactamente lo mismo que una categoría de módulos sobre el álgebra de caminos. También hacemos un poco de álgebra homológica, definiendo el funtor *Ext* y la dimensión homológica de un módulo. Adyacente al álgebra homológica, y utilizando algunas de sus técnicas, la parte 4 estudia una serie de funtores, especialmente el *functor traslación* de Auslander Reiten y el funtor de Nakayama, que sirve para calcularlo. La traslación es un ingrediente fundamental dentro de la teoría. La traslación en principio es tan sólo una asignación, pero para definirlo como funtor es necesario pasar a un cociente de la categoría, mirando a los módulos salvo proyectivos. Este objeto es la *categoría estable* de representaciones.

En la quinta parte desarrollamos la base de la teoría de Auslander-Reiten (A-R), introduciendo el concepto de morfismo que casi se parte e irreducible. La importancia de estos conceptos viene de que junto con la traslación, forman los ingredientes principales del quiver AR, que se forma a partir de un carcaj con sus representaciones indescomponibles. El quiver AR es una herramienta muy poderosa a la hora de estudiar las representaciones de un quiver y, por lo tanto, la categoría de módulos sobre una k -álgebra.

Finalmente para terminar el trabajo demostramos un resultado de Pierre Gabriel, introductorio pero muy importante, que clasifica completamente los tipos de carcaj que tienen finitas representaciones indescomponibles. Es tal vez el primer teorema de clasificación de quivers que se puede dar dentro de la teoría, y sirve como excelente punto de partida para estudios adicionales en la clasificación de estos objetos.

Parte 1

Representaciones de quivers

1.1 Definiciones, ejemplos, resultados

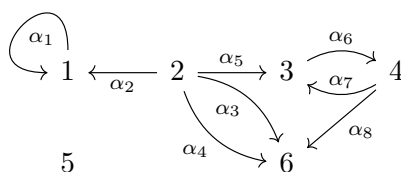
Introducción

El objeto de estudio subyacente en este trabajo son las representaciones de quivers. Recordamos someramente las definiciones básicas, ejemplos y resultados. La mayoría de los resultados (excepto tal vez el teorema de Krull-Schmidt) son inmediatos y por eso se omite su demostración, el lector interesado puede encontrarlos por ejemplo en [Sch14].

Definición 1.1. Un **carcaj**, o **quiver** en inglés, es el conjunto de cuatro datos $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ donde Q_0 y Q_1 son conjuntos y s y t son funciones, $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$. Q_0 es el conjunto de "vértices", Q_1 el conjunto de "flechas", y s y t son el "origen" y el "final" de la flecha respectivamente. (*source* y *target* en inglés)

Si bien podemos decir simplemente que $(\{1, 2\}, \{\alpha\}, s, t)$ con $s(\alpha) = 1, t(\alpha) = 2$ es un carcaj, los carcajs se representan en general, gráficamente, quedando toda la información de vértices, flechas, orígenes y finales expresada en su grafo, que en este caso sería $1 \xrightarrow{\alpha} 2$

Ejemplo 1.2.



El carcaj no es **conexo** pues no hay ninguna flecha que empiece ó termine en 5. Además notar que de 6 no sale ninguna flecha; un vértice del que no sale ninguna flecha se llama "sumidero" (**sink** en inglés). En cambio al 2 no llega ninguna flecha; un vértice de este estilo se denomina "fuente" (o **source**). El ejemplo muestra que un carcaj admite en principio mucha libertad: puede tener lazos (o *loops* en inglés, flechas que empiezan y terminan en el mismo vértice), dos ó más flechas con el mismo origen, dos ó más flechas con el mismo final o una secuencia de flechas que empiece y termine en el mismo vértice. La única restricción general en todo el trabajo es que la cantidad de flechas y vértices será finita.

Ejemplo 1.3. Una clase muy importante de quivers son los de tipo Dynkin. Estos tienen como grafo subyacente (es decir, el grafo que se obtiene olvidándose las direcciones de las flechas) un diagrama de Dynkin. Esta clase de grafos es notable porque aparecen en la clasificación

Un elemento $x \in M$ es una upla $\{x_i\}_{i \in Q_0}$ donde cada $x_i \in M_i$. Dada una numeración de los vértices, el **vector dimensión** de una representación es el vector $\underline{\dim}(M) = (\dim(M_i))_{i \in Q_0}$. Siempre que hablemos de vector dimensión supondremos a los vértices de Q numerados.

Definición 1.6. Dadas dos representaciones $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ y $N = (N_i, \tilde{\varphi}_\alpha)$, un **morfismo de representaciones** $f: M \rightarrow N$ es una colección de transformaciones lineales $\{f_i\}_{i \in Q_0}: M_i \rightarrow N_i$ tal que para toda flecha $\alpha: i \rightarrow j$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{f_i} & N_i \\ \varphi_\alpha \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi}_\alpha \\ M_j & \xrightarrow{f_j} & N_j \end{array}$$

Se denota como $\text{Hom}_Q(M, N)$ al conjunto de morfismos entre M y N . Usualmente nos olvidaremos de escribir el Q si el carcaj está fijo.

Observación 1.7. Dadas dos representaciones M y N , $\text{Hom}_Q(M, N)$ es un k espacio vectorial con el producto por escalares y la suma coordenada a coordenada.

Ejemplo 1.8. Veamos algún ejemplo de un morfismo entre representaciones. Sea Q el carcaj del ejemplo 1.5 y las representaciones

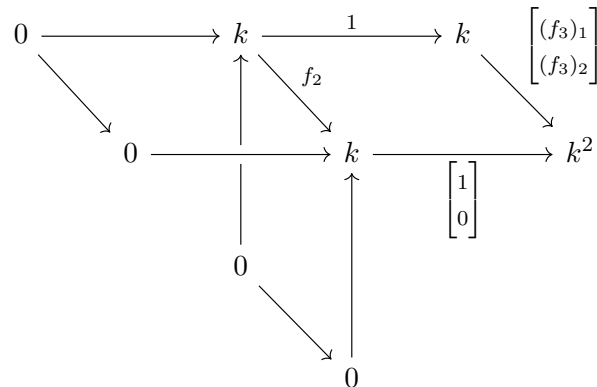
$$\begin{array}{l} M = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} & k \\ & & \uparrow 1 & & \\ & & k & & \end{array} \\ M' = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} & k \\ & & \uparrow 0 & & \\ & & 0 & & \end{array} \\ M'' = \begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 \\ & & \uparrow 0 & & \\ & & 0 & & \end{array} \end{array}$$

Calculemos $\text{Hom}(M, M')$: Un morfismo $f: M \rightarrow M'$ tiene la forma $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ con $f_i: M_i \rightarrow M'_i$ y debe cumplir que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} & k & & \\ & \searrow 0 & \uparrow & \searrow f_2 & & \searrow f_3 & \\ & & 0 & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{1} & k \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & k & & \\ & & & & \searrow 0 & & \\ & & & & & \uparrow 0 & \\ & & & & & 0 & \end{array}$$

f queda determinada por las transformaciones lineales multiplicar por f_2 y por f_3 . Entonces $f_2 = 1 \cdot f_2 = f_3 \cdot 1 = f_3$ por la conmutatividad para la flecha $\alpha_3 : 2 \rightarrow 3$, mientras que, usando la conmutatividad para la flecha $\alpha_2 : 4 \rightarrow 2$, $f_2 \cdot 1 = 0$ entonces $f_2 = f_3 = 0$ luego $\text{Hom}(M, M') = 0$

$\text{Hom}(M', M'') : \text{Sea } f : M' \rightarrow M'' \text{ un morfismo de representaciones como antes, entonces el sig. diagrama conmuta:}$



luego $\begin{bmatrix} f_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_3)_1 \\ (f_3)_2 \end{bmatrix}$

Entonces $\text{Hom}(M', M'') = \{(f_2, (f_3)_1, (f_3)_2) : \text{los diagramas conmutan}\} = \{(f_2, f_2, 0) : f_2 \in k\} \cong k$

Un morfismo $f : M \rightarrow N$ es un **monomorfismo** si f_i es una transformación lineal inyectiva para todo i , **epimorfismo** si cada f_i es sobreyectiva y un **isomorfismo** si cada f_i es un isomorfismo.

1.2 Suma directa e indescomponibles

Una operación muy importante para estudiar representaciones es la suma directa.

Definición 1.9. Dadas dos representaciones M y M' de Q se define la **suma directa** como la representación

$$M \oplus M' = (M_i \oplus M'_i, \varphi_\alpha \oplus \psi_\alpha)$$

Notar que matricialmente, el morfismo se escribe como $\begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \psi_\alpha \end{bmatrix}$.

Ejemplo 1.10. Si Q es $1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$ y

$$M = k \xrightarrow{1} k \leftarrow 0$$

$$M' = k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k$$

entonces

$$M \oplus M' = k \oplus k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} k \oplus k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} 0 \oplus k$$

que es lo mismo que

$$M'' = k^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} k^3 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k .$$

Por lo tanto M'' se puede escribir como (i.e., es isomorfa a) la suma de dos representaciones. Esto nos da la idea de definir cuando una representación *no* es la suma de dos representaciones no triviales. Las representaciones indescomponibles hacen honor a su nombre y funcionarán como los "números primos" de la categoría, a partir de las cuales podemos construir todas las otras representaciones.

Definición 1.11. Una representación M es **indescomponible** si cada vez que $M \cong M \oplus M'$ entonces $M = 0$ o $M' = 0$

Ejemplo 1.12. Si $Q =$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & \searrow^{\alpha_1} & & \\ & & & 2 & \xleftarrow{\alpha_3} 3 \\ & & \nearrow_{\alpha_4} & & \\ & & 4 & & \end{array}$$

entonces

$$M = \begin{array}{ccc} k & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \\ & \searrow & \\ & & k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k \\ & \nearrow & \\ k & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \end{array}$$

es indescomponible. En efecto, supongo que $f : M \xrightarrow{\sim} S \oplus L$ es un iso, con $S = (S_i, \mathfrak{s}_\alpha)$ y $L = (L_i, \mathfrak{l}_\alpha)$. Vamos a demostrar que $S = 0$ o $L = 0$. Para hacerlo, procedemos por casos:

Caso 1: Veamos que si una de las representaciones S o L tiene sus coordenadas 1 y 4 igual a cero, entonces debe ser la representación nula. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $S_1 = S_4 = 0$. En efecto, como $S_1 = S_4 = 0$, entonces $L_1 = L_4 = k$. Las transformaciones lineales de M y $S \oplus L$ correspondientes a la flecha α_1 son $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \mathfrak{s}_{\alpha_1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{l}_{\alpha_1} \end{bmatrix}$ respectivamente. Además $\mathfrak{s}_{\alpha_1} = 0$ porque $S_1 = 0$, entonces la transformación lineal asociada a α_1 de $S \oplus L$ es: $0 \oplus L_1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{l}_{\alpha_1} \end{bmatrix}} S_2 \oplus L_2$, que es lo mismo que $L_1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{l}_{\alpha_1} \end{bmatrix}} S_2 \oplus L_2$. Entonces como f es un morfismo, por la definición usada con la flecha α_1 el siguiente diagrama debe conmutar

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 \\ f_1 \downarrow \cong & & \cong \downarrow f_2 \\ k = L_1 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{l}_{\alpha_1} \end{bmatrix}} & S_2 \oplus L_2 \end{array}$$

luego $f_2(e_1) \in L_2$. Análogamente

$$\begin{array}{ccc}
k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & k^2 \\
f_4 \downarrow \cong & & \cong \downarrow f_2 \\
k = L_4 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ \iota_{\alpha_4} \end{bmatrix}} & S_2 \oplus L_2
\end{array}$$

entonces $f_2(e_2) \in L_2$. Luego $\text{Im}(f_2) \subseteq L_2$ y como es un iso eso significa $S_2 = 0$ y en consecuencia $\mathfrak{s}_{\alpha_3} = 0$. Para terminar, como lo siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc}
k^2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} & k \\
f_2 \downarrow \cong & & \cong \downarrow f_3 \\
k^2 = 0 \oplus L_2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \iota_{\alpha_3} \end{bmatrix}} & S_3 \oplus L_3
\end{array}$$

En el caso que $S_3 \neq 0$ entonces $L_3 = 0$ y $\text{Im}(f_3) \subseteq S_3$ y la composición del lado derecho daría cero, lo que significaría que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Ker}(f_2)$ absurdo pues es iso.

Caso 2: Supongo que $S_1 = 0$ y $S_4 = k$. Luego $L_1 = k$ y $L_4 = 0$. Entonces tendría que, por ser morfismo de representaciones, $f_2(e_1) \in L_2$ y $f_2(e_2) \in S_2$. Y por lo tanto $f_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ no pertenece a S_2 , (si lo hiciera, $f_2(e_1)$ pertenecería también a S_2), y tampoco pertenece a L_2 (si lo hiciera, $f_2(e_2)$ pertenecería a L_2). Pero como $S_3 \oplus L_3 = k$ entonces $S_3 = 0$ o $L_3 = 0$ lo que implica que $f_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \in L_2$ o $\in S_2$, absurdo. Entonces $S = 0$ o $L = 0$

Los indescomponibles permiten reducir el problema de estudiar todas las representaciones de un quiver a estudiar solamente sus representaciones indescomponibles. La razón de esto es exactamente el teorema de Krull-Schmidt. Este teorema vale en general para la categoría de A módulos finitamente generados sobre cualquier k álgebra de dimensión finita,

Teorema 1.13. (*Krull-Schmidt*): Sea Q un carcaj y M una representación de Q . Entonces

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$$

con M_i representaciones indescomponibles. Además la descomposición es única, es decir, si $M \cong M'_1 \oplus M'_2 \oplus \dots \oplus M'_t$ entonces $t = n$ y la nueva descomposición es un reordenamiento.

Demostración. Ver por ejemplo [SY12] □

1.3 Subrepresentaciones, functor Hom, pull back y push out

Dado un carcaj Q la categoría Rep_Q tiene como objetos las representaciones de Q y como objetos a los morfismos entre representaciones.

Todas las definiciones usuales de subobjetos, cocientes y sucesiones exactas existen en esta categoría, y valen los teoremas usuales. Esto no es coincidencia pues veremos más adelante que la categoría de representaciones efectivamente es isomorfa a la categoría de módulos finitamente generados sobre una cierta k -álgebra.

Definición 1.14. Dada una representación $M = (M_i, \varphi_\alpha)$, una **subrepresentación** de M es una representación (N_i, ψ_α) con un morfismo inyectivo $\iota : M \hookrightarrow N$. En general podemos asumir, identificando a N con su imagen, que $N_i \leq M_i$ es un subespacio vectorial de M_i y $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{N_i}$. Es decir, una subrepresentación es un subconjunto tal que la inclusión es un morfismo de representaciones.

Notaremos que H es una subrepresentación de M con el símbolo $H \ll M$.

Observación 1.15.

- Si $N \ll M$, $Q \ll M$ y $Q \subseteq N$ entonces $Q \ll N$
- Si $N \ll M$ y $Q \ll M$, $N \cap Q \ll M$

Definición 1.16. Dado un morfismo de representaciones $f : M \rightarrow N$, con $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ se define el **núcleo** de f como la representación $\text{Ker}(f) := (\{\text{Ker}(f_i)\}_i, \varphi_\alpha|_{\text{Ker}(f)})$

Observación 1.17. El núcleo de $f : M \rightarrow N$ es una subrepresentación de M .

Definición 1.18. Dada una subrepresentación N de M , con $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ y $N = (N_i, \varphi_\alpha|_{N_i})$ se define el cociente $\frac{M}{N}$ como la representación $\frac{M}{N} := (\{\frac{M_i}{N_i}\}_i, \tilde{\varphi}_\alpha)$ donde $\tilde{\varphi}_\alpha$ es el morfismo inducido por φ_α en el cociente.

Observación 1.19. $\frac{M}{N}$ es una representación de Q y $\pi : M \rightarrow \frac{M}{N}$ la proyección al cociente es un morfismo suryectivo.

Definición 1.20. Dado un morfismo $f : M \rightarrow N$, $N = (N_i, \psi_\alpha)$ **la imagen** de f es una representación que notamos $\text{Im}(f)$

$$\text{Im}(f) := (\text{Im}(f_i)_i, \psi_\alpha|_{\text{Im}(f)})$$

Como antes, $\text{Im}(f)$ es una representación.

Teorema 1.21. *Primer teorema de isomorfismo: Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo*

$$\text{Im}(f) \cong \frac{M}{\text{Ker}(f)}$$

Observación 1.22. La categoría Rep_Q con la suma, núcleos y cocientes ya definidos es una categoría abeliana.

Funtor Hom y sucesiones exactas

Definición 1.23. Una sucesión de morfismos de representaciones

$$\dots \rightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \dots$$

es **exacta** si $\text{Ker}(f_i) = \text{Im}(f_{i-1}) \quad \forall i$.

Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

Es decir f es inyectiva, g es sobreyectiva y $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$

Ejemplo 1.24. Sea $Q = 1 \rightarrow 2$ y

$$S(1) := k \rightarrow 0 \quad P(1) := k \xrightarrow{1} k \quad S(2) := 0 \rightarrow k$$

entonces

$$0 \rightarrow S(2) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} S(1) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta, donde f es el morfismo $f = (0, 1)$ y $g = (1, 0)$ (comprobar que f y g son morfismos de representaciones).

Definición 1.25. Un morfismo $f : M \rightarrow N$ es

- una **sección** si existe un morfismo $s : N \rightarrow M$ tal que $s \circ f = Id_M$
- una **retracción** si existe un morfismo $r : N \rightarrow M$ tal que $f \circ r = Id_N$
- Una sucesión exacta corta $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ **se parte** si f es una sección.

Teorema 1.26. Dada una sucesión exacta de representaciones

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0 \text{ son equivalentes:}$$

1. f es una sección
2. g es una restricción
3. existe un isomorfismo $\psi : M \rightarrow L \oplus N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \cong \downarrow \psi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{i} & L \oplus N & \xrightarrow{P_N} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Demostración. Reutilizar las demostraciones para módulos. □

Ejemplo 1.27. En el ejemplo 1.22 la sucesión exacta no se parte, pues $f : S(2) \rightarrow M$ no es una sección. En efecto, si $s : M \rightarrow S(2)$ es un morfismo de representaciones,

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{1} & k \\ s_1 \downarrow & & \downarrow s_2 \\ 0 & \longrightarrow & k \end{array}$$

Luego $s = (s_1, 0)$ entonces $s_2 \circ f_2 = 0 \neq Id_{S(2)_2} = Id_k$

Funtor Hom

Como vimos, dadas dos representaciones M y N , $\text{Hom}(M, N)$ es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares coordenada a coordenada. Tenemos así un funtor covariante $\text{Hom}(M, -)$

$$\begin{aligned} \text{Hom}(M, -) : \text{Rep}_Q &\longrightarrow \text{Vect}_k \\ N &\longrightarrow \text{Hom}(M, N) \\ (f : N \longrightarrow S) &\longrightarrow (f_* : \text{Hom}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}(M, S)) \end{aligned}$$

con $f_*(g) = f \circ g$

y un funtor contravariante $\text{Hom}(-, N)$

$$\begin{aligned} \text{Hom}(-, N) : \text{Rep}_Q &\longrightarrow \text{Vect}_k \\ M &\longrightarrow \text{Hom}(M, N) \\ (f : M \longrightarrow S) &\longrightarrow (f^* : \text{Hom}(S, N) \longrightarrow \text{Hom}(M, N)) \end{aligned}$$

con $f^*(g) = g \circ f$

Teorema 1.28. Sea $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión en Rep_Q . Entonces la sucesión es exacta si y sólo si la siguiente sucesión es exacta para todo $X \in \text{Rep}_Q$

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X, L) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(X, M) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(X, N)$$

Esto nos dice que el funtor $\text{Hom}(X, -)$ es exacto a izquierda, y efectivamente no siempre manda sobreyectivos en sobreyectivos.

Ejemplo 1.29. Recordemos que

$$0 \rightarrow S(2) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} S(1) \rightarrow 0$$

es exacta. Si tomo $\text{Hom}(S(1), -)$ obtengo un complejo

$$0 \rightarrow \text{Hom}(S(1), S(2)) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(S(1), P(1)) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(S(1), S(1))$$

Sea $Id \in \text{End}(S(1))$. Si g_* fuera sobreyectiva existiría una $f : S(1) \longrightarrow P(1)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & & P(1) \\ & \nearrow f & \downarrow g = (1;0) \\ S(1) & \xlongequal{\quad} & S(1) \end{array}$$

Pero si $f : S(1) \longrightarrow P(1)$ es morfismo luego

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & 0 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ k & \xrightarrow{1} & k \end{array}$$

conmuta. Entonces $f_1 = 0$ entonces $g_1 \circ f_1 = 0 \neq Id_{S(1)_1}$

Teorema 1.30. Sea $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ una sucesión en Rep_Q . Entonces la sucesión es exacta si y sólo si la siguiente sucesión es exacta para todo $X \in Rep_Q$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N, X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(L, X) \rightarrow 0$$

Teorema 1.31. Dada una sucesión $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$, son equivalentes:

1. La sucesión es exacta y se parte
2. $0 \rightarrow \text{Hom}(X, L) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(X, M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(X, N) \rightarrow 0$ es exacta y se parte para todo $X \in Rep_Q$
3. $0 \rightarrow \text{Hom}(N, X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(L, X) \rightarrow 0$ es exacta y se parte para todo $X \in Rep_Q$

Pull back y push out

Las construcciones del push out y el pull back existen en la categoría Rep_Q . Las introducimos porque nos serán útiles más adelante en la demostración de ciertos resultados.

Definición 1.32. Sean $M = (M_i, \varphi_\alpha), M' = (M'_i, \tilde{\varphi}_\alpha), N = (N_i, \psi_\alpha)$ representaciones de Q y $f : M \rightarrow N, g : M' \rightarrow N$ morfismos. Se define el **pull back (o producto fibrado) de f y g** como la representación $X_i = \{(a, b) \in M_i \oplus M'_i : f_i(a) = g_i(b)\}$ con flechas $(\varphi_\alpha \oplus \tilde{\varphi}_\alpha)|_X$, junto con las proyecciones $\pi_1(a, b) = a$ y $\pi_2(a, b) = b$

El pull back es la construcción minimal que se puede obtener del diagrama
$$\begin{array}{ccc} & & M' \\ & & \downarrow \\ & & N \\ M & \longrightarrow & N \end{array}$$
. Las propiedades más importantes que usaremos las sintetizaremos en el siguiente teorema:

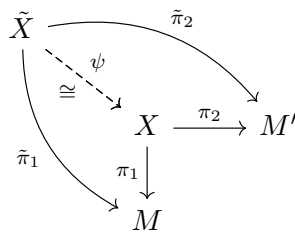
Teorema 1.33. Sean M, M' y N como en 1.32. Entonces:

1. El pull back es una subrepresentación de $M \oplus M'$

2. El siguiente diagrama conmuta
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_2} & M' \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$
 y si \tilde{X} es otra representación con mor-

fismos $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{\pi}_2} M', \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} M$ tal que
$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_2} & M' \\ \tilde{\pi}_1 \downarrow & & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$
 conmuta, entonces existe un único

isomorfismo $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que



conmuta

3. Si f es inyectiva, entonces π_2 es inyectiva.
4. Si f es sobreyectiva, entonces π_2 es sobreyectiva.
5. Si $0 \rightarrow L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta, entonces el siguiente diagrama es conmutativo y las filas son exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{l \rightarrow (h(l); 0)} & X & \xrightarrow{\pi_2} & M' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

6. Recíprocamente, si tengo una sucesión exacta corta $0 \rightarrow L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ y un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & W & \xrightarrow{\alpha} & M' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \beta \downarrow & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{h} & M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

entonces existe un isomorfismo $\Omega : W \rightarrow X$ tal que $\pi_2 \Omega = \alpha$ y $\pi_1 \Omega = \beta$.

Demostración. Observar que $(X_i, (\varphi_\alpha \oplus \tilde{\varphi}_\alpha)|_{X_{s(\alpha)}})$ es una subrepresentación de $M \oplus M'$ simplemente porque $(\varphi_\alpha \oplus \tilde{\varphi}_\alpha)|_{X_i} = \varphi_\alpha|_{X_i} \oplus \tilde{\varphi}_\alpha|_{X_i}$. El resto de las afirmaciones chequear las definiciones. \square

Terminamos esta sección con la definición del push out, que es la solución del diagrama que se obtiene dando vuelta las flechas.

Definición 1.34. Dados $f : L \rightarrow M$ y $g : L \rightarrow M'$ dos morfismos de representaciones, defino el **push out de f y g** como la representación $X = \frac{M \oplus M'}{\langle (f(l); -g(l)) \rangle}$ junto con los morfismos

$$\begin{array}{ccc} \mu_1 : M & \longrightarrow & X \\ m & \longmapsto & \overline{(m; 0)} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mu_2 : M' & \longrightarrow & X \\ m' & \longmapsto & \overline{(0; m')} \end{array}$$

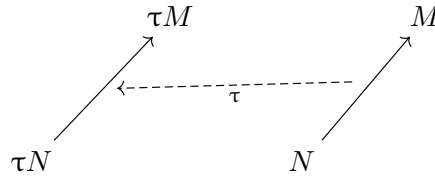
Teorema 1.35. Sean L, M y M' como en la definición previa. Las siguientes proposiciones valen:

1. $\mu_1 \circ f = \mu_2 \circ g$ y si existe otra representación \tilde{X} con morfismos $M \xrightarrow{\tilde{\mu}_1} \tilde{X}$ y $M' \xrightarrow{\tilde{\mu}_2} \tilde{X}$ con $\tilde{\mu}_1 \circ f = \tilde{\mu}_2 \circ g$ entonces existe un único isomorfismo $\psi : X \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\psi \circ \mu_2 = \tilde{\mu}_2$ y $\psi \circ \mu_1 = \tilde{\mu}_1$
2. Si tengo una sucesión exacta corta $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{h} N \rightarrow 0$, existe $h' : X \rightarrow N$, $h'(\overline{(m, m')}) = h(m)$, un morfismo bien definido tal que el siguiente diagrama con filas exactas conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{h} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & g \downarrow & & \downarrow \mu_1 & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\mu_2} & X & \xrightarrow{h'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

1.4 Representaciones indescomponibles de un \mathbb{A}_3

Una de las herramientas más potentes para estudiar la categoría de representaciones de un quiver es la teoría de Auslander-Reiten. La teoría permite bajo ciertas condiciones no sólo encontrar todos los indescomponibles de un quiver, sino también clasificar los espacios Hom entre ellas. El **carcaj de Auslander-Reiten** tiene como vértices las isoclases de representaciones indescomponibles, y como flechas a ciertos morfismos *irreducibles* entre aquellas. Si bien este se puede hallar "a mano", después de ver la teoría podemos automatizar nuestro proceso para hallarlo. Además, el quiver A-R tiene una estructura adicional muy importante que es la dada por la **traslación de Auslander-Reiten**, un funtor $\tau : Rep_Q \rightarrow Rep_Q$ que preserva indescomponibles e indentifica los objetos a menos de proyectivos y es de gran utilidad para calcular el quiver A-R. Gráficamente veremos que τ traslada las flechas de la siguiente forma, teniendo en cuenta que τM o τN pueden ser cero y no aparecer



Para estudiar las representaciones de un Q es conveniente introducir una notación para ellas. Escribiremos a una representación M como un ordenamiento vertical de los números $\{1, 2, \dots, n\}$ donde n es la cantidad de vértices, de forma que i esté arriba de j si existe un morfismo no nulo de M_i en M_j y la cantidad de veces que aparece un número $1 \leq k \leq n$ es igual a la dimension de M_k .

Por ejemplo, si $Q = \begin{array}{ccccc} 1 & \rightarrow & 2 & \leftarrow & 4 \\ & & \downarrow & & \\ & & 3 & & \end{array}$, la representación $\begin{array}{ccccc} k^2 & \rightarrow & k & \leftarrow & k \\ & & \downarrow & & \\ & & k & & \end{array}$, donde todas las flechas son morfismos no nulos, se escribe $\begin{array}{cc} 11 & 4 \\ 2 & \\ 3 & \end{array}$.

Notar que si $M = \begin{array}{ccccc} k^2 & \rightarrow & k & \leftarrow & k \\ & & \downarrow & & \\ & & k & & \end{array}$ entonces $M = \begin{array}{c} 11 \\ 2 \\ 3 \end{array} \oplus 4$.

La notación tiene sus limitaciones pero es muy útil y cuando el quiver esté fijo su significado será claro.

Ejemplo 1.36. Consideremos uno de los quiver de tipo \mathbb{A}_3 , $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$ (el otro es $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$). No es difícil ver que las siguientes representaciones son indescomponibles:

$$\begin{array}{ll} S(1) = & k \rightarrow 0 \leftarrow 0 & P(1) = & k \rightarrow k \leftarrow 0 \\ S(2) = & 0 \rightarrow k \leftarrow 0 & P(3) = & 0 \rightarrow k \leftarrow k \\ S(3) = & 0 \rightarrow 0 \leftarrow k & I(2) = & k \rightarrow k \leftarrow k \end{array}$$

que en la nueva notación se escriben $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, $S(3) = 3$, $P(1) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$, $P(3) = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}$,

$$I(2) = \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Veamos que son todas: Sea $\mathbb{V} \xrightarrow{f} \mathbb{W} \xleftarrow{g} \mathbb{U}$ una representación. Luego puedo escribir $\mathbb{V} = K \oplus K^c$ con $K = \text{Ker}(f)$. Luego si $\tilde{f} = f|_{K^c}$, \tilde{f} es inyectiva y

$$\begin{aligned}
\mathbb{V} \xrightarrow{f} \mathbb{W} \xleftarrow{g} \mathbb{U} &= K \oplus K^c \xrightarrow{0 \oplus \tilde{f}} 0 \oplus \mathbb{W} \xleftarrow{g} \mathbb{U} \\
&\cong (K \longrightarrow 0 \longleftarrow 0) \oplus (K^c \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{W} \xleftarrow{g} \mathbb{U}) \\
&\cong S(1)^k \oplus (K^c \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{W} \xleftarrow{g} \mathbb{U})
\end{aligned}$$

Si ahora repetimos el argumento con $\tilde{K} = \text{Ker}(g)$, $\mathbb{U} = \tilde{K} \oplus \tilde{K}^c$, $\tilde{g} = g|_{\tilde{K}^c}$ llegamos a que

$$\mathbb{V} \xrightarrow{f} \mathbb{W} \xleftarrow{g} \mathbb{U} \cong S(1)^k \oplus (K^c \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{W} \xleftarrow{\tilde{g}} \tilde{K}^c) \oplus S(3)^{\tilde{k}}$$

con \tilde{f} y \tilde{g} inyectivas. Podemos reducirnos entonces al caso en que f y g son inyectivas.

Sean $a = \dim \mathbb{V}$, $b = \dim \mathbb{W}$, $c = \dim \mathbb{U}$, y si tomamos $\{w_1, \dots, w_d\}$ base de $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$, entonces podemos completar a una base $\{w_1, \dots, w_d, w_{d+1}, \dots, w_{d+d'}\}$ ($a = d + d'$) de $\text{Im}(f) \cong \mathbb{V}$. Defino $v_i = f^{-1}(w_i)$, $1 \leq i \leq a$, entonces $\{v_1, \dots, v_d, \dots, v_a\}$ es una base de \mathbb{V} pues f es inyectiva. Completo ahora $\{w_1, \dots, w_d\}$ a una base de $\text{Im}(g) \cong \mathbb{U}$, $\{w_1, \dots, w_d, w_{d+d'+1}, \dots, w_{d+d'+d''}\}$ ($d + d'' = c$). No es difícil ver, usando que f y g son inyectivas, que $\{w_1, \dots, w_d,$

$w_{d+1}, \dots, w_{d+d'}, w_{d+d'+1}, \dots, w_{d+d'+d''}\}$ son L.I en \mathbb{W} . Finalmente, completo

$\{w_1, \dots, w_{d+d'+d''}\}$ a una base de \mathbb{W} , $\{w_1, \dots, w_{d+d'+d''}, \dots, w_{d+d'+d''+d'''}\}$ con $d + d' + d'' + d''' = b$.

Entonces, en esas bases, las matrices de f y g son

$$f = \left[\begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline 0 & I_{d'} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad g = \left[\begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{d''} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Luego tenemos isomorfismos de representaciones...

$$k^a \xrightarrow{\left[\begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline 0 & I_{d'} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]} k^b \xleftarrow{\left[\begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{d''} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]} k^c \cong$$

$$(k^d \xrightarrow{\left[I_d \right]} k^d \xleftarrow{\left[I_d \right]} k^d) \oplus (k^{d'} \xrightarrow{\left[\begin{array}{c} I_{d'} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]} k^{b-d} \xleftarrow{\left[\begin{array}{c} 0 \\ I_{d''} \\ 0 \end{array} \right]} k^{d''}) \cong$$

$$I(2)^d \oplus (k^{d'} \xrightarrow{\left[I_{d'} \right]} k^{d'} \longleftarrow 0) \oplus (0 \longrightarrow k^{b-d-d'} \xleftarrow{\left[\begin{array}{c} I_{d''} \\ 0 \end{array} \right]} k^{d''}) \cong$$

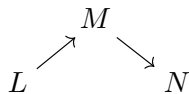
$$I(2)^d \oplus P(1)^{d'} \oplus (0 \longrightarrow k^{d''} \xleftarrow{\left[I_{d''} \right]} k^{d''}) \oplus (0 \longrightarrow k^{d'''} \longleftarrow 0) \cong$$

$$I(2)^d \oplus P(1)^{d'} \oplus P(3)^{d''} \oplus S(2)^{d'''}$$

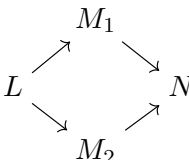
Por lo tanto las representaciones listadas son las únicas indescomponibles.

Como un primer acercamiento, intentemos hallar el quiver de A-R. Para eso, necesitamos hallar las sucesiones exactas cortas $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ que casi se parten, que son sucesiones exactas que no se parten, con indescomponibles en los extremos y que son universales en un sentido preciso. Estas secuencias son únicas: fijado uno de los extremos (N o L), existe

una única sucesión exacta corta que casi se parte que tiene ese extremo. En el quiver A-R, una sucesión exacta que casi se parte con M indescomponible $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ se representa como un diagrama en pico



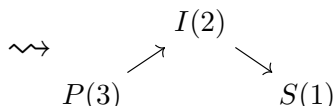
Si M tiene dos sumandos directos M_1, M_2 , tenemos un rombo



Un teorema notable de Bautista y Brenner afirma que si un quiver es de **representación finita** (es decir, tiene una cantidad finita de indescomponibles no isomorfos) sólo puede tener a lo sumo cuatro sumandos indescomponibles, y que si tiene cuatro, uno de ellos debe ser un representación proyectiva e inyectiva (ver [BB81]).

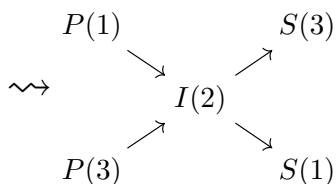
Volviendo al cálculo del quiver A-R de $1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$, si $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ no se parte y es no trivial ($L, N \neq 0$) N no puede ser $S(2), P(1)$ ni $P(3)$ pues veremos más adelante que estos son representaciones proyectivas, y una sucesión exacta corta que termina en un proyectivo se parte. Una de las formas de construir el quiver A-R (en el caso que no tenga relaciones) es empezar calculando las sucesiones exactas que casi se parten con el N inyectivo y luego ir avanzando hacia la izquierda calculando sucesiones exactas que casi se parten de su trasladado a la izquierda (τN). También se puede empezar con los proyectivos, calcular sucesiones exactas que casi se parten de sus trasladados a derecha ($\tau^{-1}N$) y hacerlo con todos los proyectivos. En este caso empezaremos con $S(1), S(3)$ e $I(2)$ que son todos los inyectivos indescomponibles. Para $S(1)$ la única sucesión que casi se parte es

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow I(2) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$



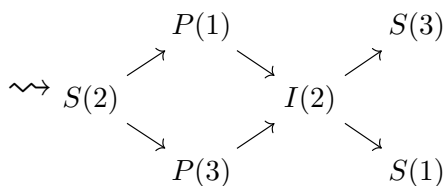
$S(3)$:

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow I(2) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$



Y para $I(2)$:

$$0 \rightarrow S(2) \rightarrow P(1) \oplus P(3) \rightarrow I(2) \rightarrow 0$$



Como esos son todos los indescomponibles, completamos el quiver de A-R en este caso.

Notar que, por ejemplo, $0 \rightarrow S(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$ es otra sucesión que no se parte con extremo $S(3)$, pero no es *almost split*.

Parte 2

Resoluciones proyectivas

En esta parte continuamos el estudio de la categoría Rep_Q , definiendo sus objetos proyectivos e inyectivos y demostrando una propiedad extremadamente importante: cuando el quiver no tiene ciclos orientados se trata de una *categoría hereditaria* (es decir, subrepresentaciones de proyectivas son proyectivas también). Definimos después la traslación de Auslander-Reiten τ que nos permite hallar todos los indescomponibles. Se incluye algunos resultados sabidos pero no incluidos generalmente en la literatura: los teoremas 2.4, 2.11 y los lemas 2.21, 2.29 y 2.32, en donde se dan demostraciones propias.

2.1 Proyectivos e inyectivos

Daremos una terminología muy útil: dado un quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ e i y j dos vértices en él, un **camino** c de i en j es una secuencia finita de flechas de Q_1 , que empieza en i y termina en j . Notamos

$$c = (i|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n|j) \quad c : i \longrightarrow j$$

con $i, j \in Q_0$ y $s(\alpha_1) = i$, $s(\alpha_k) = t(\alpha_{k-1})$ y $t(\alpha_n) = j$.

La **longitud** de un camino es su cantidad de flechas. Un **ciclo dirigido** es un camino que empieza y termina en el mismo vértice, i.e. $c = (i|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n|i)$. Un lazo es un ciclo dirigido de longitud 1, i.e. una flecha que empieza y termina en el mismo vértice. El **camino trivial** e_i es el camino "vacío" que nunca sale de i . Por definición tiene longitud cero.

Para cada vértice del quiver podemos definir tres representaciones completamente naturales. Sus nombres no son casualidad pues serán los objetos simples, proyectivos e inyectivos de la categoría. Más adelante su cálculo tan sencillo nos permitirán explicitar resoluciones proyectivas para una representación en concreto.

En toda esta sección asumiremos Q fijo y sin ciclos dirigidos.

Definición 2.1. La **presentación simple** $S(i)$ tiene cero en todos los vértices excepto en el i :

$$S(i)_j = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \langle e_i \rangle & \text{si } i = j \end{cases}$$

y todas las flechas son cero.

La **presentación proyectiva indescomponible** $P(i)$ tiene en el vértice j el espacio vectorial la base de caminos de i en j

$$P(i)_j := \langle c : i \longrightarrow j, \text{ caminos de } i \text{ en } j \rangle$$

y si $t \xrightarrow{\alpha} s$ es una flecha de Q , defino a φ_α sobre la base como

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : P(i)_t &\longrightarrow P(i)_s \\ c &\longrightarrow c\alpha = (t|\alpha_1 \cdots \alpha_n \alpha|s) \end{aligned}$$

y extendiendo por linealidad. Es decir,

$$\begin{array}{ccc} & & i \\ & \swarrow \varphi_\alpha(c) & \downarrow c \\ s & \xleftarrow{\alpha} & t \end{array}$$

La **presentación inyectiva indescomponible** $I(i)$ tiene en el vértice j el e.v. con base los caminos de j en i :

$$I(i)_j := \langle c : j \longrightarrow i, \text{ caminos de } j \text{ en } i \rangle$$

Para la definición de φ_α con $j \xrightarrow{\alpha} k$ lo hago sobre una base: si $c \in I(i)_j$, $c : j \longrightarrow i$. Luego, si $c_1 \neq \alpha$, $\varphi_\alpha(c) = 0$ y si $c_1 = \alpha$, $\varphi_\alpha(c) = (k|c_2 \cdots c_n|i)$. Es decir, si $c_1 = \alpha$, $c = \alpha\varphi_\alpha(c)$ y lo notamos como una división por α : " $\varphi_\alpha(c) = \frac{1}{\alpha} \cdot c$ "

Ejemplo 2.2. $Q = 1 \xleftarrow[\beta]{\alpha} 2 \xrightarrow[\gamma]{\delta} 3 \xrightarrow{\epsilon} 4$ entonces

$$P(2) = \langle \{\alpha, \beta\} \rangle \xleftarrow[-\beta]{-\alpha} \langle e_2 \rangle \xrightarrow[-\gamma]{-\delta} \langle \delta \rangle \xrightarrow{-\epsilon} \langle \{\delta\epsilon, \gamma\} \rangle$$

$$I(4) = 0 \xleftarrow{\bar{\delta}} \langle \{\delta\epsilon, \gamma\} \rangle \xrightarrow[\bar{\gamma}]{\bar{\delta}} \langle \epsilon \rangle \xrightarrow{\bar{\epsilon}} \langle e_4 \rangle$$

O, tomando bases,

$$P(2) = k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} k^2$$

$$I(4) = 0 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} k^2 \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$$

La necesidad de que Q no tenga ciclos dirigidos es para que los espacios vectoriales tengan dimensión finita en cada vértice. Por ejemplo, si $\mathbb{L} = 1 \curvearrowright \alpha$ entonces $S(1) = \langle \{\alpha^n : n \in \mathbb{N}_0\} \rangle = k^{\mathbb{N}}$

Observación 2.3. Notar que los morfismos de la representación $P(i)$ son inyectivos: si $\alpha : j \rightarrow k$ es una flecha, $\varphi_\alpha : P(i)_j \rightarrow P(i)_k$ manda una base de $P(i)_j$ en algunos elementos de la base de $P(i)_k$. Análogamente en $I(i)$ los morfismos son sobreyectivos, pues si $c = (k|c_1 \cdots c_n|i) \in I(i)_k$, $\varphi_\alpha(\alpha c) = c$, $\alpha c \in I(i)_j$

Siguiendo con la notación del comienzo de la sección, dada una representación (M_i, φ_α) y un camino $c = (j|\alpha_1 \cdots \alpha_n|k)$ podemos definir la composición de los morfismos φ a lo largo del camino c :

$$\begin{aligned}\varphi_c &:= \varphi_{\alpha_n} \circ \cdots \circ \varphi_{\alpha_1}, & \varphi_c &: M_j \longrightarrow M_k \\ \varphi_{e_i} &:= Id_{M_i} \quad \forall i \in Q_0\end{aligned}$$

Teorema 2.4. *Sea Q un quiver sin relaciones no trivial ($\#Q_0 > 1$) y conexo. Entonces $I(i) \not\cong P(i)$*

Demostración. Sea $i \in Q_0$ y supongo que existe $\psi : P(i) \longrightarrow I(i)$ un isomorfismo. Como Q es no trivial y conexo, existe al menos una flecha α que empieza o termina en i con $s(\alpha) \neq t(\alpha)$. Sin pérdida de generalidad puedo asumir que empieza. Como ψ es morfismo de representaciones, el cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} P(i)_i & \xrightarrow{\alpha} & P(i)_k \\ \psi_i \downarrow & & \downarrow \psi_k \\ I(i)_i & \xrightarrow{\frac{1}{\alpha}} & I(i)_k \end{array}$$

y como ψ_i es sobreyectiva $\exists x \in P(i)_i / \psi_i(x) = e_i$. Luego $\frac{1}{\alpha} \psi_i(x) = \frac{e_i}{\alpha} = 0 = \psi_k(x\alpha)$, pero $x\alpha \neq 0$, lo que contradice que ψ sea inyectiva.

Comprobemos que podemos asumir ese "sin pérdida de generalidad" del comienzo: si tuviera que la flecha del comienzo llega, y no sale de i , digamos $\alpha : k \rightarrow i$ y que ninguna flecha que no sea un lazo sale de i , tendríamos que $I(i)_k \neq 0$ pero $P(i)_k = 0$ y no pueden ser isomorfos. Luego existe al menos una flecha con comienzo i y final distinto a i \square

Esto no significa que no pueda haber representaciones que son proyectivas e inyectivas al mismo tiempo. Por ejemplo si $Q = 1 \rightarrow 2$, $P(1) = I(2)$.

De ahora en más todos los teoremas supondrán Q sin ciclos dirigidos. Veamos que las representaciones $P(i)$ hacen honor a su nombre y son efectivamente objetos proyectivos:

Teorema 2.5. *Sea $g : N \longrightarrow M$ sobreyectiva y $f : P(i) \longrightarrow M$ un morfismo. Entonces existe $h : P(i) \longrightarrow N$ tal que $g \circ h = f$.*

$$\begin{array}{ccccc} & & P(i) & & \\ & \swarrow h & \downarrow f & & \\ N & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

En otras palabras si $g : N \longrightarrow M$ es sobreyectiva, $g_ : \text{Hom}(P(i), N) \longrightarrow \text{Hom}(P(i), M)$ también lo es*

Demostración. Sean $M = (M_i, m_\alpha)$ y $N = (N_i, n_\alpha)$ Como g_i es sobre, $\exists x \in g_i^{-1}(f_i(e_i))$. Defino $h_i(e_i) := x \in M_i$, como Q no tiene ciclos dirigidos, $\langle e_i \rangle = P(i)_i$ entonces h_i está bien definido. Dado $c \in P(i)_j$ defino $h_j(c) = m_c(x) \in M_j$. Comprobar que h_j es morfismo y veamos que $g \circ h = f$.

$$g_j \circ h_j(c) = g_j \circ m_c(x) \stackrel{1}{=} n_c \circ g_i(x) = n_c \circ f_i(e_i) \stackrel{2}{=} f_j(e_i \cdot c) = f_j(c)$$

donde en 1 y 2 uso que g y f son morfismos, respectivamente. \square

Análogamente $I(i)$ es una representación inyectiva:

Teorema 2.6. *Sea $g : N \rightarrow M$ inyectiva y $f : N \rightarrow I(i)$ un morfismo. Entonces existe $h : M \rightarrow I(i)$ tal que $h \circ g = f$.*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g} & M \\ & & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & I(i) & & \end{array}$$

En otras palabras si $g : N \rightarrow M$ es inyectiva, $g^* : \text{Hom}(M, I(i)) \rightarrow \text{Hom}(N, I(i))$ es sobreyectiva.

Justifiquemos ahora que son indescomponibles:

Teorema 2.7. *Las representaciones $S(i)$, $P(i)$ e $I(i)$ son indescomponibles.*

Demostración. Que $S(i)$ es indescomponible es obvio. Veamos que $P(i)$ es indescomponible. Supongo $P(i) = M \oplus N$, $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$, $M = (M_i, m_\alpha)$, $N = (N_i, n_\alpha)$ Como $P(i)_i = k$ puedo suponer $M_i = k$ y $N_i = 0$.

Sea $a \in N_j$, como $N_j \ll P(i)_j$, $a = \sum \lambda_k c_k$ con los $c_k : i \rightarrow j$ caminos de i a j . Luego por definición de los morfismos de $P(i)$

$$c_k = \varphi_{c_k}(e_i) = (m_{c_k} \oplus n_{c_k})(e_i^M \oplus e_i^N) = m_{c_k}(e_i^M) \oplus n_{c_k}(e_i^N)$$

$$e_i^N = 0 \implies n_{c_k}(e_i^N) = 0 \implies c_k = m_{c_k}(e_i^M) \in M_j. \text{ Luego } a \in M_j \cap N_j = 0. \quad \square$$

Análogamente a la definición usual, una representación M es simple si sus únicas subrepresentaciones son la nula y M . Claramente además de ser indescomponibles, las $S(i)$ son simples. Lo interesante es que son las únicas.

Teorema 2.8. *Una representación de Q es simple si y sólo si es isomorfa a algún $S(i)$ con $i \in Q_0$*

Demostración. Sea M simple no nula. Entonces existe $M_i \neq 0$. Podemos suponer $M_i = k^d$. En principio podríamos tomar N la "subrepresentación" con $N_i = k$ (donde incluyo k en k^d de cualquier forma), $N_j = 0$ si $i \neq j$. Entonces como M es simple $M = N$. El problema es que no necesariamente la inclusión de N en M es un morfismo pues podría existir $\alpha : i \rightarrow l$ con $M_l \neq 0$

$$\text{y } \begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{m_\alpha} & M_l \\ \uparrow i & & \uparrow \\ k & \longrightarrow & 0 \end{array} \text{ puede no conmutar. } \left(\text{Si } \alpha : l \rightarrow i, \begin{array}{ccc} M_l & \xrightarrow{m_\alpha} & M_i \\ \uparrow & & \uparrow i \\ 0 & \longrightarrow & k \end{array} \text{ siempre conmuta} \right)$$

Necesito un i tal que 1) M_i sea no nulo 2) todo m_α que sale de i (si es que hay alguno) es cero. Sea i_1 el vértice del comienzo. Si i_1 satisface 1 y 2 listo. Sino, existe i_2 y $\alpha_2 : i_1 \rightarrow i_2$ con $m_{\alpha_2} \neq 0$. Luego $M_{i_2} \neq 0$. Si i_2 satisface 1 y 2 listo. Sino existe i_3 y $m_{\alpha_3} : M_{i_2} \rightarrow M_{i_3} \neq 0$. Como Q no tiene ciclos dirigidos el camino $\alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n$ no puede volver a ningún vértice anterior. Como Q es finito eventualmente existe $M_{i_0} \neq 0$ tal que o bien no salen flechas de i_0 o bien las m_α son todas nulas. Entonces $S(i_0)$ es una subrepresentación de M no nula. Luego $M = S(i_0)$. \square

Notar que un morfismo de $P(i)$ en M es simplemente elegir un elemento x de M_i a donde enviar $e_i \in P(i)_i$ y luego el morfismo se extiende a todo $P(i)$ por la definición de las transformaciones lineales de $P(i)$. En efecto, tenemos una biyección entre los dos objetos:

Teorema 2.9. *Sea M una representación de Q . Entonces para todo vértice i en Q hay un iso de espacios vectoriales*

$$\text{Hom}(P(i), M) \cong M_i$$

Demostración. Sea $f \in \text{Hom}(P(i), M)$ luego $f_i(e_i) \in M_i$. Defino

$$\begin{aligned} \text{Hom}(P(i), M) &\xrightarrow{\Phi} M_i \\ f &\longrightarrow f_i(e_i) \end{aligned}$$

Φ es inyectiva: si $f'_i(e_i) = f_i(e_i)$ entonces si $c \in P(i)_j$, $f_j(c) = f_j(e_i \cdot c) = m_c(f_i(e_i)) = m_c(f'_i(e_i)) = f'_j(e_i \cdot c) = f'_j(c)$

Φ es sobre: si $x \in M_i$, defino $g_i(e_i) = m$ y $g_j(c) = m_c(x)$. Comprobar que es un morfismo. \square

Corolario 2.10. Sean $i, j \in Q_0$

1. $\text{Hom}(P(i), P(j)) \cong P(j)_i$ como k espacios vectoriales
2. $\text{Hom}(P(i), P(i)) \cong k$ como k espacios vectoriales
3. Si A_Q es la representación $A_Q = \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)$, entonces $\text{End}(A_Q) = \text{Hom}(\bigoplus_{i \in Q_0} P(i), \bigoplus_{j \in Q_0} P(j))$ es un e.v. con base los caminos en Q
4. $P(j)$ es simple $\iff \text{Hom}(P(i), P(j)) = 0 \forall i \neq j$

El teorema análogo para $I(i)$ vale:

Teorema 2.11. Sea M una representación de un quiver Q conexo. Entonces para todo vértice i en Q hay un iso de espacios vectoriales

$$\text{Hom}(M, I(i)) \cong M_i$$

Demostración. Sea $x_0 \neq 0 \in M_i$, $M = (M_i, m_\alpha)$. Defino $f_i : M_i \longrightarrow I(i)_i$ como $f_i(x_0) = e_i$, $f_i = 0$ en $\langle x_0 \rangle^\perp$. Si $j \neq i$ es un vértice tal que existe un camino de j en i defino

$$f_j(x) = \sum_{c: j \rightarrow i} c \cdot f_i(m_c(x)), \quad x \in M_j$$

y si $k \neq i$ es un vértice tal que existe un camino de i en k defino $f_k = 0$. Como Q no tiene ciclos dirigidos, estos dos conjuntos de vértices son disjuntos.

$\Phi(x_0)$ es un morfismo de representaciones: Veo el caso $\alpha_0 : k \longrightarrow j$ una flecha con $i \neq k, j$. Quiero probar que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M_k & \xrightarrow{m_{\alpha_0}} & M_j \\ f_k \downarrow & & \downarrow f_j \\ I(i)_k & \xrightarrow{\frac{1}{\alpha_0}} & I(i)_j \end{array}$$

Notar que como Q no tiene ciclos dirigidos y Q es conexo, hay tres casos disjuntos: 1) para ambos vértices (k y j) existe un camino de ellos en i , 2) para ambos caminos existe un camino de i en ellos 3) existe un camino de k en i y de i en j . En el caso 3), $\frac{1}{\alpha_0} = 0$ pues ningún camino de k en i se factoriza por α_0 . Si alguno lo hiciera existiría $d : j \longrightarrow i$. Pero por hipótesis también existe un camino de i en j , que contradice que no tenga ciclos dirigidos. Absurdo. Entonces $\frac{1}{\alpha_0} = 0$ y $f_j = 0$. Luego el diagrama conmuta. Si vale el caso 2), f_k y f_j son cero y listo. Supongo estamos en el caso 1).

Sea $x \in M_k$.

$$\frac{1}{\alpha_0} \circ f_k(x) = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{c:k \rightarrow i} c \cdot f_i(m_c(x)) = \sum_{c:k \rightarrow i} \frac{c}{\alpha_0} \cdot f_i\left(m_{\frac{c}{\alpha_0}}(m_{\alpha_0}(x))\right) = *$$

Notar que todo camino $d : j \rightarrow i$ se escribe *de forma única* como $\frac{c}{\alpha_0}$ con $c : k \rightarrow i$ que se factoriza vía α_0 y que si $c : k \rightarrow i$ es un camino que no se factoriza por α_0 , $\frac{c}{\alpha_0} = 0$, entonces

$$* = \sum_{d:j \rightarrow i} d \cdot f_i(m_d(m_{\alpha_0}(x))) = f_j(m_{\alpha_0}(x))$$

Luego tengo un morfismo

$$\begin{array}{c} M_i \xrightarrow{\Phi} \text{Hom}(M, I(i)) \\ x_0 \rightarrow f \end{array}$$

Chequear que es mono y sobre. □

Como en la categoría de módulos, la suma de proyectivos es proyectivo y la suma de inyectivos es inyectivo, y la inversa también es cierta:

Teorema 2.12. 1) Si P y P' son representaciones proyectivas $\Rightarrow P \oplus P'$ es proyectiva.

2) Si P es proyectiva y P' es un sumando directo de $P \Rightarrow P'$ es proyectiva.

3) 1 y 2 son ciertas cambiando proyectiva/s por inyectiva/s y P por I .

2.2 Resoluciones

Para calcular la traslación de Auslander-Reiten de un M necesitaremos hallar una resolución proyectiva o inyectiva de éste.

Definición 2.13. Una **resolución proyectiva** de M es una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde P_i es proyectiva para todo i .

Una **resolución inyectiva** de M es una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots$$

donde I_i es inyectiva para todo i .

Empezar a construir una resolución proyectiva para una representación cualquiera M es sencillo: como $\text{Hom}(P(i), M) \cong M_i$ para cada elemento de una base de M_i , $v_1^i, \dots, v_{n_i}^i$ existe un morfismo $f^{i,j} : P(i) \rightarrow M$ tal que $f^{i,j}(e_i) = v_j^i$ entonces tengo un morfismo $P(i)^{n_i} \xrightarrow{(f^{i,1}, \dots, f^{i,n_i})} M$ que sobreyecta a M_i . Repitiendo esto con cada coordenada tengo un morfismo de un proyectivo a M . Sin embargo, en principio, no hay ninguna razón para suponer que su núcleo es proyectivo, sobre todo si no tenemos una descripción completa de los proyectivos de la categoría. Sin embargo la estructura extra del quiver y el hecho de que no tenga ciclos orientados hacen que pueda describir el núcleo como suma de los proyectivos indescomponibles. Antes de definir la resolución proyectiva estandar de M justifiquemos su construcción. Escribamos $M = (k^{d_i}, \varphi_\alpha)$ y e_k^i con $1 \leq k \leq d_i$ una base de k^{d_i}

Existe un morfismo natural

$$\begin{array}{c} \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(P(i), M) \otimes P(i) \rightarrow M \\ \{f_i \otimes m_i\}_{i \in Q_0} \rightarrow \{f_i(m_i)\} \end{array}$$

Por el teorema 2.9, $\text{Hom}(P(i), M) \cong M_i = k^{d_i}$ entonces $\bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(P(i), M) \otimes P(i) \cong \bigoplus_{i \in Q_0} k^{d_i} \otimes P(i) \cong \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i}$ y vía los isos el morfismo natural v es:

$$v : \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \longrightarrow M$$

$$(0, \dots, \overset{\text{lugar } k_0}{c}, \dots, 0) \in P(i)^{d_i} \longrightarrow \varphi_c(\mathbf{e}_{k_0}^i), \quad 1 \leq k_0 \leq d_i$$

Para simplificar la notación a un camino $(0, \dots, \overset{\text{lugar } k_0}{c}, \dots, 0)$ lo voy a notar c_{k_0} . Por otra parte tenemos otro morfismo natural

$$\bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(P(s(\alpha)), M) \otimes P(t(\alpha)) \longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(P(i), M) \otimes P(i)$$

$$(f \otimes c)_\alpha \longrightarrow \overbrace{f \otimes \alpha c}^a - \overbrace{f(\alpha \cdot) \otimes c}^b$$

donde $a \in \text{Hom}(P(s(\alpha)), M) \otimes P(s(\alpha))$ y $b \in \text{Hom}(P(t(\alpha)), M) \otimes P(t(\alpha))$. Esta flecha claramente va a parar a cero vía v . Vía el isomorfismo tenemos una flecha

$$u : \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i}$$

$$c_{k_0} \in P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \longrightarrow (\alpha c)_{k_0} - c_\alpha^M$$

donde $c_\alpha^M = \sum_{l=1}^{d_{t(\alpha)}} \theta_l c_l$ con θ_l son los coeficientes de $\varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)})$ en la base $\{\mathbf{e}_l^{t(\alpha)}\}$: $\varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)}) = \sum_{l=1}^{d_{t(\alpha)}} \theta_l \mathbf{e}_l^{t(\alpha)}$

Teorema 2.14. *La sucesión*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \xrightarrow{u} \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \xrightarrow{v} M \rightarrow 0$$

con u y v definidos como arriba es una sucesión exacta corta. Esta resolución se llama la resolución estandar de M

Demostración. Chequear que u y v son morfismos de representaciones y notar que la demostración es independiente de que Q tenga ciclos dirigidos

v es sobre: Sea $x \in M_j$. Entonces $x = \sum_{1 \leq l \leq d_j} \lambda_l \mathbf{e}_l^j$. Sea $\sum_l \lambda_l (e_j)_l \in P(j)_j^{d_j}$ con $e_j \in P(j)_j$ el camino trivial, $1 \leq l \leq d_j$. Luego $v(\sum_l \lambda_l (e_j)_l) = \sum_l \lambda_l \varphi_{e_j}(\mathbf{e}_l^j) = \sum_l \lambda_l \text{Id}(\mathbf{e}_l^j) = x$

$\text{Ker}(v) \supseteq \text{Im}(u)$: Sea $c_{k_0} \in P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}}$. Luego $v(u(c_{k_0})) = v((\alpha c)_{k_0} - c_\alpha^M) = \varphi_{\alpha c}(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)}) - \sum_{l=1}^{d_{t(\alpha)}} \theta_l v(c_l) = \varphi_c \circ \varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)}) - \sum_{l=1}^{d_{t(\alpha)}} \theta_l \varphi_c(\mathbf{e}_l^{t(\alpha)}) = \varphi_c(\varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)})) - \varphi_c\left(\sum_{l=1}^{d_{t(\alpha)}} \theta_l \mathbf{e}_l^{t(\alpha)}\right) = \varphi_c(\varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)})) - \varphi_c(\varphi_\alpha(\mathbf{e}_{k_0}^{s(\alpha)})) = 0$

$\text{Ker}(v) \subseteq \text{Im}(u)$: Sea $x \in \text{Ker}(v)$. Puedo escribir a x como una suma en la base de todos

los caminos de Q : $x = \sum_{c,l} \lambda_{c,l} \cdot c_l$ Defino $long(x) :=$ longitud del camino más largo con coeficiente no nulo que aparece en la escritura de x . $x = x_0 + \sum_{l,c \neq e_i} \lambda_{c,l} \cdot c_l$ donde x_0 es la suma sobre todos los caminos triviales. Como los caminos de la segunda suma no son constantes, se pueden escribir como algún $\alpha \cdot d$. Entonces $x = x_0 + \sum_{l,\alpha \cdot d} \lambda_{\alpha,d,l} \cdot (\alpha \cdot d)_l = x_0 + \sum_{\alpha} \sum_{d,l} \lambda_{\alpha,d,l} \cdot u(d) + \lambda_{\alpha,d,l} \cdot d_{\alpha}^M$ donde la composición $\alpha d = 0$ si $t(\alpha) \neq s(d)$. Luego

$$x = x_0 + u(z) + \overbrace{\sum_{\substack{\alpha,d,l: \\ \alpha \cdot d = c}} \tilde{\theta}_{d,l} d_l}^{:=z'}$$

donde $long(z') < long(x)$ porque todos los caminos de z' son estrictamente más cortos que los caminos de x . Sea $x_1 := x_0 + z'$. Entonces $x = x_1 + u(z)$. Luego $long(x_1) = long(z')$ pues todos los caminos de x_0 tienen longitud cero, y aplicando v en ambos lados obtengo que $0 = v(x_0) + 0 + v(z') = v(x_1)$ así que $x_1 \in \text{Ker}(v)$. Repitiendo el argumento obtengo que $x_1 = u(z_1) + x_2$ con $x_2 \in \text{Ker}(v)$ y $long(x_2) < long(x_1)$. Por finitud y como $0 \leq long(x_j)$ para todo j , eventualmente existe x_j tal que x_j es una suma de caminos triviales $x_j = \sum_{i,l} \lambda_{i,l} (e_i)_l \in \text{Ker}(v)$.

Luego $v(x_j) = \sum_{i,l} \lambda_{i,l} \cdot \mathbf{e}_i^l = 0$. Entonces $\lambda_{i,l} = 0$ luego $x_j = 0$. Entonces $x_{j-1} = u(\tilde{z})$. Volviendo para atrás tengo que $x_1 = u(\tilde{z})$ entonces $x = u(\tilde{z} + z) \in \text{Im}(u)$

$\text{Ker}(u) = 0$: Sea $x \in \text{Ker}(u)$ $x = \sum_{\alpha,c,l} \lambda_{\alpha,c,l} \cdot c_l$. Luego $u(x) = \sum_{\alpha,c,l} \lambda_{\alpha,c,l} ((\alpha \cdot c)_l - c_{\alpha}^M) = 0$

Entonces

$$\sum_{\alpha,c,l} \lambda_{\alpha,c,l} (\alpha \cdot c)_l = \sum_{\alpha,c,l} \lambda_{\alpha,c,l} c_{\alpha}^M = \sum_{\alpha,c,l} \sum_k \lambda_{\alpha,c,l} \theta_k c_k$$

Sea i un vértice fuente de Q . Notar que existe pues Q no tiene ciclos orientados. Luego ninguna flecha llega a i . Como cada c empieza en algún $t(\alpha)$ y ninguna flecha termina en i , mirando las coordenadas de los caminos que empiezan en i , el lado derecho es cero. Luego $\lambda_{\alpha,c,l} = 0 \forall \alpha : s(\alpha) = i$. Sea ahora i_1 una fuente en $Q - \{i\}$, que la hay pues Q no tiene ciclos orientados. Luego o bien i_1 es una fuente en Q o bien las únicas flechas que llegan a i_1 provienen de i . Entonces mirando el lado derecho a los caminos que empiezan en i_1 , pertenecen a un $P(t(\alpha))$ donde α es una flecha que llega a i_1 . Entonces necesariamente esa flecha empieza en i y luego su coordenada $\lambda_{\alpha,c,l} = 0$. Entonces en el lado derecho mirando las coordenadas de los caminos que empiezan en i_1 , son todas cero. Entonces en el lado izquierdo todos los $\lambda_{\alpha,c,l}$ que empiezan en i_1 son cero. Así siguiendo, eliminando los vértices, por finitud, todos los λ son cero. \square

El teorema análogo para resoluciones inyectivas también es cierto:

Teorema 2.15. *Dada una representación M existe una resolución inyectiva*

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} I_0 \xrightarrow{g} I_1 \rightarrow 0$$

donde I_0 y I_1 son inyectivas.

El teorema será obvio una vez que veamos el funtor dualidad.

Ejemplo 2.16. Sea $Q = 1 \xrightarrow{\beta} 2$ y $M = {}_2^1 1$. Luego $d_1 = 2$ y $d_2 = 1$. Los proyectivos son:

$$P(1) = {}_2^1 2 \quad P(2) = 2$$

Entonces el comienzo de la resolución es

$${}_2^1{}_2 \oplus {}_2^1{}_2 \oplus 2 \rightarrow {}_2^1{}_2 \rightarrow 0$$

Entonces la sucesión es

$$0 \rightarrow 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \hookrightarrow {}_2^1{}_2 \oplus {}_2^1{}_2 \oplus 2 \rightarrow {}_2^1{}_2 \rightarrow 0$$

Recordemos la definición de $A_Q = \bigoplus_i P(i)$. Decimos que una representación M es **libre** si $M \cong A_Q^n$. Notar que una representación libre es proyectiva por ser sumando de proyectivos. Como corolario de la resolución estandar tenemos que toda representación proyectiva es sumando directo de una representación libre:

Teorema 2.17. *Una representación P es proyectiva \iff existe una representación libre F tal que P es un sumando directo de F*

Demostración. \Rightarrow): Sea P proyectiva. Entonces existe la resolución estandar: $0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_s(\alpha)} \xrightarrow{u}$

$\bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \xrightarrow{v} P \rightarrow 0$. Como v es sobre, la sucesión se parte. Entonces P es un sumando directo del término medio, digamos $\bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} = P \oplus Q$. Pero si $N = \max\{d_i\}$, $A_Q^N = \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{N-d_i} = P \oplus Q \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{N-d_i}$ luego P es un sumando directo de A^N .

\Leftarrow) Es obvio pues si F es libre en particular es proyectivo, y un sumando directo de un proyectivo es proyectivo. \square

Como corolario tenemos una clasificación completa de todos los proyectivos de la categoría:

Corolario 2.18. *Sea Q un carcaj sin ciclos dirigidos y P una representación de Q . Entonces P es proyectiva \iff existen i_1, \dots, i_n vértices posiblemente repetidos tal que $P \cong P(i_1) \oplus P(i_2) \oplus \dots \oplus P(i_n)$*

Demostración. La vuelta es obvia. Supongamos P es proyectiva. Entonces es un sumando directo de un libre, digamos $A_Q^n = \left(\bigoplus_{i \in Q_0} P(i) \right)^n = \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^n$. Sea $P = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_k$ una descomposición de P en indescomponibles y sea N tal que $P \oplus N = A_Q^n$, supongamos que $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_t$. Luego $P(1) \oplus \dots \oplus P(n) = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_k \oplus N_1 \oplus \dots \oplus N_t$. Por la unicidad de Krull-Schmidt, cada $Q_l \cong P(i_l)$ \square

Otro corolario muy útil me restringe la clase de representaciones de las que puede salir un morfismo hacia un proyectivo:

Corolario 2.19. *Sea Q un quiver sin ciclos dirigidos y sea $f : M \rightarrow P$ un morfismo no nulo con M indescomponible y P proyectivo. Entonces M es proyectivo y f es inyectiva.*

Demostración. Tenemos la secuencia

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(f) \longrightarrow M \longrightarrow \text{Im}(f) \longrightarrow 0$$

Como $\text{Im}(f)$ es proyectivo pues Rep_Q es hereditario, la sucesión se parte. Entonces $M \cong \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$. Como M es indescomponible y $\text{Im}(f) \neq 0$ entonces $\text{Ker}(f) = 0$. Luego f es inyectiva y $M \cong \text{Im}(f)$ es proyectivo. \square

2.3 La categoría de representaciones es hereditaria

Definición 2.20. Dada una representación M , el radical de M , $\text{Rad}(M)$, es la intersección de todas las subrepresentaciones propias maximales.

Lema 2.21. Sea $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ una representación y N la representación dada por: $N_i = \sum_{\alpha:t(\alpha)=i} \text{Im}(\varphi_\alpha)$ y $\psi_\alpha = \varphi|_{N_i}$. Entonces $\text{Rad}(M) = N$.

Demostración. Que N es una subrepresentación de M es fácil de ver. Sea $H = (H_i, \mu_\alpha)$ una subrepresentación propia maximal de M cualquiera. Veamos que $N \ll H$. Quiero ver que $\text{Im}(\varphi_\alpha) \subseteq H_i$ para todo α . Supongo que no. Entonces existe $\alpha_0 : j \rightarrow i$ y $x \in M_j$ tal que $\varphi_{\alpha_0}(x) \notin H_i$. Sea \tilde{H} la subrepresentación dada por $\tilde{H}_k = H_k \forall k \neq i$ y $\tilde{H}_i = H_i \oplus \langle \varphi_{\alpha_0}(x) \rangle$ con morfismos dados por: si $\alpha : j \rightarrow k$ y $j, k \neq i$ el morfismo es simplemente $\varphi_\alpha|_{H_j} (= \mu_\alpha)$, si $\alpha : i \rightarrow j$ el morfismo es $\varphi_\alpha|_{\tilde{H}_i}$ y si $\alpha : j \rightarrow i$ la t.l. es $(\varphi_\alpha|_{H_i}; 0)$. Chequear que $H \ll \tilde{H} \ll M$. Como H es maximal, $\tilde{H} = M$. Pero entonces $x \in H_j$ y como H es una representación $\varphi_\alpha(x) \in H_i$, absurdo. Entonces $N_i \subseteq H_i$ para todo i .

Finalmente, veamos que $\text{Rad}(M)$ está contenida en N . Supongo que no. Entonces existe i_0 y $x \in (\text{Rad } M)_{i_0} - N_{i_0}$. Completo $\{x\}$ a una base de M_{i_0} , $\{x, v_1, \dots, v_n\}$. Sea H la representación dada por $H_k = M_k$ para todo k distinto de i_0 y $H_{i_0} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, con los morfismos que sean las restricciones. H es una representación porque x no pertenece a la imagen de ningún φ_α que llega a M_{i_0} y claramente es maximal y una subrepresentación de M . Pero $x \notin H$, absurdo. Luego $N = \text{Rad}(M)$. \square

Luego, si $P(i)$ es un proyectivo indescomponible,

$$(\text{Rad } P(i))_j = \begin{cases} P(i)_j, & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Lema 2.22. Toda subrepresentación propia de $P(i)$ es una subrepresentación de $\text{Rad}(P(i))$

Demostración. Ejercicio. \square

Notar que el radical de $P(i)$ es una subrepresentación con vector dimensión estrictamente menor al de $P(i)$. Si probamos que es proyectiva, esto nos permitirá usar inducción para demostrar que la categoría es hereditaria. Por otra parte si esto es cierto, necesariamente $\text{Rad } P(i)$ debe ser proyectiva.

Lema 2.23. Sea $P(i)$ una representación proyectiva indescomponible. Si $P(i)$ es simple, $\text{Rad } P(i) = 0$. Sino, $\text{Rad } P(i)$ es proyectiva

Demostración. Si i es un sumidero, $P(i) = S(i)$ y entonces $\text{Rad}(P(i)) = 0$. Supongo que existe una flecha que llega a i . Sean i_1, \dots, i_m todos los vértices tal que existe una flecha de i en i_k y sea d_k la cantidad de flechas de i en i_k , digamos $\alpha_1^k, \dots, \alpha_{d_k}^k$. Afirimo que $\text{Rad}(P(i)) = \bigoplus_{k=1}^m P(i_k)^{d_k}$

Notar que $P(i_k)_i = 0$ pues Q no tiene ciclos orientados, entonces $\bigoplus_{k=1}^m P(i_k)^{d_k} \subseteq \text{Rad}(P(i))$.

Y finalmente, sea $c \in \text{Rad}(P(i))_j = P(i)_j$, $j \neq i$. Luego c es un camino de i en j , $c = (i|c_1 c_2 \dots c_l|j)$ con c_1 una flecha de i hacia algún vértice i_k , $c_1 = \alpha_{j_0}^k$. Defino $\psi : \text{Rad}(P(i)) \rightarrow$

$\bigoplus_{k=1}^m P(i_k)^{d_k}$, $\psi_j(c) = (0, \dots, (t(c_1)|c_2 \dots c_l|j), \dots, 0)$. Luego ψ es un iso. \square

Teorema 2.24. Sea Q un carcaj sin ciclos dirigidos, P una representación proyectiva y N una subrepresentación propia de P . Entonces N es proyectiva.

Demostración. Por inducción en la norma del vector dimensión. Sea N una subrepresentación de un proyectivo P y supongo el teorema vale para todo proyectivo Q con $\underline{\dim} Q < \underline{\dim} P$. Supongamos que $P = P(i) \oplus Q$ y sea $\rho : P \rightarrow P(i)$ la proyección. Tengo dos posibilidades:

1) $\rho(N) = P(i)$: Luego tengo una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow Q \cap N \rightarrow N \xrightarrow{\rho} P(i) \rightarrow 0$$

y como $P(i)$ es proyectivo, la sucesión se parte: $N = P(i) \oplus Q \cap N$. Como $Q \cap N \ll Q$ y $\underline{\dim} Q < \underline{\dim} P$, $Q \cap N$ es proyectivo. Entonces N es proyectivo.

2) $\rho(N) \subsetneq P(i)$: Entonces $\rho(N) \subseteq \text{Rad}P(i)$. Luego $N \subseteq \text{Rad}P(i) \oplus Q$ y como $\text{Rad}P(i)$ es proyectivo y $\underline{\dim} (\text{Rad}P(i) \oplus Q) < \underline{\dim} P$ y por inducción N es proyectivo. □

Ejemplo 2.25. Sea $Q = \begin{array}{ccccccc} 1 & \rightrightarrows & 2 & \rightarrow & 3 & \leftarrow & 4 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 5 & & \end{array}$

Luego $P(1) = \begin{smallmatrix} 1 \\ 22 \\ 33 \\ 55 \end{smallmatrix}$, entonces $\text{Rad}P(1) = \begin{smallmatrix} 22 \\ 33 \\ 55 \end{smallmatrix} = P(2) \oplus P(2)$

2.4 Resoluciones minimales

Recordemos el ejemplo de $Q = 1 \xrightarrow[\alpha]{\beta} 2$:

$$0 \rightarrow 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \hookrightarrow {}_2^1 2 \oplus {}_2^1 2 \oplus 2 \rightarrow {}_2^1 1 \rightarrow 0$$

es una resolución exacta de ${}_2^1 1$. Pero podemos quitar un factor $P(2)$ y que siga siendo exacta:

$$0 \rightarrow 2 \oplus 2 \oplus 2 \hookrightarrow {}_2^1 2 \oplus {}_2^1 2 \rightarrow {}_2^1 1 \rightarrow 0$$

Una resolución es minimal si, intuitivamente, no tenemos factores superfluos en los proyectivos. Para definir una resolución minimal necesitamos definir un cubrimiento proyectivo:

Definición 2.26. Sea M una representación de un Q . Un **cubrimiento proyectivo** es una representación proyectiva P junto con un morfismo sobreyectivo $g : P \rightarrow M$ tal que, cada vez que tengo un morfismo sobreyectivo $g' : Q \rightarrow M$ con Q' proyectivo, existe un morfismo sobreyectivo $h : Q \rightarrow P$ tal que

$$\begin{array}{ccc} & & Q \\ & \swarrow h & \downarrow g' \\ P & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

conmuta.

Definición 2.27. Sea M una representación de un Q . Una **cápsula inyectiva** es una representación inyectiva I junto con un morfismo inyectivo $g : M \hookrightarrow I$ tal que, cada vez que tengo un morfismo inyectivo $g' : M \hookrightarrow I'$ con I' inyectivo, existe un morfismo inyectivo $h : I \rightarrow I'$ tal que

$$\begin{array}{ccc} & & I' \\ & \nearrow g' & \uparrow h \\ M & \xrightarrow{g} & I \end{array}$$

conmuta.

La existencia de cubrimientos proyectivo no es muy difícil de establecer pero una vez que tengamos la equivalencia de Rep_Q con la categoría de Mod_kQ será inmediato por la existencia de cubrimientos proyectivos para módulos sobre una k -álgebra de dimensión finita. La existencia y unicidad también valen si el quiver tiene relaciones. Para ver la existencia de cubrimientos proyectivos en el caso general de una álgebra de dimensión finita ver por ejemplo [ASS06]

Teorema 2.28. *Sea Q un quiver sin ciclos dirigidos y M una representación. Entonces existe $P \xrightarrow{g} M$ un cubrimiento proyectivo. Además es único: si $P' \xrightarrow{g'} M$ es otro proyectivo que cumple la definición, existe un isomorfismo $h : P \rightarrow P'$ tal que $g' \circ h = g$*

Notamos que el teorema análogo para representaciones inyectivas también es cierto.

Un lema que utilizaremos más adelante es que la suma de cubrimientos proyectivos es un cubrimiento proyectivo:

Lema 2.29. *Sea $p : P \rightarrow X$ y $q : Q \rightarrow Y$ cubrimientos proyectivos. Entonces $p \oplus q : P \oplus Q \rightarrow X \oplus Y$ es un cubrimiento proyectivo.*

Demostración. La demostración sale con una definición equivalente de cubrimiento proyectivo: $p : P \rightarrow X$ es un cubrimiento proyectivo si P es proyectivo, p es sobreyectiva y $\text{Ker}(p)$ es superfluo en P , es decir, si $P = \text{Ker}(p) + N \implies N = P$. Supongamos que $V_1 := \text{Ker}(p)$ y $V_2 := \text{Ker}(q)$ son superfluos en P y Q resp. Demostremos que $V_1 \oplus V_2 \subseteq P \oplus Q$ es superfluo. Supongo $V_1 \oplus V_2 + N = P \oplus Q = V_1 \oplus 0 + \tilde{N}$ con $\tilde{N} = 0 \oplus V_2 + N$.

Demostremos primero que $P = P \cap \tilde{N}$: si $p \in P$, $(p, 0) = (v_1, 0) + \tilde{n} = (v_1 + \tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$. Entonces $\tilde{n}_2 = 0$ luego $\tilde{n} = (\tilde{n}_1, 0) = \tilde{n}_1 \in \tilde{N} \cap P$. Por lo tanto $P = V_1 + \tilde{N} \cap P$ y como V_1 es superfluo $P = \tilde{N} \cap P$.

Demostremos ahora que $Q = Q \cap \tilde{N}$: Sea $q \in Q$, $q = (0, q) = (p_0, 0) + \tilde{n} = (p_0 + \tilde{n}_1, 0) + (0, \tilde{n}_2) = (0, \tilde{n}_2)$. Si $\tilde{n} = (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$, $\tilde{n}_2 = \tilde{n} - (\tilde{n}_1, 0) \in \tilde{N} \cap Q$ pues $\tilde{n}_1 \in P = \tilde{N} \cap P$. Entonces $(0, \tilde{n}_2) \in \tilde{N}$. Luego $Q = \tilde{N} \cap Q$. Luego $P \oplus Q = \tilde{N} = 0 \oplus V_2 + N$

Para concluir demostremos que $P \oplus Q = N$: Sea $q \in Q$. Luego $q = (0, q) = (n_1, v_2 + n_2)$. Entonces $n_1 = 0$ y entonces $n = (0, n_2) = n_2 \in Q \cap N$. Luego $Q = V_2 + Q \cap N$ y como V_2 es superfluo, $Q = Q \cap N$. Entonces si $p \in P$, $p = (n_1, 0) = n - (0, n_2) \in N$. Entonces $P = P \cap N$ y en conclusión $P \oplus Q = N$. \square

Ya estamos en condiciones de definir una resolución minimal:

Definición 2.30. Una resolución proyectiva

$$\dots P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$$

es **minimal** si $f_0 : P_0 \rightarrow M$ es un cubrimiento proyectivo y $f_i : P_i \rightarrow \text{Im}(f_i) \subseteq P_{i-1}$ es un cubrimiento proyectivo para todo $i \geq 1$

Definición 2.31. Una resolución inyectiva

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} I_2 \rightarrow \dots$$

es **minimal** si $f_0 : M \rightarrow I_0$ es una cápsula inyectiva y $\tilde{f}_i : \frac{P_{i-1}}{\text{Ker}(f_i)} \rightarrow I_i$ es una cápsula inyectiva para todo $i \geq 1$

Si se admite la existencia de cubrimientos proyectivos se puede construir una resolución proyectiva inductivamente: Si $P_0 \xrightarrow{f_0} M$ es un cubrimiento proyectivo, tomo $P_1 \xrightarrow{\tilde{f}_1} \text{Ker}(f_0)$ un cubrimiento proyectivo del núcleo de f_0 , defino $f_1 = i \circ \tilde{f}_1$ y así sigo. Finalmente, la unicidad del cubrimiento proyectivo implica la unicidad de las resoluciones proyectivas minimales.

Vimos que Rep_Q es hereditaria, y esto implica que dada una representación M , existe una sucesión exacta corta $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$. Por otra parte, existe una resolución proyectiva minimal $\cdots \rightarrow U_2 \rightarrow U_1 \rightarrow U_0 \rightarrow M \rightarrow 0$. En principio, no sabemos si esa resolución proyectiva minimal se termina en U_1 , es decir, si $U_i = 0 \forall i \geq 2$, solamente sabemos que *una* resolución proyectiva (no necesariamente minimal) se termina después de dos términos. Pero si es minimal, debería efectivamente ser más chica y por lo tanto terminarse después de dos términos. Veamos que efectivamente este es el caso. Para eso usaremos un lema que nos será más útil más tarde al hacer álgebra homológica con el funtor translación:

Lema 2.32. *Sea $E_1 \xrightarrow{a} E_0 \xrightarrow{b} M \rightarrow 0$ una presentación proyectiva de M (i.e., simplemente una resolución proyectiva truncada). Sea $U_1 \xrightarrow{u} U_0 \xrightarrow{w} M \rightarrow 0$ una presentación proyectiva minimal de M . Entonces existen isomorfismos y representaciones V_0 y V_1 (posiblemente nulas) y un morfismo $v : V_1 \rightarrow V_0$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & \xrightarrow{a} & E_0 & \xrightarrow{b} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel & & \\ U_1 \oplus V_1 & \xrightarrow{u \oplus v} & U_0 \oplus V_0 & \xrightarrow{(w;0)} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Demostración. Como $U_0 \xrightarrow{w} M$ es un cubrimiento proyectivo de M y $E_0 \xrightarrow{b} M$ es sobre, existe $h : E_0 \rightarrow U_0$ sobreyectivo tal que

$$\begin{array}{ccc} & E_0 & \\ & \swarrow h & \downarrow b \\ U_0 & \xrightarrow{w} & M \end{array}$$

conmuta. Como h es sobre y U_0 es proyectivo, existe una retracción $r : U_0 \rightarrow E_0$ tal que $h \circ r = \text{Id}_{U_0}$. Luego $E_0 = \text{Im}(r) \oplus \text{Ker}(h)$. Defino $\psi : \text{Im}(r) \oplus \text{Ker}(h) \rightarrow U_0 \oplus \text{Ker}(h)$ como $\psi = h|_{\text{Im}(r)} \oplus \text{Id}$ y tomo $V_0 := \text{Ker}(h)$. Claramente es un iso pues cada uno de sus componentes es un iso. Además es claro que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(r) \oplus \text{Ker}(h) & & \\ h|_{\text{Im}(r)} \oplus \text{Id} \downarrow \cong & \searrow b & \\ U_0 \oplus V_0 & \xrightarrow{(w;0)} & M \end{array}$$

Luego tengo completado el primer cuadrado del diagrama. Notar que V_0 es proyectivo por ser sumando directo de un proyectivo. En la presentación original puedo reemplazar a por $a' = \psi \circ a$, E_0 por $U_0 \oplus V_0$ y b por $(w, 0)$ y sigue siendo una presentación proyectiva:

$$E_1 \xrightarrow{a'} U_0 \oplus V_0 \xrightarrow{(w;0)} M \longrightarrow 0.$$

$V_0 \xrightarrow{\text{Id}} V_0$ es un cubrimiento proyectivo trivialmente, y $U_1 \xrightarrow{u} \text{Im}(u)$ también, entonces $U_1 \oplus V_0 \xrightarrow{u \oplus \text{Id}} \text{Im}(u) \oplus V_0$ es un cubrimiento proyectivo por el lema 2.27. Además, $\text{Im}(a') = \text{Ker}((w, 0)) = \text{Ker}(w) \oplus V_0 = \text{Im}(u) \oplus V_0$. Luego, por def. de cubrimiento proyectivo existe un $h' : E_1 \rightarrow U_1 \oplus V_0$ sobreyectivo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
E_1 & & \\
\downarrow h' & \searrow a' & \\
U_1 \oplus V_0 & \xrightarrow{u \oplus Id} & \text{Im}(u) \oplus V_0
\end{array}$$

Notar que $\text{Ker}(h') \subseteq \text{Ker}(a')$. Como $U_1 \oplus V_0$ es proyectivo, existe una retracción $r' : U_1 \oplus V_0 \rightarrow E_1$ tal que $h' \circ r' = Id_{U_1 \oplus V_0}$. Entonces E_1 se escribe como $E_1 = \text{Im}(r') \oplus \text{Ker}(h')$. Entonces tengo un isomorfismo $h'|_{\text{Im}(r')} \oplus Id : \text{Im}(r') \oplus \text{Ker}(h') \rightarrow (U_1 \oplus V_0) \oplus \text{Ker}(h')$. Finalmente, definamos

$$\begin{aligned}
U_1 \oplus V_0 \oplus \text{Ker}(h') &\xrightarrow{u \oplus P_{V_0}} U_0 \oplus V_0 \\
(a, b, c) &\rightarrow (u(a), b)
\end{aligned}$$

Claramente $v := P_{V_0}$ es sobreyectiva. Veamos para concluir que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
E_1 = \text{Im}(r') \oplus \text{Ker}(h') & \xrightarrow{a'} & U_0 \oplus V_0 \\
\downarrow h' \oplus Id \cong & & \parallel \\
(U_1 \oplus V_0) \oplus \text{Ker}(h') & \xrightarrow{u \oplus P_{V_0}} & U_0 \oplus V_0 \\
\\
x \oplus y & \xrightarrow{a'} & a'(x)_{U_0} \oplus a'(x)_{V_0} \\
\downarrow h' \oplus Id \cong & & \parallel \\
(h'(x)_{U_1} \oplus h'(x)_{V_0}) \oplus y & \xrightarrow{u \oplus P_{V_0}} & u(h'(x)_{U_1}) \oplus h'(x)_{V_0}
\end{array}$$

Y el cuadrado conmuta pues $u(h'(x)_{U_1}) \oplus h'(x)_{V_0} = (u \oplus Id)(h'(x)) = a'(x) = a'(x)_{U_0} \oplus a'(x)_{V_0}$. Tomando $V_1 = (V_0 \oplus \text{Ker}(h'))$ y $v = P_{V_0}$ obtengo el teorema. \square

Corolario 2.33. Si Q es un carcaj sin ciclos dirigidos y $M \in \text{Rep}_Q$, existe una resolución proyectiva minimal

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Demostración. Sea $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ una presentación proyectiva de M y $U_1 \xrightarrow{u} U_0 \xrightarrow{w} M \rightarrow 0$ una presentación proyectiva minimal de M . Por el lema existe un rectángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel \\
& & U_1 \oplus V_1 & \xrightarrow{u \oplus v} & U_0 \oplus V_0 & \xrightarrow{(w; 0)} & M \longrightarrow 0
\end{array}$$

Entonces u es inyectiva. \square

Parte 3

Quivers con relaciones y el álgebra de caminos

Buena parte de la teoría que vimos podría repetirse si los morfismos de una representación cumplieran relaciones entre ellos, por ejemplo, que la composición de dos flechas sea cero. Y además esto permite una mayor riqueza en sus representaciones. Por ejemplo, si considero $\mathbb{L} = 1 \rightrightarrows \alpha \ 2$, los caminos de este quiver tienen todos la forma $\langle \alpha^n : n \in \mathbb{N}_0 \rangle$ y si notamos a la concatenación de dos caminos con un punto, " $\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha^{n+m}$ ". Entonces el conjunto de caminos es un álgebra $k\mathbb{L}$ isomorfa a los polinomios, $k\mathbb{L} \cong k[x]$. ¿Cómo modelamos entonces $\frac{k[x]}{\langle x^2 \rangle}$? Habría que introducir en el quiver la relación $\alpha^2 = 0$. Otra razón para introducir relaciones es que queremos considerar quivers que puedan tener ciclos dirigidos. Recordemos que su problema era que sus "representaciones" proyectivas e inyectivas podían no ser representaciones, porque podían no tener dimensión finita. Imponiendo que $\alpha^2 = 0$ en \mathbb{L} , vale que $P(1) = (\langle \{e, \alpha\} \rangle, \varphi_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$ es una representación proyectiva e indescomponible. En este capítulo se da algunas demostraciones propias de hechos conocidos como la proposición 3.51, y se hacen algunos cálculos explícitos de dimensión global de un álgebra en el ejemplo 3.58.

Definición 3.1. Dado un quiver Q , una **relación** es una combinación lineal $\sum \lambda_i c_i$ donde los c_i son caminos en Q paralelos y de longitud ≥ 2 . Un **quiver con relaciones** es un quiver Q con un conjunto R de relaciones. Lo denotamos (Q, R) . Finalmente, una representación M de un quiver con relaciones es una representación de Q , (M_i, φ_α) donde $\varphi_\rho = 0$ para toda relación $\rho \in R$, donde por definición $\varphi_\rho := \sum \lambda_c \varphi_c$ si $\rho = \sum \lambda_c c$

Ejemplo 3.2. Sea $Q = \begin{array}{ccc} & 2 & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \beta \\ 1 & \xleftarrow{\gamma} & 3 \end{array}$ con $R = \langle \beta\gamma, \gamma\alpha \rangle$ Luego, por ejemplo $\begin{array}{ccc} & k^2 & \\ Id \nearrow & & \searrow 0 \\ k^2 & \xleftarrow{Id} & k^2 \end{array}$ no

es una representación pues $\varphi_\alpha \circ \varphi_\gamma \neq 0$ pero $\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \nearrow & k^2 & \searrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ k^2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & k^2 \end{array}$ sí lo es.

Copiando las definiciones de la primera sección podemos definir morfismo de representaciones, suma directa, subrepresentación, cocientes, pull backs, push outs, resoluciones proyectivas y todos los conceptos anteriores.

La mayoría de los teoremas de la primera y segunda sección son ciertos para quivers con relaciones. La mayor diferencia es que la categoría $Rep_{(Q,R)}$ no necesariamente es hereditaria. Pero sí es cierto que los $P(i)$ van a ser una colección completa de todos los proyectivos indescomponibles. Por ejemplo el teorema de Krull-Schmidt sigue valiendo, la categoría $Rep_{(Q,R)}$ es

abeliana, los teoremas 1.28, 1.30, 1.31, 1.33, 1.35, 2.7, 2.9, 2.16, 2.26 y la existencia de resoluciones proyectivas e inyectivas minimales.

Naturalmente, los proyectivos e inyectivos indescomponibles de (Q, R) van a ser los de Q

módulo R , por ejemplo si $Q = 5 \xrightarrow{\eta} 4 \begin{matrix} \nearrow^{\beta} 2 \\ \searrow^{\sigma} 3 \end{matrix} \begin{matrix} \searrow^{\alpha} 1 \\ \nearrow^{\gamma} 1 \end{matrix}$, $R = \langle \beta\alpha, \sigma\gamma \rangle$ Entonces $P(5)$ debería ser

$k \xrightarrow{1} k \begin{matrix} \nearrow^1 k \\ \searrow^1 k \end{matrix} \rightarrow 0$ pues no hay ningún camino no nulo de 5 a 1. Pero para formalizar esta definición (y por muchas razones más) es útil introducir el álgebra de caminos.

3.1 El álgebra de caminos

El álgebra de caminos es la conexión de la teoría de quivers con la teoría de módulos y permite a ver a todos las representaciones como módulos sobre esta k -álgebra. A lo largo de la sección supondremos k un cuerpo algebraicamente cerrado y los módulos sobre un álgebra serán salvo mención explícita, a derecha.

Definición 3.3. Dado un quiver Q el álgebra de caminos kQ es el k espacio vectorial con base todos los caminos de Q y multiplicación dada por la concatenación: si c y d son caminos, $c \cdot d = cd$ si $t(c) = s(d)$ y cero sino. En general usaremos simplemente la letra A para denotar al álgebra de caminos.

Ejemplo 3.4. • Ya vimos que si \mathbb{L} es el carcaj con un vértice y un lazo, $k\mathbb{L} \cong K[X]$

- Sea $Q = \begin{matrix} 2 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\gamma} 4 \\ \beta \uparrow \\ 3 \end{matrix}$. Entonces kQ es una K álgebra de dimensión 7. No es difícil probar que

$$kQ \cong \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 \\ K & 0 & 0 & K \end{bmatrix}$$

con

$$\alpha \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_i \longleftrightarrow E_{i,i}$$

- Sea $Q = \alpha \curvearrowright 1 \xleftarrow{\beta} 2 \curvearrowleft \gamma$. Notar que si tan sólo tuvieramos $Q' = 1 \xleftarrow{\beta} 2$ entonces es fácil demostrar que $kQ' \cong \begin{bmatrix} K & 0 \\ K & K \end{bmatrix}$. Como tiene dos lazos distintos, entonces

$$kQ \cong \begin{bmatrix} K[x] & 0 \\ K[x, y] & K[y] \end{bmatrix}, \quad \alpha \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

Notar que kQ es una álgebra unitaria, pues tiene a $1_A = \sum_{i \in Q_0} e_i$ como uno. Si Q no tiene ciclos orientados, la cantidad de caminos posibles es finita. Entonces kQ es un álgebra de dimensión finita.

Una observación es que $e_i kQ \subseteq kQ$ es un módulo a derecha sobre kQ con el producto $(e_i x) \cdot c = e_i x c$ y que como conjunto $e_i kQ = \{e_i x : x \in kQ\} = \{c : s(c) = i\} \cong P(i)$. Dado que los $P(i)$ son las únicas representaciones proyectivas de Q , eso nos da la idea de que los $e_i kQ$ van a ser los únicos proyectivos de la categoría.

El equivalente algebraico de un quiver con relaciones (Q, I) es un cociente $\frac{kQ}{I}$, con I un ideal *admisibile*. Como queremos que nuestra álgebra tenga dimensión finita, queremos que todos los ciclos dirigidos sean cero si dan una suficiente cantidad de vueltas. Así que tenemos que dividir por un ideal que no incluya flechas (para no eliminar flechas o quedarnos con un carcaj desconexo) pero que sea lo suficientemente grande para que todos los caminos a partir de una longitud estén.

Definición 3.5. El **ideal de flechas** R_Q es el ideal bilátero generado por las flechas de Q . Así R_Q tiene todos los caminos de Q excepto los caminos triviales e_i . Además noto como kQ_s a el espacio vectorial con base los caminos de longitud s . Entonces como espacio vectorial se puede escribir $R_Q = kQ_1 \oplus \dots \oplus kQ_n \oplus \dots$.

Un **ideal admisibile** I es un ideal bilátero de kQ tal que $I \cap (kQ_0 \oplus kQ_1) = 0$ y existe un $m \geq 2$ tal que $kQ_l \subseteq I$ para todo $l \geq m$

La definición implica que no quito flechas del quiver al dividir, pues $I \cap (kQ_0 \oplus kQ_1) = 0$ y que además es el cociente es de dimensión finita sobre k pues $kQ_l \subseteq I$ para todo l a partir de un número natural.

Ejemplo 3.6. Sea $Q = \begin{array}{ccc} & 2 & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \beta \\ 1 & \xleftarrow{\gamma} & 3 \end{array}$ Entonces el ideal bilátero generado por $\beta\gamma$, $\langle \beta\gamma \rangle$, es un

ideal que contiene a todos los caminos de longitud mayor o igual a 3, y el único camino de longitud 2 que contiene es $\beta\gamma$.

Observacion 3.7. Sea I un ideal admisibile generado por x_1, \dots, x_m . Entonces $e_i x_k e_j \in I$, $e_i x_k e_j = \sum \lambda_j c_j$ donde todos los c_j empiezan en i y terminan en j . Es decir, $e_i x_k e_j$ es una relación de Q , y como $x_k = \sum_{i,j \in Q_0} e_i x_k e_j$ todo generador se escribe como una suma finita de relaciones. Luego I está generado por finitas relaciones.

Definición 3.8. Un **álgebra de caminos acotada** (*bound quiver algebra*) es un cociente $\frac{kQ}{I}$ donde I es un ideal admisibile.

Observacion 3.9. Como kQ es unitaria y de dimensión finita, $\frac{kQ}{I}$ es unitaria y de dimensión finita.

Ejemplo 3.10. Ideales distintos pueden dar lugar a álgebras de cocientes isomorfas: Si $Q = \begin{array}{ccc} & & \\ 1 & \xleftarrow[\beta]{\alpha} 2 & \xleftarrow{\gamma} 3 \end{array}$ entonces para todo $\lambda \in k$ se define el ideal $I_\lambda = \langle \gamma\alpha + \lambda\gamma\beta \rangle$ entonces $\frac{kQ}{I_\lambda} \cong \frac{kQ}{I_{\lambda'}}$ para todo $\lambda, \lambda' \in k$. No es difícil probar que para todo $\lambda, \lambda' \neq 0$ el morfismo que manda $e_i \rightarrow e_i$, $\gamma \rightarrow \gamma$ y $\beta \rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda}\beta$ induce un isomorfismo de álgebras en el cociente.

Recordemos unos lemas esenciales sobre la estructura de las k álgebras de dimensión finita:

Lema 3.11. Sea e un elemento idempotente de A no nulo. Entonces e y $1 - e$ son ortogonales idempotentes y A como A módulo a derecha se escribe como

$$A = eA \oplus (1 - e)A$$

En particular, si e es idempotente, eA es proyectivo, pues es un sumando directo de A .

Lema 3.12. Si $A = M_1 \oplus M_2$ es una suma directa como A módulos a derecha, entonces

1. existen ortogonales, idempotentes $e_1 \in M_1$ tal que $e_2 \in M_2$ y $1 = e_1 + e_2$
2. M_i es indescomponible si y sólo si e_i es primitivo.

Teorema 3.13. Sea A una k -álgebra de dimensión finita y a_1, a_2, \dots, a_n elementos primitivos idempotentes y ortogonales tal que $1 = a_1 + \dots + a_n$. Entonces

$$A \cong a_1 A \oplus \dots \oplus a_n A$$

Donde la descomposición de arriba es como A módulos a derecha y cada $e_i A$ es un A módulo a derecha indescomponible.

Notemos que los caminos triviales son elementos idempotentes y ortogonales del álgebra $e_i e_j = e_j e_i = 0$ si $i \neq j$ y $(e_i)^2 = e_i$. Si los caminos triviales son primitivos (es decir si e_i no se puede escribir como $a + b$ con a y b elementos ortogonales e idempotentes no nulos) entonces podemos usar ese teorema.

Lema 3.14. Sea Q un quiver sin ciclos dirigidos. Entonces \bar{e}_i es un elemento primitivo de $\frac{kQ}{I}$.

Demostración. Supongo $\bar{e}_i = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} = \overline{\sum_c \lambda_c c}$, $\bar{b} = \overline{\sum_c \mu_c c}$. Como \bar{a} es idempotente $\bar{a}^2 = \bar{a} = \overline{(\sum_c \lambda_c c)(\sum_c \lambda_c c)} = \overline{\sum_{c,c'} \lambda_c \lambda_{c'} c c'}$ = $\overline{\sum_c (\sum_{c'.c''=c} \lambda_{c'} \lambda_{c''}) c}$ = \bar{a} . Luego $\bar{a}^2 - \bar{a} = \sum_c (\sum_{c'.c''=c} \lambda_{c'} \lambda_{c''} - \lambda_c) c = y \in I$. Como I es un ideal admisible, no contiene flechas ni caminos triviales. Luego, mirando la coordenada de un e_j tengo que el coeficiente del lado de la derecha es cero y el lado de la izquierda es $\sum_{c'.c''=e_j} \lambda_{c'} \lambda_{c''} - \lambda_{e_j} = \lambda_{e_j}^2 - \lambda_{e_j} = 0$. Luego $\lambda_{e_j} = 1$ o $0 \forall j$. Lo mismo vale para \bar{b} :

$$\sum_c (\sum_{c'.c''=c} \mu_{c'} \mu_{c''} - \mu_c) c = y \in I \quad (3.1)$$

Además $\bar{a} \cdot \bar{b} = \sum_c (\sum_{c'.c''=c} \lambda_{c'} \mu_{c''}) c = y' \in I$. Y mirando la coordenada e_j , como I tiene todos caminos de longitud dos o más, $\lambda_{e_j} \mu_{e_j} = 0$. Luego si $\lambda_{e_j} \neq 0$ entonces $\mu_{e_j} = 0$.

Por otra parte $e_i - \bar{a} - \bar{b} = y'' \in I$. Mirando la coordenada e_i , $1 - \lambda_{e_i} - \mu_{e_i} = 0 \iff 1 = \lambda_{e_i} + \mu_{e_i}$. Luego alguno de los dos coeficientes es no-nulo. Supongo que $\lambda_{e_i} \neq 0$. Entonces por la observación de arriba debe ser 1. Entonces $0 = \mu_{e_i}$. Y mirando la coordenada e_j (con $j \neq i$) en $e_i - \bar{a} - \bar{b} = y''$ tengo que $0 - \lambda_{e_j} - \mu_{e_j} = 0 \iff \lambda_{e_j} = -\mu_{e_j}$ y por la observación del párrafo anterior $\lambda_{e_j} = \mu_{e_j} = 0$. Luego \bar{b} tiene ceros en las coordenadas $e_k \forall k$.

Si ahora α es una flecha cualquiera, mirando la coordenada α en (3.1), y usando que I es un ideal admisible y por lo tanto no contiene flechas, $\sum_{c.c'=\alpha} \mu_c \mu_{c'} - \mu_\alpha = 0 \iff -\overset{=0}{\mu_{e_s(\alpha)}} \mu_\alpha + \mu_\alpha \overset{=0}{\mu_{e_t(\alpha)}} - \mu_\alpha = -\mu_\alpha = 0$ Luego todas los coeficientes de los caminos de longitud 1 y 0 son nulos. Si ahora miro cualquier camino $d \notin I$ de longitud 2, $\sum_{c.c'=d} \mu_c \mu_{c'} - \mu_d = 0 \implies \mu_d = 0$. Usando que I es un ideal, si repito esto para todo camino c que no esté en I tengo que $\mu_c = 0 \forall c \notin I$. Luego $\bar{b} \in I$ y por lo tanto $\bar{b} = 0$. \square

Corolario 3.15. Sea Q un carcaj y \bar{e}_i los caminos triviales vistos en el cociente $A = \frac{kQ}{I}$. Luego los \bar{e}_i son primitivos idempotentes y ortogonales y $1_A = \bar{e}_1 + \dots + \bar{e}_n$. Entonces A admite una descomposición

$$A \cong \bar{e}_1 A \oplus \dots \oplus \bar{e}_n A$$

como A módulo a derecha, donde los $\bar{e}_i A$ son módulos a derecha proyectivos e indecomponibles.

Demostración. Por el teorema 3.10 tenemos la descomposición de arriba, y que son proyectivos es obvio pues son sumandos directos de un libre. \square

Como corolario, por el teorema de Krull Schmidt para la categoría de A módulos a derecha (con A una k álgebra de dimensión finita), tenemos que los $e_k A$ son los únicos (salvo isomorfismo) módulos proyectivos indecomponibles:

Teorema 3.16. (Clasificación de proyectivos) *Sea P un A módulo a derecha proyectivo e indecomponible. Entonces existe $i \in Q_0$ tal que $P \cong e_i A$*

Demostración. Como P es proyectivo, P es sumando directo de un libre A^n , $A^n = P \oplus Q$. Por Krull Schmidt, como P es indecomponible, $P \cong e_i A$ para algún i . \square

Notar que la descomposición no captura la estructura de álgebra de A sólo la de A módulo a derecha. En efecto, si $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$, kQ es un K espacio vectorial de dimensión tres y se descompone como $\langle \{e_1, \alpha\} \rangle_k \oplus \langle e_2 \rangle_k$ como módulo a derecha. Entonces $\alpha \cdot e_2 = \alpha \neq 0 \in \langle \{e_1, \alpha\} \rangle_k$. Pero en la estructura de álgebra de $\langle \{e_1, \alpha\} \rangle_k \oplus \langle e_2 \rangle_k$ la multiplicación sería $(\alpha, 0) \cdot (0, e_2) = (\alpha \cdot 0; 0 \cdot e_2) = 0$.

Antes de probar el teorema central de esta sección expliquemos el interés por estudiar álgebras de caminos. Si bien no es cierto que toda k álgebra es isomorfa a un álgebra de caminos, sí es cierto que *toda k álgebra básica de dimensión finita es isomorfa a un álgebra de caminos dividida por un ideal admisible*. Una k álgebra A de dimensión finita se dice **básica** si dado $\{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto de elementos ortogonales, primitivos e idempotentes tal que $a_1 + \dots + a_n = 1_A$ tenemos que $a_i A \cong a_j A$ (como A -módulos) $\iff i = j$. Si A no es básica, podemos definir $e_A = e_{s_1} + \dots + e_{s_t}$ donde $\{e_{s_1}, \dots, e_{s_t}\}$ es un conjunto maximal de elementos primitivos, ortogonales e idempotentes tal que $e_{s_i} \cong e_{s_j} \iff i = j$. Entonces $e_A A e_A$ es básica y la categoría $Mod_{e_A A e_A}$ es equivalente a Mod_A . Entonces, estudiar la categoría de módulos sobre cualquier álgebra finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es equivalente a estudiar una categoría $Rep_{Q,I}$ de caminos con relaciones.

Observacion 3.17. Si Q es un quiver sin ciclos dirigidos, el álgebra $A = kQ$ es básica.

Demostración. En efecto, supongo $e_i A \cong e_j A$ y sea $\psi : e_i A \rightarrow e_j A$ el isomorfismo. Tomo $\psi(e_i) := e_j x$ con $x = \sum_c \lambda_c c$. Luego $e_j x = \sum_{\substack{c : s(c)=j \\ t(c)=i}} \lambda_c c + \sum_{\substack{c : s(c)=j \\ t(c) \neq i}} \lambda_c c$

Como ψ es A lineal, si $k \neq i$ $\psi(e_i e_k) = \psi(0) = 0 = \psi(e_i) e_k = \sum_{\substack{c : s(c)=j \\ t(c)=k}} \lambda_c c$ para todo $k \neq i$.

Luego $e_j x = \sum_{\substack{c : s(c)=j \\ t(c)=i}} \lambda_c c$. Entonces si no existe ningún camino de j en i , $\psi(e_i) = 0$, absurdo.

Por lo tanto debe existir al menos un camino $c_0 : j \rightarrow i$. Pero entonces $\dim e_j A > \dim e_i A$ y no pueden ser isomorfos. \square

Radical y sócalo

Recordemos rápidamente la definición de radical y sócalo (*socle*):

Definición 3.18. Dada una k álgebra A , el *radical* de A , notado $\text{Rad } A$, es el conjunto que cumple alguna de las siguientes definiciones equivalentes:

- 1) $\text{Rad } A$ es la intersección de todos los ideales maximales a derecha.
- 2) $\text{Rad } A$ es la intersección de todos los ideales maximales a izquierda
- 3) $\text{Rad } A = \{a : 1 - ab \text{ tiene una inversa a derecha } \forall b \in A\}$
- 4) $\text{Rad } A = \{a : 1 - ab \text{ tiene una inversa a ambos lados } \forall b \in A\}$
- 5) $\text{Rad } A = \{a : 1 - ba \text{ tiene una inversa a derecha } \forall b \in A\}$
- 6) $\text{Rad } A = \{a : 1 - ba \text{ tiene una inversa a ambos lados } \forall b \in A\}$

Corolario 3.19. 1. $\text{Rad } A$ es un ideal bilátero

$$2. \text{Rad}\left(\frac{A}{\text{Rad}(A)}\right) = 0$$

3. Si I es un ideal nilpotente bilátero, entonces $I \subseteq \text{Rad } A$

Teorema 3.20. Si A es una k álgebra de dimensión finita, $\text{Rad } A$ es nilpotente.

Dado ahora un módulo, también podemos definir su radical:

Definición 3.21. Si M es un A módulo a derecha, definimos $\text{Rad } M$ como la intersección de todos los submódulos maximales de M . Notar que como A es una álgebra de dimensión finita, M admite algún submódulo maximal (en particular, propio).

Algunas propiedades del radical de un módulo en general:

Proposición 3.22. Sea A una k álgebra de dimensión finita y $M, N \in \text{Mod}_A$. Entonces:

1. $\text{Rad } M = \{m \in M : f(m) = 0 \forall f \in \text{Hom}_A(M, S) \text{ con } S \text{ simple}\}$
2. $\text{Rad } (M \oplus N) = \text{Rad } M \oplus \text{Rad } N$
3. Si $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ entonces $f(\text{Rad } M) \subseteq \text{Rad } N$
4. $\text{Rad } M = M \text{Rad } A$
5. Si $L + \text{Rad } M = M$ con $L \leq M$ entonces $L = M$
6. Si considero a A como A módulo a derecha, la definición de radical como anillo y de radical como A módulo coinciden.

En particular 5) nos dice que $\text{Rad } M$ es un submódulo superfluo de M y por lo tanto Si P es proyectivo, $P \twoheadrightarrow \frac{P}{\text{Rad } P}$ es un cubrimiento proyectivo.

Corolario 3.23. En las mismas condiciones que antes:

- 1) $\frac{M}{\text{Rad } M}$ es semisimple y un módulo a derecha sobre la k álgebra $\frac{A}{\text{Rad } A}$
- 2) Si L es un submódulo tal que $\frac{M}{L}$ es semisimple, entonces $\text{Rad } M \subseteq L$
- 3) M es semisimple si y sólo si $\text{Rad } M = 0$

Definición 3.24. El cociente $\frac{M}{\text{Rad } M}$ se nota $\text{top } M$ y por la observación anterior siempre es semisimple.

Ejemplo 3.25. Sea $A = kQ$ el álgebra de caminos con Q sin ciclos dirigidos. Entonces $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ y por lo tanto (por 2 y 6 de 3.22) $\text{Rad } A = \text{Rad } e_1A \oplus \cdots \oplus \text{Rad } e_nA$. Afirmando que $\text{Rad } (e_iA) = \langle c : c : i \rightarrow j, c \neq e_i \rangle$.

\supseteq) Sea $c \neq e_i$ que empieza en i , $c = e_i c \in e_iA$. Además, para ver que está en el radical, quiero ver que $e_i - c.b$ tiene inversa a derecha para todo b . En efecto, si $t(c) \neq s(b)$ entonces $c.b = 0$ y listo. Y si $t(c) = s(b)$ entonces $t(b) \neq i$ porque Q no tiene ciclos dirigidos y luego $(e_i - cb).e_i = e_i^2 = e_i$. Por lo tanto $c \in \text{Rad}(e_iA)$. \subseteq) Y si $e_i c \in \text{Rad } e_iA$, entonces $e_i c$ o es cero o es un camino que empieza en i , y no es constante pues $e_i \notin \text{Rad } e_iA$. Eso termina de demostrar la igualdad. Por lo tanto $\text{Rad } kQ = \langle \text{caminos no constantes} \rangle_k$.

Si ahora $A = \frac{kQ}{I}$ con I un ideal admisible, afirmo que también $\text{Rad } e_iA = \langle \bar{c} : c : i \rightarrow j, c \neq e_i \rangle$. Sea c en el conjunto de la derecha y $e_i - cb$. Quiero ver que ese elemento tiene inversa a derecha. Por el mismo argumento puedo suponer $t(c) = s(b)$, y hay dos posibilidades: si $t(b) \neq i$, $(e_i - cb).e_i = e_i$; y si $t(b) = i$, entonces cb es un ciclo dirigido que pasa por i , entonces para algún m , $(cb)^m = 0$. Luego $(e_i - cb)(e_i + cb) = e_i - (cb)^2$. $(e_i - (cb)^2)(e_i + (cb)^2) = e_i - (cb)^4$. Así siguiendo multiplicando a la derecha por el conjugado, existe x tal que $(e_i - cb)x = e_i$. Y si $e_i c$ pertenece al radical, el mismo argumento de antes sirve.

Por lo tanto, el radical de A es simplemente el ideal generado por las flechas de A .

Otra construcción útil es la del sócalo

Definición 3.26. Sea M un A módulo. Se define el **sócalo** o *socle* como la suma de todos sus submódulos simples.

$$\text{Soc } M = \sum_{S \text{ simple}} S$$

Como suma de simples es semisimple, el sócalo de M es un submódulo semisimple.

Antes de finalizar la sección recordemos algunos teoremas muy útiles sobre k -álgebras: la demostración de todos ellos está por ejemplo, en [SY12].

Teorema 3.27. Sea A una k -álgebra. Son equivalentes:

1. A es local (i.e., tiene un único ideal maximal a derecha).
2. A tiene un único ideal maximal a izquierda.
3. El conjunto de los elementos no inversibles de A es un ideal bilátero.
4. Para todo $a \in A$, a o $1 - a$ es inversible.
5. La k -álgebra $\frac{A}{\text{rad } A}$ es un cuerpo

Corolario 3.28. Si A es una k álgebra local de dimensión finita entonces $\frac{A}{\text{rad } A}$ es isomorfo al cuerpo k .

Teorema 3.29. Sea A una k -álgebra y M un A módulo a derecha de dimensión finita. Entonces son equivalentes:

1. M es indescomponible.
2. Cada endomorfismo $f \in \text{End } M$ tiene la forma $f = \lambda \text{Id}_M + g$ con $g \in \text{End } M$ nilpotente y $\lambda \in k$
3. $\text{End } M$ es local.

Lema 3.30. Sea A una k álgebra de dimensión finita, $B = \frac{A}{I}$ con I un ideal nilpotente y $\pi : A \rightarrow B$ la proyección canónica. Entonces:

1. Para todo conjunto de idempotentes ortogonales dos a dos f_1, \dots, f_n en B , existe elementos ortogonales idempotentes e_1, \dots, e_n tal que $\pi(e_i) = f_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.
2. Sea e idempotente en A tal que $\pi(e) = f_1 + \dots + f_n$ con f_i ortogonales idempotentes en B . Entonces existen ortogonales idempotentes $e_i \in A$ tal que $e = e_1 + \dots + e_n$ y $\pi(e_i) = f_i$.

Proposición 3.31. Sea A una k álgebra de dimensión finita. y $B := \frac{A}{\text{Rad } A}$ Entonces vale:

1. Todo ideal I no nulo de B es una suma directa de ideales a derecha, simples como B módulos a derecha, y de la forma $\bar{e}B$ con e primitivo idempotente. En particular, el B módulo a derecha B es semisimple.
2. Sea M un B módulo a derecha no nulo. Entonces $M \cong e_{i_1}B \oplus \dots \oplus e_{i_n}B$ con e_{i_j} idempotentes primitivos.

Proposición 3.32. A como antes, $B = \frac{A}{\text{Rad } A}$, $e \neq 0$ idempotente y $\pi : A \rightarrow \text{Rad } A$. Entonces son equivalentes:

1. eA es indescomponible.
2. $\text{Rad}(eA) = e\text{Rad } A$ es el único submódulo maximal de eA .
3. $\bar{e}B$ es simple como B módulo a derecha.

3.2 Equivalencia con $\text{Mod}_{\frac{kQ}{I}}$

Notar que en muchas de las demostraciones que hicimos o que dejamos de ejercicio, casi no se usa que M es una representación de un quiver y que en muchas construcciones ya hechas sirven las mismas definiciones que se usan para módulos. Esto no es casualidad ya que efectivamente la categoría de quivers es *equivalente* (es decir, existen dos funtores F y G tal que la composición en ambas direcciones es naturalmente isomorfa la identidad) a una muy particular de módulos finitamente generados. Empezamos por definir una categoría central y un par de subcategorías importantes:

Definición 3.33. Dada una k álgebra A , mod_A es la categoría de módulos a derecha sobre A finitamente generados. ${}_A\text{mod}$ es la categoría de módulos a izquierda sobre A finitamente generados.

- Proy_A es la subcategoría de módulos proyectivos e Iny_A la de inyectivos. Análogamente se definen a izquierda.
- $\text{mod}_P A$ es la subcategoría de módulos sin sumandos directos proyectivos (no nulos) y $\text{mod}_I A$ es lo mismo pero sin sumandos directos inyectivos (no nulos).

Teorema 3.34. Sea Q un carcaj finito y conexo y $A = \frac{kQ}{I}$ con I un ideal admisible. Entonces hay una equivalencia entre la categoría Mod_A de módulos finitamente generados y la categoría $\text{Rep}_{(Q,I)}$ de representaciones finitas acotadas del carcaj Q .

Demostración. Aclaremos primero quién es el I en $\text{Rep}_{(Q,I)}$. Recordar que si I es un ideal de A finitamente generado, por la observación 3.7 existe una cantidad finita de relaciones ρ_1, \dots, ρ_n que también generan el ideal. Entonces el conjunto de relaciones del quiver será $I = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$.

Voy a definir dos funtores covariantes F y G

$$\begin{aligned} F : \text{Mod}_A &\longrightarrow \text{Rep}_{(Q,I)} \\ G : \text{Rep}_{(Q,I)} &\longrightarrow \text{Mod}_A \end{aligned}$$

Definamos F . Sea M un A módulo a derecha finitamente generado. Defino $F(M) := (M_i, \{\varphi_\alpha\})$ con $M_i := M \cdot e_i$ (es un k -e.v. pues M lo es) y si $\alpha : i \rightarrow j$ es una flecha, defino $\varphi_\alpha :$

$M_i \rightarrow M_j$ $\varphi_\alpha(m.e_i) = (m.e_i.\alpha).e_j = (m.\alpha).e_j$. Es muy fácil chequear que φ es lineal. Ahora quiero definir F sobre los morfismos: sea $f : M \rightarrow M'$ un morfismo de A módulos a derecha. Defino $F(f) : F(M) \rightarrow F(M')$ como $F(f)_i : M_i \rightarrow M'_i$, $F(f)_i(m.e_i) := f(m.e_i) \cdot e_i$ donde 1 vale pues f es A lineal. Es fácil ver que es $F(f)$ es un morfismo de representaciones.

Veamos que $F(M)$ es efectivamente una representación de (Q, I) : Sea $\rho = \sum_c \lambda_c c : i \rightarrow j \in I$ una de las relaciones que genera I , entonces $\varphi_\rho(m.e_i) = \sum_c \lambda_c \varphi_c(m.e_i) = \sum_c \lambda_c m.c.e_j = m.(\sum_c \lambda_c c) = m.\rho = 0$ pues M es un A módulo y ρ es cero en A . Luego $F(M) \in \text{Rep}_{(Q,i)}$ y chequear que F es un funtor.

Definamos G : Sea ahora una representación (M_i, φ_α) de (Q, I) y quiero definir $G((M_i, \varphi_\alpha))$ Tomo $M = \bigoplus_{i \in Q_0} M_i$ como espacio vectorial y defino una estructura de kQ módulo con:

$$m.a = m.(\sum \lambda_c c) := \sum \lambda_c \varphi_c(m)$$

donde $\varphi_c(m)$ significa lo siguiente: Si $m = m_1 \oplus \dots \oplus m_k$ con $m_j \in M_{i_j}$ defino $\varphi_c(m)g = \varphi_c(m_1) + \dots + \varphi_c(m_k)$ donde $\varphi_c(x) = 0$ si $x \notin M_{s(c)}$. Chequear que la operación así definida efectivamente genera una estructura de kQ módulo. Veamos que pasa al cociente: Sea $\rho \in I$ una relación, $\rho = \sum \lambda_c c$ donde todos los c van de i en j . Entonces $m.\rho = \dots$

$$\sum \lambda_c \varphi_c(m) = \sum \lambda_c (\varphi_c(m_1) + \dots + \varphi_c(m_k)) = \sum \lambda_c \varphi_c(m_1) + \dots + \sum \lambda_c \varphi_c(m_k)$$

Donde o bien $\varphi_c(m_t) = 0 \forall c$ o bien $m_t \in M_{s(c)} \forall c$ (pues todos los c son paralelos), en ese último caso $\sum \lambda_c \varphi_c(m_t) = \varphi_\rho(m_t) = 0$ pues es una representación de (Q, I) . Luego $m.\rho = 0$ y entonces M es un A módulo bien definido. Finalmente dado $f : (M_i, \varphi_\alpha) \rightarrow (N_i, \psi_\alpha)$ defino

$$G(f) : M \rightarrow N \\ G(f)|_{M_i} = f_i$$

Chequear que es un morfismo de A módulos y que G así definida queda funtor.

Para terminar, demostremos que $F \circ G \approx Id$ y $G \circ F \approx Id$. Empecemos con $F \circ G$. Verificar que los espacios vectoriales de $F(G(M))$ en cada coordenada son iguales a los de M y que las transformaciones lineales son iguales también.

Para $G(F(M))$, verificar que el morfismo $\Phi : M \rightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} M.e_i$ que hace $\Phi(m) = \{m.e_i\}_{i \in Q_0}$ es un isomorfismo de módulos natural. □

Observacion 3.35. Tanto F como G preservan inclusiones: si N es un submódulo de M , entonces $F(N) \leq F(M)$ y si N es una subrepresentación de M , $G(N) \leq G(M)$. Por lo tanto, manda subrepresentaciones/submódulos maximales en submódulos/subrepresentaciones maximales. Y además son funtores aditivos.

Ejemplo 3.36. Sea (Q, R) un quiver con relaciones. Voy a definir **el radical de una representación** M como $\text{Rad } M := F(\text{Rad } G(M))$. Usando la observación anterior es fácil ver que así definido, cumple la definición usual de radical como la intersección de todas las subrepresentaciones maximales. Veamos quién es:

$$(\text{Rad } M)_k = (\text{Rad } G(M)) \cdot e_k = (\text{Rad } \bigoplus_{i \in Q_0} M_i) \cdot e_k = (\bigoplus_{i \in Q_0} M_i \cdot \text{Rad } A) \cdot e_k = \bigoplus_{i \in Q_0} M_i \cdot \langle c : i \rightarrow k, c \neq e_k \rangle = \sum_{\substack{c: i \rightarrow k \\ c \neq e_k}} \varphi_c(M_{s(c)}) = \sum_{\alpha: i \rightarrow k} \varphi_\alpha(M_{s(\alpha)})$$

Y por definición de F y G , las flechas de la subrepresentación son las flechas de M restringidas. Luego la definición coincide para el caso de Q con relaciones.

La equivalencia nos permite identificar libremente a las representaciones de un quiver con los módulos sobre su álgebra de caminos. Cada extremo de la identificación tiene sus ventajas, así, a veces es más fácil fabricar ejemplos con representaciones (que son más visuales) y a la hora de hacer cuentas en general tal vez conviene trabajar con módulos y de paso usar toda la maquinaria conocida para ellos.

Inmediatamente podemos definir los proyectivos e inyectivos indescomponibles de $Rep_{(Q,R)}$

Definición 3.37. Sea (Q, R) con Q finito. Se define el **proyectivo indescomponible** $P(i)$ como $P(i) = F(\bar{e}_i \cdot A)$, es decir $P(i)_j = \bar{e}_i A \bar{e}_j = \langle \{\bar{c} / c : i \rightarrow j\} \rangle$ y como flechas $\varphi_\alpha(\bar{c}) = \bar{c}\alpha$. Análogamente defino el **inyectivo indescomponible** $I(i)$ como $I(i) = F(A\bar{e}_i)$ donde $A\bar{e}_i$ es un A módulo a derecha con la multiplicación definida contra un camino como $x e_i \cdot c := (\frac{1}{c} \cdot x) e_i$ y extendida por linealidad. Recordar que si d es un camino, $d = (d_1 d_2 \cdots d_m) \frac{1}{\alpha} \cdot d = (d_2 \cdots d_m)$ si $d_1 = \alpha$ y 0 sino. Y para un $x = \sum \lambda_d d$ cualquiera en A , defino $\frac{1}{\alpha} \cdot x := \sum \lambda_d (\frac{1}{\alpha} \cdot d)$. Extendemos la definición a un camino como $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_n} \cdots \frac{1}{c_1}$. Efectivamente es un A módulo a derecha pues $((x e_i) \cdot c) \cdot d = (\frac{1}{c} x e_i) \cdot d = \frac{1}{d} \frac{1}{c} x e_i = \frac{1}{cd} x e_i = (x e_i) \cdot cd$. Entonces $I(i)_j = \langle \{\bar{c} / c : j \rightarrow i\} \rangle$ y como flechas $\psi_\alpha(\bar{c}) = (c_2 \cdots c_m)$ si $c_1 = \alpha$ y 0 sino. Es decir, la misma definición que para un quiver sin relaciones.

Por definición, las representaciones así definidas son proyectivas (resp. inyectivas) e indescomponibles, pues $G(P(i))$ y $G(I(i))$ lo son y las equivalencias son aditivas.

Corolario 3.38. Toda representación proyectiva/inyectiva de (Q,R) se escribe como suma directa de representaciones indescomponibles $P(i)/I(i)$

Demostración. Por Krull Schmidt, la equivalencia entre $Rep_{(Q,R)}$ y Mod_A y el corolario 3.13 \square

En general para un quiver con relaciones nos olvidaremos de escribir las barras de los elementos del álgebra $\frac{kQ}{I}$ y simplemente recordaremos que en el álgebra tenemos relaciones dadas por ciertos caminos que son cero.

Ejemplo 3.39.

- Sea $Q = \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & \beta \nearrow & & \searrow \gamma & \\ 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 & \xleftarrow{\delta} & 4 \end{array}$ con $\delta\beta\gamma = 0$. Entonces $P(1) =$

$$\begin{array}{ccccc} & & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \langle e_1 \rangle_k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & \langle \alpha, \alpha\beta\gamma\delta \rangle_k & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & \langle \alpha\beta\gamma \rangle_k \end{array}$$

Y su radical, tomando bases, es

$$\begin{array}{ccccc} & & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 & \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & k \end{array}$$

- Sea $Q' = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\gamma} 4$ con $\alpha\beta = 0$. Entonces

$$\begin{array}{cccc} P(1) = \frac{1}{2} & P(2) = \frac{2}{3} & P(3) = 3 & P(4) = \frac{4}{3} \\ \text{Rad } P(1) = 2 & \text{Rad } P(2) = 3 & \text{Rad } P(3) = 0 & \text{Rad } P(4) = 3 \end{array}$$

Notar que este ejemplo en particular nos demuestra que la categoría $Rep_{(Q,I)}$ no es hereditaria en general, incluso en el caso que Q tiene relaciones pero no ciclos dirigidos. Más aún, que la resolución estándar de 2.13 no necesariamente es exacta, pues para $S(1)$, la resolución estándar me daría $0 \xrightarrow{u} P(2)^1 \xrightarrow{v} P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$ que claramente no es exacta pues u no es inyectiva.

3.3 Extensiones, Ext y dimensión homológica

Al igual que la situación en módulos, podemos definir el espacio de extensiones de una representación M por N , y demostrar que es isomorfo al primer grupo de cohomología de un complejo. Lo interesante es la relación del Ext con la forma del quiver.

Definición 3.40. Sea $M \in Rep_{(Q,I)}$ y una resolución proyectiva $\cdots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$

Dado $N \in Rep_Q$ aplicamos el funtor $\text{Hom}(-, N)$ en esa secuencia:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{f_0^*} \text{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{f_1^*} \text{Hom}(P_1, N) \longrightarrow \cdots$$

que es exacta en $\text{Hom}(M, N)$ y $\text{Hom}(P_0, N)$. Defino $Ext^1(M, N) := \frac{\text{Ker}(f_2^*)}{\text{Im}(f_1^*)}$. En general, defino $Ext^i(M, N) := \frac{\text{Ker}(f_{i+1}^*)}{\text{Im}(f_i^*)}$

Notar que si Q es un quiver sin relaciones, $Ext^1(M, N)$ es simplemente el cokernel de f_1^* . Y que $Ext^0(M, N) = 0$ pues la sucesión es exacta en $\text{Hom}(P_0, N)$.

Proposición 3.41. $Ext^1(M, N)$ es independiente de la resolución proyectiva.

Proposición 3.42. $Ext^1(M, N)$ también se puede calcular con resoluciones inyectivas, pero de N . En efecto, si $0 \rightarrow N \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} \cdots$ es una resolución inyectiva, y aplicamos el funtor $\text{Hom}(M, -)$ a esta secuencia obtenemos un complejo de cadenas

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{(f_0)_*} \text{Hom}(M, I_0) \xrightarrow{(f_1)_*} \text{Hom}(M, I_1) \xrightarrow{(f_2)_*} \cdots$$

Si definimos $\overline{Ext}^1(M, N) := \frac{\text{Ker}((f_2)_*)}{\text{Im}((f_1)_*)}$, entonces \overline{Ext}^1 es un funtor y es naturalmente isomorfo a Ext^1 .

Definición 3.43. Una **extensión** ε de M por N es una sucesión exacta corta $0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$. Dos extensiones son equivalentes si existe $h : E \rightarrow E'$ un iso tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \cong \downarrow h & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ejemplo 3.44. $Q = 1 \rightrightarrows 2$ y $E = k \begin{smallmatrix} 0 \\ \rightrightarrows \\ 1 \end{smallmatrix} k$, $E' = k \begin{smallmatrix} 1 \\ \rightrightarrows \\ 0 \end{smallmatrix} k$, $M = S(1)$, $N = S(2)$. Entonces $\varepsilon : 0 \rightarrow S(2) \rightarrow E \rightarrow S(1) \rightarrow 0$ y $\varepsilon' : 0 \rightarrow S(2) \rightarrow E' \rightarrow S(1) \rightarrow 0$ son dos extensiones de M por N no equivalentes pues $E \not\cong E'$.

Definición 3.45. • Dadas dos extensiones $\varepsilon : 0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ y $\varepsilon' : 0 \rightarrow N \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow 0$, definimos $\varepsilon + \varepsilon'$ como

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde $F = \frac{E''}{\langle \{(f(n), -f'(n)) \in E \oplus E'\} \rangle}$ con E'' el pullback de $E \rightarrow M$ y $E' \rightarrow M$.

• Defino la **extensión trivial** y la noto $\mathbf{0}$ como

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\iota_N} N \oplus M \xrightarrow{P_M} M \rightarrow 0$$

Teorema 3.46. *El conjunto $\mathcal{E}(M, N) := \frac{\{\text{extensiones}\}}{\text{equivalentes}}$ con la suma y el $\mathbf{0}$ definidos así, es un grupo abeliano.*

Teorema 3.47. *Existe un iso de grupos abelianos $\mathcal{E}(M, N) \cong Ext^1(M, N)$*

Demostración. La demostración es estandar pero tediosa y larga y escapa al objetivo de la tesis. El lector interesado la puede encontrar en [SY12]. \square

Veamos más en detalle la relación entre el grupo Ext^1 y la forma del quiver Q . Empecemos por demostrar una fórmula que relaciona las flechas y vértices con este grupo.

Si Q es un quiver sin relaciones, recordemos que tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \xrightarrow{u} \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \xrightarrow{v} M \rightarrow 0$$

Tomando $\text{Hom}(-, N)$ en la sucesión obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) &\longrightarrow \text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i}, N\right) \longrightarrow \text{Hom}\left(\bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}}, N\right) \\ &\longrightarrow Ext^1(M, N) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Separando la suma adentro de los Hom y usando el teorema 2.9:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) \longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} N_i^{d_i} \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} N_{t(\alpha)}^{d_{s(\alpha)}} \longrightarrow Ext^1(M, N) \longrightarrow 0$$

Usando que $N_\bullet \cong \text{Hom}(k, N_\bullet)$ como k espacios vectoriales y entonces $N_\bullet^d \cong \text{Hom}(k^d, N_\bullet)$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) &\longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(k^{d_i}, N_i) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(k^{d_{s(\alpha)}}, N_{t(\alpha)}) \\ &\longrightarrow Ext^1(M, N) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Finalmente, recordando que $M_t = k^{d_t}$ tenemos la siguiente sucesión exacta corta de espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(M, N) &\longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}(M_i, N_i) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(M_{s(\alpha)}, N_{t(\alpha)}) \\ &\longrightarrow Ext^1(M, N) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Si llamo $m_i = \dim M_i$ y $n_i = \dim N_i$, tomando dimensión en la sucesión y reordenando tengo:

Proposición 3.48. Si $m_i = \dim M_i$ y $n_i = \dim N_i$ tengo la igualdad

$$\dim \text{Hom}(M, N) - \dim \text{Ext}^1(M, N) = \sum_{i \in Q_0} m_i n_i - \sum_{\alpha \in Q_1} m_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)}$$

Observación 3.49. Notar que en la demostración del teorema 2.14, si Q tiene un conjunto de relaciones admisible, la única parte de la demostración que no se puede repetir es que u sea inyectiva, pues la parte de que $\text{Ker}(v) \subseteq \text{Im}(u)$ sigue valiendo ya que la longitud de una combinación lineal de caminos sigue siendo finita (pues todos los caminos de una longitud suficientemente grande son cero). El único cambio necesario es definir la longitud de un camino \bar{c} como la del mayor camino que pertenezca a su clase de equivalencia. Como la cantidad de caminos es finita, su clase de equivalencia tiene una longitud máxima. Entonces

$$\bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_{s(\alpha)}} \xrightarrow{u} \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \xrightarrow{v} M \rightarrow 0$$

es una presentación proyectiva de M .

Corolario 3.50. Si $i \neq j$, $\#\{\alpha : i \rightarrow j : \alpha \in Q_1\} = \dim \text{Ext}^1(S(i), S(j))$

Demostración. Uso la proposición anterior con $M = S(i)$ y $N = S(j)$ □

Si Q tiene relaciones pero no ciclos dirigidos algo ligeramente más débil es cierto:

Proposición 3.51. Sea (Q, I) un quiver con relaciones pero sin ciclos dirigidos (en particular $S(t)_r = k^{\delta_{t,r}}$) e $i \neq j$. Entonces $\#\{\alpha : i \rightarrow j : \alpha \in Q_1\} = 0 \iff \dim \text{Ext}^1(S(i), S(j)) = 0$

Demostración. \implies) Supongo que $\#\{\alpha : i \rightarrow j : \alpha \in Q_1\} = 0$. Completando la presentación proyectiva de la observación 3.50 para $M = S(i)$ y aplicando $\text{Hom}(-, S(j))$ obtengo, como antes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(S(i), S(j)) &\longrightarrow \bigoplus_{k \in Q_0} \text{Hom}(S(i)_k, S(j)_k) \\ &\longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}(S(i)_{s(\alpha)}, S(j)_{t(\alpha)}) \xrightarrow{f_2^*} \dots \end{aligned}$$

Como no existe ninguna flecha de i en j , $\text{Hom}(S(i)_{s(\alpha)}, S(j)_{t(\alpha)}) = 0$ para toda α y entonces $\text{Ker}(f_2^*) = 0$ y luego $\text{Ext}^1(S(i), S(j)) = 0$.

\impliedby) Supongo que existe $\beta : i \rightarrow j$. Voy a demostrar que existe una extensión de $S(i)$ por $S(j)$ que no se parte. Defino M una representación de la siguiente forma:

$M_i = k$, $M_j = k$, $M_k = 0$ si $k \notin \{i, j\}$ y las transformaciones lineales:

$$m_\alpha = \begin{cases} Id, & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Cualesquiera que sea el conjunto de relaciones de Q , M es una representación, y es fácil ver que como Q no tiene ciclos dirigidos $\iota : S(j) \hookrightarrow M$ y $P : M \rightarrow S(i)$ son morfismos de representaciones. Luego tengo una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow S(j) \hookrightarrow M \rightarrow S(i) \rightarrow 0$$

que no se parte pues $M \not\cong S(i) \oplus S(j)$ □

Por otra parte, con el Ext^2 puedo identificar relaciones en el quiver:

Teorema 3.52. Sea Q un quiver con relaciones y sin ciclos dirigidos. Entonces $\text{Ext}^2(S(i), S(j)) = 0 \iff$ existe una relación de i en j .

Dimensiones homológicas

Definición 3.53. Dado M un $A \in \text{Mod}_A$, la **dimensión proyectiva**, $pd M$, es el menor número natural (o cero) tal que existe una resolución proyectiva de la forma

$$0 \rightarrow P_d \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Si no existe tal entero, decimos que la dimensión es infinita.

Definición 3.54. La **dimensión global** de una álgebra A , $gldim A$, es el supremo de todas las dimensiones proyectivas:

$$gldim A := \text{Sup}\{pd M : M \in \text{Mod}_A\}$$

Análogamente se define la **dimensión inyectiva** de M , $id M$, como el d más chico tal que existe una resolución inyectiva de la forma $0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow \cdots \rightarrow I_d \rightarrow 0$. Si tal d no existe, la dimensión inyectiva es infinita. Además $gldim A_{iny} := \{id M : M \in \text{Mod}_A\} = gldim A$

Observación 3.55. • M es proyectivo $\iff pd M = 0$

• A es hereditaria $\iff gldim A \leq 1$

Ejemplo 3.56. $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5$ con $\alpha\beta = \gamma\delta = 0$. Entonces $pd S(1) = 2$: Es a lo sumo 2 pues $0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$ es una ppm de $S(1)$. Y es igual a 2: Si $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow S(1) \rightarrow 0$ es una resolución proyectiva, por el lema 2.31 tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & S(1) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel & & \\ P(3) \oplus \text{Ker}(v) & \longrightarrow & P(2) \oplus V_1 & \longrightarrow & P(1) \oplus V_0 & \longrightarrow & S(1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y por el lema de los cinco llego a un absurdo ($P(3) \neq 0$).

La definición de dimensión global puede parecer intratable. Pero un teorema nos dice que para calcular la dimensión global alcanza con los módulos simples.

Teorema 3.57. Sea A una k álgebra asociativa y unitaria de dimensión finita. Entonces

$$gldim A = \text{Sup} \{pd S : S \text{ es simple}\}$$

Demostración. Ver [MCR87]. □

Ejemplo 3.58. $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5$ con $\alpha\beta\gamma = \beta\gamma\delta = 0$. Calculemos la dimensión global de $A = \frac{kQ}{I}$. Por el teorema, alcanza con calcular las dimensiones proyectivas de sus cinco simples.

$$P(1) = \frac{1}{3} \quad P(2) = \frac{2}{4} \quad P(3) = \frac{3}{5} \quad P(4) = \frac{4}{5} \quad P(5) = 5$$

Luego una resolución proyectiva minimal de $S(1)$ es

$$0 \rightarrow P(5) \rightarrow P(4) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0 \tag{3.2}$$

Notar que ahora el lema 2.31 no me sirve así como está para probar que no existe una resolución de longitud 2. Podría intentar extenderlo para resoluciones minimales de cualquier longitud,

lo cual está bien. Pero prefiero utilizar una técnica diferente que es empleando el *Ext*: Si logro demostrar que existe un módulo tal que $Ext^3(S(1), M) \neq 0$, entonces no puede haber ninguna resolución proyectiva de longitud dos, ya que el *Ext* es independiente de la resolución, y si tuviera una de longitud dos, el Ext^3 debería ser cero con esa resolución y por lo tanto con todas. Con ensayo y error probando primero con los módulos simples, vemos que $Ext^3(S(1), S(5))$ funciona: Si tomo $\text{Hom}(-, S(5))$ en la ecuación 3.2, tenemos

$$0 \rightarrow \text{Hom}(S(1), S(5)) \xrightarrow{=0} \text{Hom}\left(\frac{1}{2}, S(5)\right) \xrightarrow{=0} \text{Hom}\left(\frac{2}{3}, S(5)\right) \xrightarrow{=0} \text{Hom}\left(\frac{4}{5}, S(5)\right) \\ \xrightarrow{\iota^*} \text{Hom}(S(5), S(5)) \rightarrow 0$$

Luego $Ext^3(S(1), S(5)) = \frac{\text{Hom}(S(5), S(5))}{\text{Im}(\iota^*)}$. Pero es fácil chequear que el único morfismo de representaciones entre $\frac{4}{5}$ y $S(5)$ es el nulo. Entonces $Ext^3(S(1), S(5)) = \text{Hom}(S(5), S(5)) \cong k \neq 0$. Luego $pd S(1) = 3$. Por lo tanto $gldim A \geq 3$. Chequear que para todos los otros simples, $pd S(i) \leq 3$ y por lo tanto, $gldim A = 3$

Parte 4

Traslación de Auslander-Reiten

En las siguientes secciones vamos a definir la asignación τ de traslación de Auslander-Reiten. Como dijimos, este funtor es central para el estudio de las representaciones indescomponibles de un carcaj, ya que en muchos casos, nos permitirá calcular todas sus representaciones indescomponibles e incluso calcular los espacios de morfismos entre ellas. Más adelante veremos que la asignación $\tau : \text{Rep}_Q \rightarrow \text{Rep}_Q$ en realidad es un funtor módulo representaciones proyectivas, así que deberemos definir una categoría cociente sobre las cuales el funtor τ está bien definido.

Para empezar a definir la traslación $A-R$ estudiemos primero dos funtores, el funtor dualidad D y el funtor transpuesta Tr . Estos dos objetos son algebraicos pero con la equivalencia también podemos calcularlos en la categoría de representaciones. Su utilidad es que nos permite definir la traslación $A-R$. En la sección final del capítulo, introducimos la categoría estable, que es el domino natural del funtor Tr y el teorema principal de la sección, 4.37, demuestra que al igual que D , Tr es una equivalencia de categorías y entonces la traslación, en un domino adecuado, también va a serlo.

En el capítulo se dan demostraciones propias de la parte 10 del teorema de dualidad 4.2, una versión simplificada del lema 4.26 y un desarrollo más completo del teorema 4.37.

4.1 Dualidad

Definición 4.1. Sea A una k -álgebra de dimensión finita (por ejemplo, $\frac{kQ}{I}$). Se define el funtor (contravariante) **dualidad** $D : \text{Mod}_A \rightarrow {}_A\text{Mod}$ como $D(M) = \text{Hom}_k(D, k) = M^*$ sobre los objetos y si $f : M \rightarrow M'$ es una flecha, como $D(f) = f^* : (M')^* \rightarrow M^*$

Notar que $D(M)$ es un A módulo a izquierda vía $(a \cdot f)(m) = f(ma) : (a \cdot (b \cdot f))(m) = (b \cdot f)(ma) = f(mab) = (ab \cdot f)(m)$. Además $(a \cdot f)$ así definida es un morfismo k lineal.

Así D es un funtor de A módulos a derecha en A módulos a izquierda. Además tiene un inverso $D : {}_A\text{mod} \rightarrow \text{mod}_A$: si M es un A módulo a izquierda, $D(M)$ lo es a derecha con la definición $(f \cdot a)(m) = f(am)$. Luego $((f \cdot a) \cdot b)(m) = (f \cdot a)(bm) = f(abm) = (f \cdot (ab))(m)$

Las propiedades más importantes del funtor dualidad están listadas en esta proposición:

Teorema 4.2. *Sea $D : \text{Mod}_A \rightarrow {}_A\text{Mod}$ el funtor dualidad. Entonces:*

1. $D(X \oplus Y) = D(X) \oplus D(Y)$
2. *Es una dualidad de categorías abelianas con $D \circ D = \text{Id}_{\text{Mod}_A}$*
3. *Es un funtor exacto (preserva sucesiones exactas cortas).*

4. Manda proyectivos en inyectivos y viceversa.
5. Indescomponibles en indescomponibles.
6. Simples en simples.
7. Manda cubrimientos proyectivos en cápsulas inyectivas y viceversa.
8. Induce una equivalencia de categorías entre Proy_A y ${}_A\text{Iny}$
9. Induce una equivalencia de categorías entre $\text{Mod}_P A$ y $A \text{Mod}_I$
10. $\text{Soc } DM \cong D \text{Top } M$ y $\text{Top } DM \cong D \text{Soc } M$

Demostración. Todas las demostraciones son estandar usando 1 y 2, demostremos por ejemplo 6 y 10: D manda simples en simples pues si $N \leq D(M)$ y M es simple, existe un morfismo sobreyectivo $M \xrightarrow{\xi} D(N)$. Luego $\text{Ker}(\xi) = M$ o $\text{Ker}(\xi) = 0$ pues M es simple. Si $\xi = 0$ entonces $D(N) = 0 \implies N = 0$. Si ξ es un iso entonces $N \cong D(M)$ y por dimensión, $N = D(M)$.

10) $D\text{Top}(M) \subseteq \text{Soc}(DM)$: Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \text{Rad}(M) \rightarrow M \rightarrow \text{Top}(M) \rightarrow 0$$

Aplicando el functor dualidad obtenemos

$$0 \rightarrow D\text{Top}(M) \rightarrow DM \rightarrow D\text{Rad}(M) \rightarrow 0$$

Como $D\text{Top}(M)$ es semisimple (porque $\text{Top}(M)$ lo es), $D\text{Top}(M) \subseteq \text{Soc}(DM)$ por definición de $\text{Soc}(DM)$ como la suma de todos los simples.

$\text{Soc}(DM) = D\text{Top}(M)$: Como M es un espacio vectorial de dimensión finita, alcanza con mostrar que $\dim_k(\text{Soc}(DM)) \leq \dim_k(D\text{Top}M)$. Por la dualidad, $\text{Soc}(DM) = DL$ con L un módulo a derecha semisimple. Entonces $DL \leq DM$ y aplicando la dualidad a ambos lados tenemos que existe un morfismo sobreyectivo $\xi : M \twoheadrightarrow L$. Eso significa que $M_{\text{Ker}(\xi)} \simeq L$ es semisimple. Como $\text{Rad } M$ es el submódulo L más pequeño tal que M/L es semisimple, eso implica que $\text{Rad } M \subseteq \text{Ker}(\xi)$ y por lo tanto hay un morfismo sobreyectivo $\text{Top}M \twoheadrightarrow L$ y luego hay una flecha inyectiva $DL = \text{Soc}(DM) \hookrightarrow D\text{Top}M$ \square

El functor D me permite fácilmente demostrar teoremas sobre inyectivos usando los teoremas ya demostrados para proyectivos:

Teorema 4.3. (Clasificación de inyectivos) Sea I un A módulo a derecha inyectivo e indescomponible. Entonces $I \cong D(A.e_i)$ con $A.e_i \in {}_A\text{Mod}$ módulo a izquierda proyectivo e indescomponible.

Demostración. $D(I)$ es un módulo a izquierda proyectivo e indescomponible. Luego $D(I) \cong A.e_i$. Aplicando la dualidad a ambos lados $I \cong D(A.e_i)$ \square

Proposición 4.4. Dada una representación M de un Q sin relaciones, existe una resolución inyectiva

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} I_0 \xrightarrow{g} I_1 \rightarrow 0$$

donde I_0 y I_1 son inyectivos

Demostración. Aplico el teorema 2.13 a DM : existe una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow DM \rightarrow 0$$

con P_1 y P_0 proyectivos. Aplicando D a la sucesión exacta obtengo la secuencia deseada. \square

Proposición 4.5. *Sea Q un quiver sin ciclos dirigidos y $f : I \rightarrow M$ un morfismo no nulo con M indescomponible e I inyectivo. Entonces M es inyectivo y f es sobreyectiva.*

Demostración. Utilizo el corolario 2.18 con DM y vuelvo a aplicar el functor dualidad para obtener el teorema. \square

Observación 4.6. Notar que el inyectivo indescomponible con esta definición ($D(A.e_i)$) y el inyectivo indescomponible de la definición 3.31 ($A.e_i$ con la multiplicación $xe_i \cdot c := (\frac{1}{c}x)e_i$) coinciden. Defino un morfismo Ω como: si c es un camino que termina en i (i.e., $c \in A.e_i$)

$$\Omega : A.e_i \rightarrow D(A.e_i), \quad \Omega(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } c = 0 \\ f_c & \text{si } c \neq 0 \end{cases}$$

con f_c definido sobre la base de caminos como, si $x : k \rightarrow i$, $f_c(x) = \delta_{c,x}$.

Ω es un isomorfismo de A módulos a derecha. Primero, Ω es un morfismo: si $c = (d|*)$,

$$(\Omega(c) \cdot d)(x) = \Omega(c)(dx) = \delta_{c,dx} \text{ y } \Omega(c \cdot d)(x) = \Omega(\overbrace{\frac{1}{d} \cdot c}^{\neq 0})(x) = \delta_{\frac{1}{d} \cdot c, x} = \delta_{c,dx}. \text{ Y si } c \neq (d|*),$$

$$\Omega(c) \cdot d = \delta_{c,dx} = 0 \text{ y } \Omega(c \cdot d) = \Omega(\overbrace{\frac{1}{d} \cdot c}^{=0}) = \Omega(0) = 0.$$

Luego $\Omega(c) \cdot d = \Omega(c \cdot d)$. Claramente es inyectiva y por dimensión sobre k es un iso.

Observación 4.7. Miremos a D en la categoría Rep_Q : D le asigna a una representación M de Q , un objeto de $Rep_{Q^{op}}$, donde Q^{op} es el quiver opuesto obtenido dando vuelta todas las flechas en Q : $Q^{op} = (Q_0, Q_1^{op}, s, t)$ es decir $t(\alpha^{op}) = s(\alpha)$ y $s(\alpha^{op}) = t(\alpha)$

$$D(M) = (M_i^*, \varphi_{\alpha^{op}}^*)$$

donde $\varphi_{\alpha^{op}}^* : D(M)_{t(\alpha)} \rightarrow D(M)_{s(\alpha)}$, si $f : M_{t(\alpha)} \rightarrow k$, $\varphi_{\alpha^{op}}^*(f) = f \circ \varphi_\alpha$

Luego D es una equivalencia $D : Rep_Q \rightarrow Rep_{Q^{op}}$ tal que $D(P_Q(i)) = I_{Q^{op}}(i)$ y $D(I_Q(i)) = P_{Q^{op}}(i)$

4.2 $Hom(-, A)$

Más interesante es el functor transposición. De nuevo A es una k álgebra de dimensión finita.

Definición 4.8. Se define $Hom_A(-, A)$ (también notado $(-)^t$) como el functor contravariante $(-)^t : Mod_A \rightarrow {}_A Mod$, $(M)^t = Hom_A(M, A)$ sobre los objetos y si $f : M \rightarrow M'$ es una flecha, $Tr(f) : (M')^t \rightarrow M^t$, $Tr(f)(\rho) = \rho \circ f$.

Notar que si $M \in Mod_A$, $M^t \in {}_A Mod$ es un módulo a izquierda con la multiplicación $(a \cdot f)(m) = af(m)$.

Análogamente se define $Hom(M, A) : {}_A Mod \rightarrow Mod_A$ con la estructura a derecha: $(f \cdot a)(m) = f(m) \cdot a$.

A diferencia de D no podemos esperar que $(-)^t$ sea una dualidad. Si A es un kQ con Q sin ciclos dirigidos, por el corolario 2.18 (que vale en Mod_A por la equivalencia), $(-)^t$ debe ser cero sobre los no proyectivos: si M es un indescomponible no proyectivo,

$$\text{Hom}_A(M, A) = \text{Hom}_A(M, e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA) = \bigoplus_i \text{Hom}_A(M, e_iA) = 0$$

Sin embargo, sí es una equivalencia entre las categorías de módulos proyectivos (y también entra las de inyectivos).

Teorema 4.9. *Sea A una k álgebra de dimensión finita y $\text{Hom}(-, A) : Mod_A \rightarrow {}_A Mod$. Entonces:*

1. $(X \oplus Y)^t = X^t \oplus Y^t$
2. Manda proyectivos indescomponibles en proyectivos indescomponibles, y por lo tanto manda proyectivos en proyectivos .
3. Es exacto a izquierda, es decir, si $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$ es exacta, $0 \rightarrow D^t \rightarrow C^t \rightarrow B^t$ es exacta.
4. Restringido a $Proy_A$ es una dualidad de categorías:

$$Proy_A \rightarrow_A Proj$$

con inversa dada por $\text{Hom}(-, A)$ con la estructura vista arriba.

Demostración. 2) Sea e_iA un proyectivo indescomponible (que sabemos por el teorema 3.14 son los únicos proyectivos indescomponibles). Veamos que $\text{Hom}(e_iA, A) \cong Ae_i$ como A módulos. En efecto, defino

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}_A(e_iA, A) &\longrightarrow Ae_i \\ \varphi &\longrightarrow \varphi(e_i).e_i \end{aligned}$$

Φ es A -lineal: $\Phi(a \cdot \varphi) = (a \cdot \varphi)(e_i).e_i = (a.\varphi(e_i)).e_i = a(\varphi(e_i).e_i) = a.\Phi(\varphi)$

Es inyectiva: Si $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi) \iff \varphi(e_i).e_i = \psi(e_i).e_i$. Luego $\varphi(e_i)a = \varphi(e_i).1_A.a = \varphi(e_i).(e_i + \sum_{j \neq i} e_j).a = (\varphi(e_i).e_i + \sum_{j \neq i} \varphi(e_i)e_j)a = (\psi(e_i).e_i + \sum_{j \neq i} \varphi(e_i.e_j))a = (\psi(e_i^2) + 0).a = \psi(e_i).a = \psi(e_i.a)$. Luego $\varphi = \psi$.

Y es sobreyectiva: Dado ae_i , defino $\varphi : e_iA \rightarrow A$ como $\varphi(e_ix) = a.e_i.x$. Está bien definida (si $e_ix = e_ix' \implies a.e_i.x = a.e_i.x'$) y es un morfismo de A módulos a derecha. Además $\Phi(\varphi) = \varphi(e_i).e_i = a.e_i.e_i = a.e_i$

1 y 3) Estandar.

4) Quiero ver que $\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(P, A), A) \cong P$. Como el funtor es aditivo basta verlo para un proyectivo indescomponible. Por 4), si $P = e_iA$, $\text{Hom}_A(e_iA, A) \cong Ae_i$. Luego $\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(e_iA, A), A) \cong \text{Hom}_A(Ae_i, A) \cong e_iA$ y el último isomorfismo es el simétrico de la demostración de 1).

□

Miremos ahora $\text{Hom}(-, A)$ en $Rep(Q, I)$. Si M es una representación de (Q, I) entonces $\text{Hom}(M, A_Q)$ tiene una estructura de representación de (Q^{op}, I) con $\text{Hom}(M, A_Q)_j := \text{Hom}(M, P(j))$

con la estructura usual de espacio vectorial y dada $\alpha : i \rightarrow j$ una flecha, la transformación lineal $\varphi_{\alpha^{op}} : \text{Hom}(M, P(j)) \rightarrow \text{Hom}(M, P(i))$ manda $h : M \rightarrow P(j)$ en el morfismo de representaciones $(\alpha.h)(x) := \alpha.h(x)$, donde si $h(x) = \sum \lambda c$, $\alpha.h(x) = \sum \lambda \alpha c$

Definido así el functor $\text{Hom}(-, A_Q) : \text{Rep}(Q, I) \rightarrow \text{Rep}(Q^{op}, I)$ sobre los objetos, sobre las flechas manda g en g^*

Por el teorema visto para módulos el Hom manda proyectivos indescomponibles en proyectivos indescomponibles: $\text{Hom}(P_{Q^{op}}(i), A_{Q^{op}}) \cong P_Q(i)$

4.3 Functor de Nakayama

Introducidos el functor dualidad y el $\text{Hom}(-, A)$, podemos introducir el functor de Nakayama, que nos permitirá calcular la traslación de Auslander-Reiten y construir el quiver $A - R$.

Definición 4.10. Se define el **functor de Nakayama** $\nu : \text{Mod}_A \rightarrow \text{Mod}_A$ como la composición $D \circ \text{Hom}(-, A)$

$$\text{Mod}_A \xrightarrow{\text{Hom}(-, A)} {}_A\text{Mod} \xrightarrow{D} \text{Mod}_A$$

ν

Notar que ν es un functor covariante que es exacto a derecha.

Teorema 4.11. $\nu = D \circ \text{Hom}(-, A) : \text{Mod}_A \rightarrow \text{Mod}_A$ es un functor covariante tal que

1. Es exacto a derecha y aditivo
2. Restringido a Proy_A define una equivalencia de categorías

$$\nu : \text{Proy}_A \rightarrow \text{Iny}_A$$

con $\nu(e_i A) = D(Ae_i)$ y si $c : i \rightarrow j$ es un camino en Q y $f_c : e_j A \rightarrow e_i A$ es el morfismo multiplicar por c ($f_c(e_i a) = e_j c.a$), tenemos $\nu f : D(Ae_j) \rightarrow D(Ae_i)$, que vía el isomorfismo de la observación 4.6, es lo mismo que $\nu f_c : Ae_j \rightarrow Ae_i$ con la acción sobre Ae_k que es $ae_k \cdot d = \frac{1}{d} a e_k$. Entonces ν sobre las flechas queda $\nu f(ae_j) = a \cdot (\frac{1}{c}) e_i$ (donde $a \cdot (\frac{1}{c})$ es una notación que quiere decir, si $a = (a'|c)$, $a \cdot (\frac{1}{c}) = a'$, y $a \cdot (\frac{1}{c}) = 0$ sino)

3. La inversa de la restricción es $\text{Hom}(DA, -)$

Demostración. 1 es inmediato de los teoremas 4.2 y 4.7.

2. $\nu(e_i A) = D \circ \text{Hom}_A(e_i A, A) \cong D(Ae_i)$. Veamos cuál es el morfismo νf_c :

Vía el isomorfismo $Ae_i \cong \text{Hom}(e_i A, A)$, $(f_c)^t : Ae_i \rightarrow Ae_j$ es: $(f_c)^t(a.e_i) = ace_j$. Luego al aplicar D tenemos

$$\begin{array}{ccccc} \delta_{x,h} & D(Ae_j) & \xrightarrow{Df_c^t} & D(Ae_i) & \delta_{h,x} \circ (f_c)^t \\ \uparrow & \Omega \uparrow \cong & & \cong \downarrow \Omega^{-1} & \downarrow \\ h \in & Ae_j & & Ae_i & \nu f_c(h) \end{array}$$

Sea $h \in Ae_j$. Quiero ver a dónde va a parar. Tengo dos posibilidades: $h = (h'|c)$ para algún h' , o no. Supongo primero $h = (h'|c)$. Veamos quién es $Df_c^t(\Omega(h))$: Sea $d \in Ae_i$, como $\delta_{h,x} \circ f_c^t(d) = \delta_{h,x}(dc) = \delta_{h,dc} = \delta_{h,(\frac{1}{c}),x}(d)$. Luego $\delta_{h,x} \circ f_c^t = \delta_{h,(\frac{1}{c}),x}$. Entonces $\nu f_c(h) = h,(\frac{1}{c})$. Finalmente si $h \neq (h'|c)$, $\delta_{h,x} \circ f_c^t(d) = \delta_{h,dc} = 0$. Luego $\Omega^{-1}(Df_c^t(\Omega(h))) = \Omega^{-1}(0) = 0$, que es igual a $h,(\frac{1}{c})$. Por lo tanto en todo caso $\nu f_c(h) = h,(\frac{1}{c})$.

3. $\nu^{-1} = \text{Hom}(-, A)^{-1} \circ D^{-1} = \text{Hom}(D(-), A) = \text{Hom}(D(-), DDA) \cong \text{Hom}(DA, -)$. \square

Ejemplo 4.12.

- Por el punto 2. del teorema anterior, $\nu P(i) = I(i)$ para todo $i \in Q_0$.
- Sabemos que si M es un indescomponible no proyectivo de Q , $\nu M = 0$ por el corolario 2.18. Pero si Q tiene relaciones, entonces no necesariamente es cierto eso. Calculemos el funtor de Nakayama en un caso así: Sea $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ con $\alpha\beta = 0$. Entonces $P(1) = \frac{1}{2}, P(2) = \frac{2}{3}$ y $P(3) = 3$. Tomemos $S(2)$, que no es proyectivo:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(S(2), A) &= \text{Hom}(S(2), P(1)) \rightarrow \text{Hom}(S(2), P(2)) \rightarrow \text{Hom}(S(2), P(3)) \\ &\cong k \rightarrow 0 \rightarrow 0 = S(1) \end{aligned}$$

Luego $\nu S(2) \cong S(1) = I(1)$. En particular, si $i : S(2) \hookrightarrow P(1)$ es la inclusión, $\nu i : I(1) \rightarrow \nu P(1) = I(1)$ es la identidad.

- $\nu^{-1}P(i) = I(i)$ y $\nu^{-1}M = 0$ para todo M indescomponible no inyectivo (por proposición 4.5 y el teorema 4.11 parte 3)

4.4 Traslación de Auslander-Reiten

Estamos listos para definir la traslación de Auslander-Reiten:

Definición 4.13. Sea

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

una presentación proyectiva minimal (ppm) de M . Aplicando el funtor de Nakayama a la secuencia obtenemos

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\nu f) \hookrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu f} \nu P_0 \xrightarrow{\nu g} \nu M \longrightarrow 0$$

Se define $\tau M := \text{Ker}(\nu f)$

Definición 4.14. Análogamente se define τ^{-1} : si

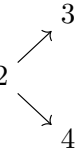
$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} I_0 \xrightarrow{g} I_1$$

es una presentación inyectiva minimal (pim) de M , aplicando el funtor inverso de Nakayama a la secuencia obtenemos

$$0 \longrightarrow \nu^{-1}M \xrightarrow{\nu^{-1}f} \nu^{-1}I_0 \xrightarrow{\nu^{-1}g} \nu^{-1}I_1 \twoheadrightarrow \text{Coker}(\nu^{-1}g) \longrightarrow 0$$

Entonces $\tau^{-1}M := \text{Coker}(\nu^{-1}g)$.

Ejemplo 4.15. • Si P es proyectivo entonces $\tau P = 0$, pues una ppm de P es $0 \longrightarrow P \xrightarrow{Id} P \longrightarrow 0$ entonces $\nu P_1 = 0$. Por la razón dual $\tau^{-1}I = 0$ para cualquier inyectivo I .

- Consideremos $Q = 1 \rightarrow 2$  Luego

$$P(1) = \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{matrix} \quad P(2) = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \quad P(3) = 3 \quad P(4) = 4$$

$$I(1) = 1 \quad I(2) = \frac{1}{2} \quad I(3) = \frac{1}{3} \quad I(4) = \frac{1}{4}$$

Sea $M = P(1)$. Calculemos $\tau^{-1}M$: una pim de M es

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I(3) \oplus I(4) \longrightarrow I(2) \longrightarrow 0$$

Aplicando ν^{-1} obtengo

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P(3) \oplus P(4) \longrightarrow P(2) \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow 0$$

Y calculando las dimensiones obtengo que el vector dimensión de $\tau^{-1}M$ es 2, que no es inyectivo. Calculemos una vez más el funtor de Nakayama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & I(2) & \longrightarrow & I(1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \nu^{-1} & & \downarrow \nu^{-1} & & \downarrow \nu^{-1} & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P(2) & \longrightarrow & P(1) & \longrightarrow & \tau^{-1}2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Luego $\tau^{-1}2 = 1 = I(1)$

Terminamos la sección con una proposición que relaciona la dimensión proyectiva/inyectiva con el funtor AR:

Proposición 4.16. *Sea M un A módulo a derecha. Entonces:*

1. $pd M \leq 1 \iff \text{Hom}(DA, \tau M) = 0$
2. $id M \leq 1 \iff \text{Hom}(\tau^{-1}M, A) = 0$

Demostración. Demostraremos 1), la segunda parte es análoga o sale aplicando dualidad.

Sea $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ una ppm de M . Aplicando el funtor de Nakayama obtenemos una sucesión exacta en ${}_A\text{Mod}$:

$$0 \rightarrow \tau M \hookrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \rightarrow 0$$

Aplicando ahora ν^{-1} y usando que $\nu^{-1} \circ \nu|_{\text{Proy}_A} \cong \text{Id}_{\text{Proy}_A}$ tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \nu^{-1}\tau M & \longrightarrow & \nu^{-1}\nu P_1 & \longrightarrow & \nu^{-1}\nu P_0 & & \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(p_1) & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Por el lema de los cinco, $\text{Ker}(p_1) \cong \nu^{-1}\tau M = \text{Hom}(DA, \tau M)$. Luego $\text{Hom}(DA, \tau M) = 0 \iff p_1$ es inyectiva \iff todo M admite una resolución de longitud 1 $\iff pd M \leq 1$. □

Transpuesta

Una forma alternativa de construir la traslación de Auslander-Reiten, más funtorial, es a través de la transpuesta. Esta asignación no es un funtor sobre Mod_A pero sí sobre un cociente de la categoría.

Definición 4.17. Sea $M \in Mod_A$ y $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ una ppm. Aplicando $(-)^t$ obtengo una secuencia exacta en ${}_A Mod$: $0 \rightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow Coker(p_1^t) \rightarrow 0$. Defino $TrM := Coker(p_1^t)$

Las propiedades más importantes de la transpuesta están indicadas en este teorema:

Teorema 4.18.

1. $Tr(X \oplus Y) = Tr(X) \oplus Tr(Y)$
2. $TrM = 0 \iff M$ es proyectivo.
3. TrM no tiene sumandos directos proyectivos no nulos.
4. Si $M \in Mod_P A$ entonces

$$P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow TrM \longrightarrow 0$$

es una ppm de TrM .

5. Si M es indescomponible no proyectivo, TrM es indescomponible y $Tr TrM \cong M$
6. Recordar que por la definición 3.33, $mod_P A$ es la categoría de A módulos a derecha f.g. sin sumandos directos proyectivos. Entonces $M \in Mod_P A$ entonces $Tr TrM \cong M$
7. Si M y $N \in Mod_P A$, $M \cong N \iff TrM \cong TrN$
8. $Tr : \frac{Mod_P A}{isos} \longrightarrow \frac{A-Mod_P}{isos}$ (con $\frac{Mod_P A}{isos}$ el conjunto de clases de isomorfismos) es una biyección.

Demostración. 1. Sea $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} X \rightarrow 0$ una ppm de X y $Q_1 \xrightarrow{q_1} Q_0 \xrightarrow{q_0} Y \rightarrow 0$ una ppm de Y . Luego $P_1 \oplus Q_1 \xrightarrow{p_1 \oplus q_1} P_0 \oplus Q_0 \xrightarrow{p_0 \oplus q_0} X \oplus Y \rightarrow 0$ es una presentación proyectiva de $X \oplus Y$. Y por el lema 2.28, es una ppm de $X \oplus Y$. Luego el teorema se sigue aplicando $(-)^t$.

2. Si P es proyectivo, $TrP = 0$ porque una ppm de P es $0 \rightarrow P \xrightarrow{Id} P \rightarrow 0$.

Si ahora $TrM = 0$, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M^t \longrightarrow P_0^t \longrightarrow P_1^t \longrightarrow 0$$

Entonces se parte pues P_1^t es proyectivo. Luego M^t es un sumando directo de P_0^t y por lo tanto proyectivo. Entonces por 4.9, M es proyectivo.

3. Supongo $TrM = Q \oplus N$ con Q proyectivo. Entonces tengo una composición sobreyectiva $P_1^t \xrightarrow{\pi} TrM \xrightarrow{P} Q \rightarrow 0$ y como Q es proyectivo, es una retracción. Luego $P_1^t = Q \oplus Q'$. Como $P\pi \circ i_Q = Id_Q$, aplicando $(-)^t$ tengo $i_Q^t \circ (p\pi)^t = Id_{Q^t}$ con $P_1 = Q^t \oplus Q'^t$. Y

como $P\pi$ es sobre, $(P\pi)^t : Q^t \rightarrow P_1$ es inyectiva. Identificando Q^t con su imagen $((P_1^t)^t = \text{Im}((P\pi)^t) \oplus \text{Im}((P'\pi)^t))$, podemos suponer que $(P\pi)^t$ es la inclusión

Afirmo que $p_1|_{Q^t} = 0$. En efecto: $(p_1|_{Q^t})^t = (p_1 \circ (p\pi))^t = p\pi p_1^t = 0$ pues $\pi p_1^t = 0$. Entonces $(p_1|_{Q^t})^t : P_0^t \rightarrow Q$ es el morfismo nulo, luego $p_1|_{Q^t} = 0$. Entonces $Q^t \subseteq \text{Ker}(p_1)$ y en consecuencia $p_1|_{(Q')^t} : (Q')^t \rightarrow \text{Im}(p_1)$ es sobreyectiva. Por la minimalidad de P_1 , $\dim_k P_1 \leq \dim_k (Q')^t \leq \dim_k P_1$. Entonces $Q = 0$.

4. Supongo M sin sumandos directos proyectivos. Por el teorema 4.9 parte 2, $P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow \text{Tr}M \rightarrow 0$ es una presentación proyectiva de $\text{Tr}M$, veamos que es minimal. Por el lema 2.31, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^t & \xrightarrow{p_1^t} & P_1^t & \xrightarrow{\pi_M} & \text{Tr}M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel & & \\ U_0 \oplus V_0 & \xrightarrow{u \oplus v} & U_1 \oplus V_1 & \xrightarrow{(w;0)} & \text{Tr}M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con v sobreyectivo y $U_0 \xrightarrow{u} U_1 \xrightarrow{w} \text{Tr}M \rightarrow 0$ una ppm.

Tomando $(-)^t$ en el diagrama, y usando el iso $(P^t)^t \cong P$ si P es proyectivo,

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ (P_1^t)^t & \xrightarrow{p_1^{tt}} & (P_0^t)^t & \xrightarrow{\pi_M'} & \text{Coker}(p_1^{tt}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ U_1^t \oplus V_1^t & \xrightarrow{u^t \oplus v^t} & U_0^t \oplus V_0^t & \xrightarrow{\pi_1' \oplus \pi_2'} & N_1 \oplus N_2 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.1)$$

donde $N_1 = \text{Coker } u^t$ y $N_2 = \text{Coker } v^t$. Notar que V_1 es proyectivo, pues es un sumando directo de un proyectivo. Entonces v es una retracción (pues es sobreyectivo a un proyectivo). Luego existe $r : V_1 \rightarrow V_0$ tal que $vr = \text{Id}_{V_1}$. Entonces $r^t \circ v^t = \text{Id}_{V_1^t}$, v^t es una sección. Por lo tanto $0 \rightarrow V_1^t \xrightarrow{v^t} V_0^t \xrightarrow{\pi_2'} N_2 \rightarrow 0$ se parte. Luego $V_0^t = N_2 \oplus V_1^t$. Por lo tanto, como V_0^t es proyectivo, pues V_0 es un sumando directo de P_0^t , N_2 es proyectivo. Luego N_2 sería un sumando directo proyectivo de M . Entonces $N_2 = 0$. Luego v^t es un iso, y entonces v también. Entonces vía los isos, $U_1^t \oplus V_1^t \xrightarrow{u^t \oplus v^t} U_0^t \oplus V_0^t \rightarrow M \rightarrow 0$ es una presentación proyectiva de M , y como v^t es un iso, $U_1^t \xrightarrow{u^t} U_0^t \rightarrow M \rightarrow 0$ también es una presentación proyectiva de M . Entonces, como $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ es una ppm de M , de nuevo por el lema 2.31, $\dim_k P_1 \leq \dim_k U_1^t$ y por el diagrama (4.1), $\dim_k U_1^t \leq \dim_k P_1$. Luego $U_1^t = P_1$ y por lo tanto $0 = V_1^t \cong V_0^t$ y como V_0 y V_1 son proyectivos, aplicando $(-)^t$, obtengo $V_0 = V_1 = 0$.

5. Sea M indescomponible no proyectivo. Por el punto 4 aplicado a M , $P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow \text{Tr}M \rightarrow 0$ es una ppm de $\text{Tr}M$. Entonces por definición, aplicando $(-)^t$ tengo una sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1^{tt} & \longrightarrow & P_0^{tt} & \longrightarrow & Tr TrM & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\
P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Y entonces $Tr TrM \cong M$ por el lema de los cinco.

En particular, si M es indescomponible y $TrM = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$ es la descomposición en indescomponibles de TrM , ningún N_i es proyectivo, por el punto 3. Entonces $Tr TrM = TrN_1 \oplus \cdots \oplus TrN_k \cong M$, donde cada $TrN_i \neq 0$. Luego $k = 1$ pues M es indescomponible, entonces TrM es indescomponible.

6. Consecuencia inmediata de 5 y 1.

7. \implies) Es inmediato por la unicidad de la ppm.

\impliedby) Supongo $TrM \cong TrN$. Luego $Tr TrM \cong Tr TrN$ por unicidad de la ppm. Y como M y N pertenecen a $Mod_P A$, $M \cong Tr TrM \cong Tr TrN \cong N$.

□

Usando Tr podemos construir una definición equivalente de τ y τ^{-1} . Recordar cómo se construía $\tau^{-1}M$: si $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} I_0 \xrightarrow{g} I_1$ es una pim de M , primero tomo el dual $D : DI_1 \xrightarrow{Dg} DI_0 \xrightarrow{Df} DM \rightarrow 0$. Esto es una ppm de DM por 4.2. Entonces al tomar $(-)^t$ tenemos $0 \rightarrow \nu M \xrightarrow{\nu f} \nu I_0 \xrightarrow{\nu g} \nu I_1 \rightarrow Coker((Dg)^t) \rightarrow 0$. Luego $\tau^{-1}M = Tr DM$.

Similarmente, para construir τM empezábamos con una ppm de M : $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$. Luego tomamos $(-)^t$ y obtenemos $0 \rightarrow M^t \xrightarrow{g^t} P_0^t \xrightarrow{f^t} P_1^t \rightarrow TrM \rightarrow 0$. Aplicando D tenemos $0 \rightarrow D TrM \rightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu f} \nu P_0 \xrightarrow{\nu g} \nu M \rightarrow 0$. Luego $D TrM \cong Ker(\nu f) = \tau M$

Escrito como esta composición, podemos probar algunas propiedades muy importantes de τ y τ^{-1} .

Teorema 4.19. Sean $\tau, \tau^{-1} : Mod_A \rightarrow Mod_A$, $\tau = D Tr$ y $\tau^{-1} = Tr D$. Entonces:

1. $\tau(X \oplus Y) = \tau X \oplus \tau Y$
2. $\tau P = 0 \iff P$ es proyectivo. $\tau^{-1}I = 0 \iff I$ es inyectivo.
3. τM no tiene sumandos directos inyectivos no nulos y $\tau^{-1}N$ no tiene sumandos directos proyectivos no nulos.
4. Si $M \in Mod_P A$, $\tau^{-1} \tau M \cong M$ y si $M \in Mod_I A$, $\tau \tau^{-1} M \cong M$
5. Si M es indescomponible, τM y $\tau^{-1} M$ son indescomponibles.
6. Si M y N en $Mod_P A$, $M \cong N \iff \tau M \cong \tau N$. Y si M y N en $Mod_I A$, $M \cong N \iff \tau^{-1} M \cong \tau^{-1} N$
7. $\tau : Mod_P A \longrightarrow Mod_I A$ es una asignación biyectiva con inversa τ^{-1}

4.5 Categoría estable

En la sección anterior definimos τ sobre los objetos, como la composición de una asignación Tr y un functor D . Para definir a τ sobre las flechas y darle una condición de functor es necesario poder definir Tr sobre las flechas. Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo, y armamos unas presentaciones proyectivas minimales P_\bullet, Q_\bullet de M y N , podemos construir una flecha bien definida de TrN en TrM . El problema es entender cómo se relaciona esa flecha con la que surge de tomar otras presentaciones proyectivas minimales P'_\bullet y Q'_\bullet , que por supuesto son isomorfas a las anteriores. Vamos a ver que $Tr(f)$ está bien definida salvo flechas "que se factorizan por proyectivos".

Radical de una categoría

Definición 4.20. Sea \mathcal{C} una categoría k aditiva. Un ideal I en \mathcal{C} es una clase de morfismos I tal que para todos objetos X, Y, Z y morfismos $f, f' : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, tenemos que:

1. $0 : X \rightarrow X$ el morfismo cero, pertenece a I .
2. Si f y $f' \in I$, entonces $\lambda f + \mu f' \in I$.
3. Si $f \in I$ entonces $g \circ f \in I$.
4. Si $g \in I$, entonces $g \circ f \in I$.

Definición 4.21. Dado I un ideal de \mathcal{C} , defino $I(X, Y) := I \cap \text{Hom}(X, Y)$.

Observación 4.22. Notar que si existe una sección $f \in I(X, Y)$, entonces $Id_X \in I(X, X)$, y por lo tanto $I(X, Y) = \text{Hom}(X, Y)$ y $I(Z, X) = \text{Hom}(Z, X) \forall I, Z$. Lo mismo es cierto si existe $f \in I(Y, X)$ una retracción

Un ejemplo importante de ideal de una categoría es el radical de Jacobson:

Definición 4.23. El radical de Jacobson de una categoría \mathcal{C} es la clase de morfismos $\text{Rad}_{\mathcal{C}}$ definida como

$$\text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y : Id_X - h \circ f \text{ es un iso para todo } h : Y \rightarrow X\}$$

Notar que si $f \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, f no es un iso, pues en ese caso $Id_X - f^{-1} \circ f = 0$ sería un iso y entonces $X = 0$.

Lema 4.24. $\text{Rad}_{\mathcal{C}}$ es un ideal de \mathcal{C}

Demostración. 1. $Id_X - h \circ 0 = 1_X$ es un iso.

2. Sean f y $f' \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, y $h : Y \rightarrow X$.

Si $\lambda \in k^\times$, $Id_X - h \circ (\lambda f) = Id_X - (\lambda h) \circ f$ que es un iso por hipótesis.

Quiero ver ahora que $Id_X - h \circ (f + f')$ es un iso. Sea g un iso tal que $g \circ (Id_X - h \circ f) = Id_X$. Entonces $g \circ (Id_X - h \circ (f + f')) = g \circ (Id_X - h \circ f) - g \circ h \circ f' = Id_X - (gh) \circ f'$ que es inversible pues $f' \in \text{Rad}$. Como g también es inversible, $Id_X - h \circ (f + f')$ lo es.

3. Supongo $f : X \rightarrow Y \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}$ y sea $g : Y \rightarrow Z$. Quiero ver que $gf \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. Esto es claro pues $Id_X - h \circ (gf) = Id_X - (hg) \circ f$.

Supongo ahora $f : X \rightarrow Y \in \text{Rad}_C(X, Y)$ y sea $g : Z \rightarrow X$. Quiero ver $f \circ g \in \text{Rad}_C(Z, Y)$, i.e. $Id_Z - hfg$ es inversible. Por hipótesis, $Id_X - ghf$ es inversible con inversa c . Luego

$$\begin{aligned} Id_Z &= Id_Z - hfg + hfg = Id_Z - hfg + hf(Id_X - ghf)cg \\ &= Id_Z - hfg + hfcg - hfgghfcg = (Id_Z - hfg)(Id_Z + hfcg) \end{aligned}$$

Luego $Id_Z - hfg$ tiene una inversa a derecha. Análogamente,

$$\begin{aligned} Id_Z &= Id_Z - hfg + hfc(Id_X - ghf)g = Id_Z - hfg + hfcg - hfcghfg \\ &= (Id_Z + hfcg)(Id_Z - hfg) \end{aligned}$$

Entonces tiene una inversa a izquierda. Luego $Id_Z - hfg$ es un isomorfismo. □

Además por una demostración similar a que Rad_C es un ideal, fácilmente se puede demostrar que una definición equivalente es $\text{Rad}_C(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y : Id_Y - f \circ h \text{ es un iso para todo } h : Y \rightarrow X\}$

Lema 4.25. $\text{Rad}_C(X, X) = \text{Rad}(\text{End}(X))$

Demostración. $\text{Rad}_C(X, X) = \{f \in \text{End}(X) : 1 - hf \text{ es inversible } \forall h \in \text{End}(X)\} = \text{Rad}(\text{End}(X))$ □

Lema 4.26. Si X e Y son indescomponibles no nulos,

$$\begin{aligned} \text{Rad}_C(X, Y) &\stackrel{1}{=} \{f : X \rightarrow Y : f \text{ no es un iso}\} \\ &\stackrel{2}{=} \{f : X \rightarrow Y : f \text{ no es una sección}\} \\ &\stackrel{3}{=} \{f : X \rightarrow Y : f \text{ no es una retracción}\} \\ &\stackrel{4}{=} \{f : X \rightarrow Y : f \text{ no es una sección ni una retracción}\} \end{aligned}$$

donde 2 vale también si únicamente X es indescomponible y para 3 alcanza con que únicamente Y sea indescomponible.

Demostración. Hagamos uno y dos:

1. \subseteq) Sea $f \in \text{Rad}_C(X, Y)$ Si f fuera un iso, $\exists f^{-1} : Y \rightarrow X$. Luego $Id_X - f^{-1}f = Id_X - Id_X = 0$ sería un iso, entonces $X = 0$, abs.

\supseteq) Sea $f \neq 0$ no iso y sea $h : Y \rightarrow X$, qvq $Id_Z - hf$ es inversible. Como X es indescomponible, $\text{End}(X)$ es local, entonces hf es inversible o $Id_X - hf$ lo es. Supongo que hf lo es. Entonces existe $g : X \rightarrow X$ tal que $ghf = hfg = Id_X$. Entonces f es una sección. Luego $Y = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(gh)$. Como $f \neq 0$, $\text{Ker}(gh) = 0$ (Y indescomponible). Luego gh es inyectiva y como era sobreyectiva, es un iso, luego f es un iso, contradicción.

2. \supseteq) Si f no es una sección, por el mismo argumento de antes, como X es indescomponible, si $Id_X - hf$ no es inversible, hf lo es y entonces f sería una sección, absurdo.

\subseteq) Supongo existe s tal que $sf = Id_X$. Luego $0 = Id_X - sf$. Luego $Id_X - sf$ no es un iso pues $X \neq 0$, lo que contradice que $f \in \text{Rad}_C$. Luego f no es una sección. □

Lema 4.27. Si $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$ y $f \in \text{End}(M)$. Entonces $f \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(M, M) \iff f_{i,j} \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(M_i, M_j) \forall i, j$

Demostración. \implies Es trivial pues $f_{i,j} = P_j \circ f \circ i_{M_i}$ y $\text{Rad}(M, M)$ es un ideal.

$$\begin{aligned} \iff f(x) &= f\left(\sum_j i_{M_j} \circ P_j(x)\right) = \sum_j f i_{M_j}(P_j(x)) = \sum_j \sum_k i_{M_k} \circ P_k f i_{M_j}(P_j(x)) \\ &= \sum_{j,k} i_{M_k} f_{j,k} \circ P_j(x) \in \text{Rad}_{\mathcal{C}}(M, M) \quad \square \end{aligned}$$

Ideal de proyectivos

Definición 4.28. Sea $\mathcal{P}(X, Y) \subseteq \text{Hom}(X, Y)$ el ideal

$$\mathcal{P}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y : \exists P \in \text{Proy}_A, h : X \rightarrow P \text{ y } g : P \rightarrow Y \text{ tal que } f = gh\}$$

e $\mathcal{I}(X, Y) \subseteq \text{Hom}(X, Y)$ el ideal

$$\mathcal{I}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y : \exists I \in \text{Iny}_A, h : X \rightarrow I \text{ y } g : I \rightarrow Y \text{ tal que } f = gh\}$$

Observación 4.29. \mathcal{P} y \mathcal{I} son ideales en Mod_A . Lo demostramos para \mathcal{P} :

1. $0 \in \mathcal{P}$ pues 0 es proyectivo.
2. Sean $f, g \in \mathcal{P}(X, Y)$ Entonces existen $P_1, P_2, f_1, f_2, g_1, g_2$ tal que

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{f} Y & , & X \xrightarrow{g} Y \\ \searrow f_1 & \nearrow f_2 & \searrow g_1 & \nearrow g_2 \\ & P_1 & & P_2 \end{array} \text{ conmutan, luego } \begin{array}{ccc} X \xrightarrow{f+\lambda g} Y & & \\ \searrow (f_1, g_1) & \nearrow f_2 + \lambda g_2 & \\ & P_1 \oplus P_2 & \end{array} \text{ conmuta.}$$

3. Si $f \in \mathcal{P}(X, Y)$, $f = f_2 \circ f_1$ con $f_1 : X \rightarrow P$ y $f_2 : P \rightarrow Y$, y $g : Y \rightarrow Z$, $gf = g(f_2 \circ f_1) = (gf_2) \circ f_1$ entonces $gf \in \mathcal{P}(X, Z)$.

En particular, $\mathcal{I}(X, Y)$ y $\mathcal{P}(X, Y)$ son subespacios vectoriales de $\text{Hom}(X, Y)$ y entonces $\frac{\text{Hom}(X, Y)}{\mathcal{P}(X, Y)}$ y $\frac{\text{Hom}(X, Y)}{\mathcal{I}(X, Y)}$ son espacios vectoriales.

Ejemplo 4.30. Sea Q un carcaj sin relaciones ni ciclos dirigidos y $A = kQ$. Entonces si $X \in \text{Mod}_{\mathcal{P}}A$ (no tiene sumandos directos proyectivos), cualquier morfismo que se factoriza a través de un proyectivo debe ser nulo, por el corolario 2.18. Por lo tanto $\bar{f} = f$ para todo $f : X \rightarrow Y$.

Definición 4.31. Defino la categoría **proyectivamente estable** $\underline{\text{Mod}}_A$ como la categoría con objetos los mismos que Mod_A y flechas $\underline{\text{Hom}}(M, N) := \frac{\text{Hom}(M, N)}{\mathcal{P}(M, N)}$; con la composición la inducida por la relación de equivalencia: $\bar{f} \circ \bar{g} = \overline{fg}$. Notar que la identidad con esta composición es \bar{Id} .

Análogamente defino la categoría **inyectivamente estable** $\overline{\text{Mod}}_A$ con los mismos objetos y flechas $\overline{\text{Hom}}(M, N) := \frac{\text{Hom}(M, N)}{\mathcal{I}(M, N)}$

Observación 4.32. Todo proyectivo es isomorfo al objeto cero en $\overline{\text{Mod}}_A$, pues si $f : P \rightarrow 0$ y $g : 0 \rightarrow P$ son los morfismos nulos, $\overline{g \circ f} = \overline{Id_P}$ y $\overline{f \circ g} = \overline{Id_0}$.

Esto me dice que en realidad, la categoría proyectivamente estable tiene menos objetos que Mod_A , ya que me identifica todos los proyectivos entre sí. La pregunta es si me identifica objetos sin sumandos directos proyectivos, y la respuesta es que no.

Lema 4.33. 1. Sean $M, N \in \text{Mod}_{\mathcal{P}}A$. Entonces $M \cong N$ en $\text{Mod}_A \iff M \cong N$ en $\underline{\text{Mod}}_A$

2. Sean $M, N \in \text{Mod}_{\mathcal{I}}A$. Entonces $M \cong N$ en $\text{Mod}_A \iff M \cong N$ en $\overline{\text{Mod}}_A$

Demostración. Basta mostrarlo para \underline{Mod}_A .

\implies) Es sencillo, pues si existe g tal que $f \circ g = Id$ y $g \circ f = Id$, tomando clase a ambos lados obtengo lo que quería.

\impliedby) Supongo $M \cong N$ en \underline{Mod}_A luego existen $f : N \rightarrow M$ y $g : M \rightarrow N$ tal que $\overline{f \circ g} = \overline{Id_M}$ y $\overline{g \circ f} = \overline{Id_N}$. Por lo tanto existen α, β, α' y β' tal que

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_M - fg} \\ \searrow \beta \\ P \end{array} M \quad \text{y} \quad N \begin{array}{c} \xrightarrow{Id_N - gf} \\ \searrow \beta' \\ Q \end{array} N$$

conmutan.

1. Caso M y N indescomponibles: Entonces $End(M)$ y $End(N)$ son anillos locales. Luego $Id_M - fg$ es inversible o fg lo es y análogo para $Id_N - gf$. Como M es indescomponible, por lema 4.26, $Rad(M, P) = \{w : M \rightarrow P : w \text{ no es una sección}\}$. Entonces $\beta \in Rad(M, P)$, pues si fuera una sección M sería un sumando directo de P y entonces proyectivo.

Luego $\alpha\beta = Id_M - fg \in Rad(M)$, en particular no es un iso y en consecuencia fg lo es. Análogamente gf es un iso. Una cuenta trivial demuestra que entonces f es un iso.

2. Supongo $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ con M_t y N indescomponibles. Por la cuenta anterior para N indescomponible, gf es un iso. Veamos que fg lo es.

Defino $g_i : M_i \rightarrow N$, $g_i := g|_{M_i}$ y $f_j : N \rightarrow M_j$, $f_j := P_j f$. Como $Id_M - fg = \alpha\beta$, componiendo a derecha a ambos lados con la restricción de M_i y a izquierda con la proyección a M_j tengo que $(Id_M - fg)_{i,j} = \alpha^j \beta_i$, $\beta_i : M_i \rightarrow P$, $\alpha^j : P \rightarrow M_j$, donde $(Id_M - fg)_{i,j}$ es la coordenada (i, j) de la matriz del morfismo. Como $\beta_i \in Rad(M_i, P)$ pues M_i es indescomponible y M no tiene sumandos directos proyectivos, $(Id_M - fg)_{i,j} \in Rad(M_i, M_j) \forall i, j$. Luego por el lema 4.26. $Id_M - fg \in Rad(M)$. Como $Id_M = (Id_M - fg) + fg$ y $Id_M \notin Rad(M)$, entonces $fg \notin Rad(M)$. Luego fg es un iso. Entonces f es un iso.

3. Si ahora M es indescomponible y N no, análogo.

4. El caso general sale copiando las demostraciones de 2 y 3 (en 2, en ninguna parte usamos que N era indescomponible para demostrar que fg es iso) \square

Observacion 4.34. $D : Mod_A \rightarrow {}_A Mod$ induce una dualidad $D : \underline{Mod}_A \rightarrow \overline{{}_A Mod}$.

Queremos demostrar que Tr induce un funtor $Tr : \underline{Mod}_A \rightarrow \overline{{}_A Mod}$ que además es una dualidad. Para eso hay que definir Tr sobre las flechas y demostrar que está bien definida en el cociente:

Sea $f : M \rightarrow N$ morfismo y P_\bullet, Q_\bullet ppm de M y N respectivamente. Luego existen f_1, f_0 (no necesariamente únicos) tal que

$$\begin{array}{ccccc} P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \rightarrow & 0 \\ f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & & \downarrow f & & \\ Q_0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

conmuta, y aplicando $(-)^t$ tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M^t & \xrightarrow{p_1^t} & P_1^t & \xrightarrow{p_0^t} & P_0^t & \xrightarrow{\pi_M} & Tr M & \rightarrow & 0 \\ & & f^t \uparrow & & f_1^t \uparrow & & f_0^t \uparrow & & \uparrow Tr(f, f_0, f_1) & & \\ 0 & \rightarrow & N^t & \xrightarrow{q_1^t} & Q_1^t & \xrightarrow{q_0^t} & Q_0^t & \xrightarrow{\pi_N} & Tr N & \rightarrow & 0 \end{array}$$

sonde $Tr(f, f_0, f_1)(\pi_N(x)) := \pi_M \circ f_0^t(x)$ está bien definido y es morfismo. El problema es que si bien la resolución, salvo isomorfismo, es única, la forma de completar el diagrama no lo es. Supongo que

$$\begin{array}{ccccccc}
P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \\
f'_0 \downarrow & & f'_1 \downarrow & & \downarrow f & & \\
Q_0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

es otra forma de completar el diagrama. Notar que $f_1 - f'_1 \subseteq \text{Ker}(q_1)$. Luego existe $w : P_1 \rightarrow Q_0$ tal que $q_0 \circ w = f_1 - f'_1$. Entonces $f_0 - f'_0 - wp_0 : P_0 \rightarrow Q_0$ está contenido en el núcleo de q_0 . En efecto: $q_0(f_0 - f'_0 - wp_0) = (f_1 - f'_1)p_0 - q_0wp_0 = (f_1 - f'_1)p_0 - (f_1 - f'_1)p_0 = 0$.

Luego existe $s_0 : P_0 \rightarrow \text{Ker}(q_0)$ tal que $f_0 - f'_0 = is_0 + wp_0$, $i : \text{Ker}(q_0) \hookrightarrow Q_0$. Aplicando la transposición tenemos $(f_0)^t - (f'_0)^t = s_0^t \circ i^t + p_0^t \circ w^t$. Y por lo tanto $(\text{Tr}(f) - \text{Tr}'(f))(\pi_N x) = \pi_M((f_0)^t - (f'_0)^t) = \pi_M \circ s_0^t \circ i^t + \underbrace{\pi_M \circ p_0^t \circ w^t}_{=0} = \pi_M \circ s_0^t \circ i^t$

Nuestro objetivo es demostrar que $\text{Tr}(f) - \text{Tr}'(f) \in \mathcal{P}(\text{Tr}N, \text{Tr}M)$. Tratemos de ver eso: $i^t q_0^t = (q_0 i)^t = 0$. Entonces $\text{Im}((q_0)^t) \subseteq \text{Ker}(i^t)$ y como $\text{Tr}N = \frac{Q_0^t}{\text{Im}((q_0)^t)}$, entonces existe $\tilde{i} : \text{Tr}N \rightarrow \text{Ker}(q_0)^t$ tal que $i^t = \tilde{i} \pi_N$.

Luego $(\text{Tr}(f) - \text{Tr}'(f))(\pi_N x) = \pi_M \circ s_0^t \circ \tilde{i}(\pi_N x)$ y por lo tanto $(\text{Tr}(f) - \text{Tr}'(f)) = \pi_M \circ (s_0^t \tilde{i}) = g$

con $g : \text{Tr}N \xrightarrow{s_0^t \tilde{i}} P_0^t \xrightarrow{\pi_M} \text{Tr}M \in \mathcal{P}(\text{Tr}N, \text{Tr}M)$

Luego $\overline{\text{Tr}(f)} = \overline{\text{Tr}'(f)}$ y por lo tanto $\text{Tr} : \text{Mod}_A \rightarrow \underline{A}\text{Mod}$ está bien definida sobre las flechas.

Proposición 4.35. *Sea $\text{Tr} : \text{Mod}_A \rightarrow \underline{A}\text{Mod}$ definida sobre las flechas como arriba. Entonces:*

1. $\text{Tr}(f) = 0 \forall f \in \mathcal{P}(M, N)$
2. $\text{Tr}(f + \lambda g) = \text{Tr}(f) + \lambda \text{Tr}(g)$
3. $\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(g) \circ \text{Tr}(f)$
4. $\text{Tr}(Id) = Id$

Esto implica que $\text{Tr} : \underline{\text{Mod}}_A \rightarrow \underline{A}\text{Mod}$ es un funtor aditivo.

Demostración. Veamos 1., los demás son consecuencias de la buena definición.

Sea $f \in \mathcal{P}(M, N)$, $f = \alpha\beta$, $f : M \xrightarrow{\beta} P \xrightarrow{\alpha} N$ con P proyectivo.

Sean

$$\begin{array}{ccccccc}
P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \downarrow \beta & & \\
0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{Id} & P & \longrightarrow & 0
\end{array}
\quad \text{y} \quad
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{Id} & P & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha} & & \downarrow \alpha & & \\
Q_0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

completaciones de los diagramas. Luego como el diagrama de la izquierda conmuta, tomando transposición, el de la derecha también:

$$\begin{array}{ccccccc}
P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow 0 & & \downarrow \tilde{\alpha}\beta p_1 & & \downarrow \alpha\beta & & \\
Q_0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ccccccc}
P_1^t & \xrightarrow{p_0^t} & P_0^t & \xrightarrow{\pi_M} & \text{Tr}M & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow (\tilde{\alpha}\beta p_1)^t & & \uparrow 0 & & \uparrow \text{Tr}(f) & & \\
Q_1^t & \xrightarrow{q_0^t} & Q_0^t & \xrightarrow{\pi_N} & \text{Tr}N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Y por lo tanto $\text{Tr}(f) = 0$

□

Corolario 4.36. $Tr : \underline{Mod}_A \longrightarrow {}_A\underline{Mod}$ es un funtor bien definido.

Veamos ahora que es una equivalencia, es decir, que $Tr TrM \cong M$ en ${}_A\underline{Mod}$ si $M \in \underline{Mod}_A$

Teorema 4.37. $Tr : \underline{Mod}_A \longrightarrow {}_A\underline{Mod}$ es una equivalencia de categorías

Demostración. Vamos a hacerlo en partes, primero vamos a ver que $Tr Tr|_{\underline{Mod}_A} : \underline{Mod}_A \longrightarrow \underline{Mod}_A$ es equivalente a la identidad, y entonces vamos a escribir

$$\begin{array}{ccc} \underline{Mod}_A & \xrightarrow{Tr Tr} & \underline{Mod}_A \\ \mathcal{P} \downarrow & & \uparrow j \\ \underline{Mod}_P & \xrightarrow{Tr Tr|_{\underline{Mod}_P}} & \underline{Mod}_P \end{array}$$

y demostrar que $j \circ \mathcal{P} \cong Id$

1. Supongo $M \in \underline{Mod}_P$, $M \neq 0$. Luego si $P_0 \xrightarrow{p_0} P_1 \xrightarrow{p_1} M \longrightarrow 0$ es una ppm de M ,

$P_1^t \xrightarrow{p_1^t} P_0^t \xrightarrow{\pi} TrM \longrightarrow 0$ es una ppm de TrM , y por lo tanto,

$P_0^{tt} \xrightarrow{p_0^{tt}} P_1^{tt} \xrightarrow{\pi_{TrM}} Tr TrM \longrightarrow 0$ es una ppm de $Tr TrM$

Recordar que tenemos un iso natural $\epsilon_P : P^{tt} \xrightarrow{\cong} P$, entonces tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^{tt} & \xrightarrow{p_0^{tt}} & P_1^{tt} & \xrightarrow{\pi_{TrM}} & Tr TrM & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow \epsilon_{P_0} & & \cong \downarrow \epsilon_{P_1} & & \cong \downarrow \mu_M & & \parallel \\ P_0 & \xrightarrow{p_0} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Donde el isomorfismo $\mu_M : Tr TrM \longrightarrow M$ es también en \underline{Mod}_P pues ni M ni $Tr TrM$ tienen componentes proyectivos. Veamos que es natural: Para eso tomo $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de módulos. Tomando Q_\bullet una ppm de N , análogamente que para M , con N también tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} Q_0^{tt} & \xrightarrow{q_0^{tt}} & Q_1^{tt} & \xrightarrow{\pi_{TrN}} & Tr TrN & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow \epsilon_{Q_0} & & \cong \downarrow \epsilon_{Q_1} & & \cong \downarrow \mu_N & & \parallel \\ Q_0 & \xrightarrow{q_0} & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Entonces para f podemos completar el diagrama con algunos f_1 y f_0 , y luego aplicar $(-)^{tt}$

$$\begin{array}{ccccccc} P_0 \xrightarrow{p_0} P_1 \xrightarrow{p_1} M \longrightarrow 0 & & P_0^{tt} \xrightarrow{p_0^{tt}} P_1^{tt} \xrightarrow{\pi_{TrM}} Tr TrM \longrightarrow 0 & & & & \\ \downarrow f_0 & \downarrow f_1 & \downarrow f & \implies & \downarrow f_0^{tt} & \downarrow f_1^{tt} & \downarrow Tr Tr(f) \\ Q_0 \xrightarrow{q_0} Q_1 \xrightarrow{q_1} N \longrightarrow 0 & & Q_0^{tt} \xrightarrow{q_0^{tt}} Q_1^{tt} \xrightarrow{\pi_{TrN}} Tr TrN \longrightarrow 0 & & & & \end{array}$$

Entonces para ver que es natural, necesitamos chequear que

$$\begin{array}{ccc} Tr TrM & \xrightarrow{Tr Tr(f)} & Tr TrN \\ \downarrow \mu_M & & \downarrow \mu_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

conmuta. En efecto:

- $\mu_N \circ Tr Tr(f)(\bar{x}) = \mu_N(\overline{f_1^{tt}(x)}) = q_1 \circ \epsilon_{Q_1} \circ f_1^{tt}(x)$
- $f \circ \mu_M(\bar{x}) = f \circ p_1 \circ \epsilon_{P_1}(x) = q_1 \circ f_1 \circ \epsilon_{P_1}(x)$

Finalmente $\epsilon_{Q_1} \circ f_1^{tt} = f_1 \circ \epsilon_{P_1}$ por la naturalidad del iso $P^{tt} \cong P$:

$$\begin{array}{ccc} P_1^{tt} & \xrightarrow{f_1^{tt}} & Q_1^{tt} \\ \downarrow \epsilon_{P_1} & & \downarrow \epsilon_{Q_1} \\ P_1 & \xrightarrow{f_1} & Q_1 \end{array}$$

Luego $Tr Tr|_{\underline{Mod}_{PA}} \cong Id_{\underline{Mod}_{PA}}$

2. Vamos a definir el functor $\mathcal{P} : \underline{Mod}_A \rightarrow \underline{Mod}_{PA}$: Si $M \in \underline{Mod}_A$, M se escribe de forma única, salvo isomorfismos, como $M = P \oplus M_p$ donde M_p no tiene sumandos directos proyectivos y P proyectivo. Defino $\mathcal{P}(M) = M_p$ y dado $\bar{f} : M \rightarrow N$ defino $\mathcal{P}(\bar{f}) : M_p \rightarrow N_p$ como $\mathcal{P}(\bar{f}) = \overline{P_{N_p} \circ f|_{M_p}}$. Es fácil ver que $\mathcal{P}(\bar{f})$ está bien definida, y además que $\overline{i_{N_p} \circ \mathcal{P}(\bar{f})} = \overline{i_{N_p} \circ P_{N_p} \circ f|_{M_p}} = \overline{f|_{M_p}}$. Finalmente es un functor pues $\mathcal{P}(f \circ g) = \mathcal{P}(f) \circ \mathcal{P}(g)$.

Además $j : \underline{Mod}_{PA} \rightarrow \underline{Mod}_A$ es simplemente el functor inclusión. Luego alcanza con demostrar que $j \circ \mathcal{P} \cong Id_{\underline{Mod}_A}$:

a) Supongo $M = P \oplus M_p$ con $M_p \in \underline{Mod}_{PA}$. Entonces $M \cong M_p = \mathcal{P}(M)$ en \underline{Mod}_A ; de hecho $P_{M_p} : M \rightarrow M_p$ es un iso con inversa i_{M_p} : en efecto, $Id_M - iP_{M_p} \in \mathcal{P}(M, M)$ y $Id_{M_p} - P_{M_p}i \in \mathcal{P}(M_p, M_p)$ pues los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xrightarrow{Id_{M_p} - P_{M_p}i} & M_p \\ \searrow 0 & & \nearrow 0 \\ & P & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{Id_M - iP_{M_p}} & M \\ \searrow Pr & & \nearrow i \\ & P & \end{array}$$

b) Finalmente es natural pues el siguiente diagrama conmuta en \underline{Mod}_A

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xrightarrow{\overline{P_{N_p} f|_{M_p}}} & N_p \\ \overline{i_{M_p}} \downarrow & & \downarrow \overline{i_{N_p}} \\ M & \xrightarrow{\bar{f}} & N \end{array}$$

3. Luego $Tr Tr = j \circ Tr Tr|_{\underline{Mod}_{PA}} \circ \mathcal{P} \approx j \circ \mathcal{P} \approx Id_{\underline{Mod}_{PA}}$ □

Parte 5

Teoría de Auslander-Reiten

El quiver de *Auslander – Reiten* es una construcción muy poderosa para estudiar la categoría de módulos sobre un álgebra de caminos. Nos permite, por ejemplo, calcular algorítmicamente (mediante el algoritmo de tejido *-knitting algorithm*) los vectores dimensión de las representaciones indescomponibles, y los espacios de morfismos entre dos representaciones indescomponibles.

El tenor de la primera parte de este capítulo se basa en la exposición de [SY12] y la segunda en [Sch14]. El lema 5.13 está simplificado, el lema 5.23 es un resultado básico sobre el quiver AR cuya demostración no pudimos hallar en la literatura y del cual incluimos una demostración propia. Además se incluyen los ejemplos 5.26 y 5.27 con cálculos propios.

Para formalizar cuáles y cuántas son las flechas en el quiver AR debemos definir las sucesiones exactas cortas casi partidas:

5.1 Morfismos casi partidos

Definición 5.1.

- Un morfismo $f : L \rightarrow M$ casi se parte si:

1. f no es una sección.
2. Para todo $u : L \rightarrow U$ que no es una sección, existe $u' : M \rightarrow U$ tal que $u' \circ f = u$.

y es **minimal a izquierda** si para todo $h : M \rightarrow M$ tal que $hf = f$ entonces h es un isomorfismo de M . f es **almost split minimal a izquierda** si es almost split a izquierda y minimal.

- Un morfismo $g : M \rightarrow N$ es **almost split a derecha** si

1. g no es una retracción.
2. Para todo morfismo $v : V \rightarrow N$ que no es una retracción, existe $v' : V \rightarrow M$ tal que $gv' = v$.

Y es **minimal a derecha** si para todo $h : M \rightarrow M$ tal que $gh = g$ entonces h es un isomorfismo de M . g es **almost split minimal a derecha** si es almost split y minimal a derecha.

Por su misma definición, es fácil probar que los morfismos almost split minimales a derecha son únicos salvo iso, es decir:

Proposición 5.2. 1. Sean $f : L \rightarrow M$ y $f' : L \rightarrow M'$ morfismos almost split minimales a izquierda. Entonces existe $h : M \rightarrow M'$ iso tal que $hf = f'$.

2. Sean $g : M \rightarrow N$ y $g' : M' \rightarrow N$ morfismos almost split minimales a derecha. Entonces existe $h : M \rightarrow M'$ iso tal que $g'h = g$.

Además de ser casi únicos, los morfismos almost split minimales tienen otra rigidez: sólo pueden salir o llegar (depende de si a izq. o a derecha) de módulos indescomponibles.

Proposición 5.3. 1. Sea $f : L \rightarrow M$ almost split minimal a izquierda. Entonces L es indescomponible.

2. Sea $g : M \rightarrow N$ almost split minimal a derecha. Entonces N es indescomponible.

Demostración.

1. Supongo $L = L_1 \oplus L_2$ con $L_1, L_2 \neq 0$ y sea $p_1 : L \rightarrow L_1$ la proyección. p_1 no es una sección: si lo fuera, existe $s : L_1 \rightarrow L$ tal que $s \circ p_1 = Id_L$ entonces si evaluo en un $l \neq 0 \in L_2$, $sp_1(l) = 0 \neq Id_L(l)$, absurdo. Luego por ser almost split existe $s_1 : M \rightarrow L_1$ tal que $s_1 \circ f = p_1$. Análogamente existe s_2 tal que $s_2 \circ f = p_2$.

Entonces si defino $s := i_1 \circ s_1 + i_2 \circ s_2 : M \rightarrow L$, f resulta una sección: $sf = i_1 p_1 + i_2 p_2 = Id_L$, que contradice que f no es sección. Entonces L es indescomponible.

2. Ejercicio. □

Demos ejemplos en concreto de morfismos almost split:

Proposición 5.4. El morfismo $0 : X \rightarrow Y$ es:

1. almost split minimal a izquierda $\iff X$ es simple e inyectivo e $Y = 0$

2. almost split minimal a derecha $\iff Y$ es simple y proyectivo y $X = 0$

Demostración. Hacemos 1:

\implies) X es simple: X es no nulo pues 0 no es una sección. Sea $H \leq X$ no nulo. Entonces $\pi : X \rightarrow \frac{X}{H}$ no es una sección: si lo fuera, sería inyectiva, y por lo tanto un isomorfismo lo que implica $H = 0$, contradicción. Luego no es una sección y por lo tanto como 0 es almost split existe $u : Y \rightarrow \frac{X}{H}$ tal que $u \circ 0 = \pi$. Luego $\pi = 0$ y por lo tanto $X = H$.

X es inyectivo: Sea $i : X \hookrightarrow I$ la cápsula inyectiva de X . Si i es una sección, X es un sumando directo de I y por lo tanto es inyectivo. Si no es una sección, existe $u : Y \rightarrow I$ tal que $u \circ 0 = i$. Luego $i = 0$, pero i es inyectivo, entonces $X = 0$, absurdo pues 0 no es sección.

Finalmente, $Y = 0$ pues $0_Y \circ 0 = 0$ entonces $0_Y : Y \rightarrow Y$ es un iso, lo que implica que $Y = 0$

\impliedby) Supongo $Y = 0$ y X simple e inyectivo. Entonces 0 no es una sección pues un simple no es nulo.

Además si $u : X \rightarrow Z$ es un morfismo que no es sección, como X es simple, $u = 0$ o u es inyectiva. Afirmo que $u = 0$. Si u fuera inyectiva, tendría el diagrama
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Z \\ \parallel & \swarrow \text{?} & \\ X & & \end{array}$$
 y como X

es inyectivo, existe $h : Z \rightarrow X$ tal que $hu = Id_X$, es decir u sería una sección, contradicción. Luego $u = 0$. Listo, defino $u' : Y \rightarrow Z$ como $u' = 0$.

Finalmente 0 es minimal trivialmente.

2. Ejercicio. □

Otro ejemplo de morfismos almost split son los que vienen junto con el radical de un proyectivo o el sócalo de un inyectivo:

Teorema 5.5. 1. Sea P proyectivo indescomponible e $i : \text{Rad } P \hookrightarrow P$ la inclusión. Entonces i es almost split minimal a derecha.

2. Sea I inyectivo y $\pi : I \rightarrow \frac{I}{\text{Soc } I}$ la proyección. Entonces π es almost split minimal a izquierda.

Demostración.

1. Sea P proyectivo indescomponible e $i : \text{Rad } P \hookrightarrow P$ la inclusión.

a) i no es una retracción pues si lo fuera sería sobreyectiva, pero $\text{Rad } P \subsetneq P$ (porque A es una álgebra finitamente generada y entonces P tiene algún submódulo maximal, que en particular es propio).

b) Supongo $v : V \rightarrow P$ no es una retracción. Quiero completar el diagrama con un v'

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v} & P \\ & \searrow v' & \uparrow i \\ & & \text{Rad } P \end{array}$$

v no es sobre, pues como P es proyectivo, si lo fuera sería una retracción.

Por otra parte, P es un proyectivo indescomponible, entonces es de la forma $e_i A$. Luego por la proposición 3.31, como $\text{Rad } P$ es el único submódulo maximal, $\text{Im}(v) \subseteq \text{Rad } P$. Luego efectivamente tomo v' como v corestringida a $\text{Rad } P$.

c) Supongo $i = hi$. Entonces $h|_{\text{Rad } P} = i$. Pero $\text{Ker}(h) \subseteq \text{Rad } P$ de nuevo por la proposición 3.31. Entonces $\text{Ker}(h) = 0$. Entonces $h : P \rightarrow P$ es mono y entonces un iso por dimensión.

2. Sea $\pi : I \rightarrow \frac{I}{\text{Soc } I}$ la proyección. El segundo punto de la proposición sale fácilmente recordando la parte 10 de la proposición 4.2 y la proposición a continuación. \square

Proposición 5.6. Sea $D : \text{Mod } A \rightarrow {}_A \text{Mod}$ el funtor dualidad.

- Si $f : L \rightarrow M$ es almost split minimal a izquierda, entonces $D(f) : DM \rightarrow DL$ es almost split minimal a derecha.
- Si $f : M \rightarrow N$ es almost split minimal a derecha, entonces $D(f) : DN \rightarrow DM$ es almost split minimal a izquierda.

Definición 5.7. Una sucesión exacta corta en $\text{Mod } A$

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

es **almost split** o *AR* si f es un morfismo almost split minimal a izquierda y g es almost split minimal a derecha.

La existencia de sucesiones almost split no es evidente. Maurice Auslander e Idun Reiten las introdujeron y demostraron su existencia en 1975 para estudiar la teoría de representaciones de álgebras artinianas [AR75].

Teorema 5.8. (Auslander y Reiten) Sea A una k álgebra de dimensión finita. Entonces vale:

1. Para todo módulo indescomponible no proyectivo finitamente generado M , existe una sucesión exacta almost split

$$0 \rightarrow \tau M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$$

2. Para todo módulo indescomponible no inyectivo f.g. N , existe una sucesión exacta almost split

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0$$

Demostración. Ver [SY12]. □

5.2 Morfismos irreducibles

Daremos una definición equivalente de sucesión almost split basada en morfismos *irreducibles*. Tiene la ventaja que ahora la cantidad o existencia de morfismos irreducibles entre dos módulos es más sencilla de encontrar utilizando el radical de la categoría como visto en 4.23. Además, el concepto no depende de ser a izquierda o derecha.

Definición 5.9. $f : X \rightarrow Y$ es **irreducible** si

1. f no es una sección.
2. f no es una retracción.
3. Si $f = f_2 \circ f_1$, entonces f_2 es una retracción o f_1 es una sección.

Notar que 1 en particular implica que $X \neq 0$ y 2 que $Y \neq 0$

El siguiente lema establece que los morfismos almost split e irreducibles son estables por isomorfismos:

Lema 5.10. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo y $\tilde{X} \xrightarrow{u} X, Y \xrightarrow{v} \tilde{Y}$ isomorfismos. Entonces:

1. f es una sección $\iff vfu$ es una sección.
2. f es una retracción $\iff vfu$ es una retracción.
3. f es irreducible $\iff vfu$ es irreducible.
4. f es almost split minimal a izquierda $\iff vfu$ es almost split minimal a izquierda.
5. f es almost split minimal a derecha $\iff vfu$ es almost split minimal a derecha.

Demostración.

1. Si f es una sección y $sf = Id_X$, $(u^{-1}sv^{-1})(vfu) = Id_{\tilde{X}}$. Análogamente si vfu es una sección y $\tilde{s}vfu = Id_{\tilde{X}}$, $\tilde{s} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$. Entonces $\tilde{s}vf = u^{-1} \implies u\tilde{s}vf = (u\tilde{s}v)f = Id_X$. 2 es similar.

3. Supongo f es irreducible. Luego vfu no es ni sección ni retracción por los dos puntos anteriores. Y si $vfu = \tilde{f}_2\tilde{f}_1$, $f = (v^{-1}\tilde{f}_2)(\tilde{f}_1u^{-1})$ donde o bien $v^{-1}\tilde{f}_2$ es una retracción por o bien \tilde{f}_1u^{-1} es una sección. Luego o bien \tilde{f}_2 es una retracción o bien \tilde{f}_1 es una sección. La vuelta es inmediata utilizando la ida con v^{-1} y u^{-1} .

4. Supongo f almost split minimal a izquierda. $vfu : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ no es una sección por 1. Para el segundo punto de la definición, sea $g : \tilde{X} \rightarrow U$ que no es una sección. Entonces $gu^{-1} : X \rightarrow U$ tampoco es una sección. Luego como f es almost split existe $g' : Y \rightarrow U$ tal que $g'f = gu^{-1}$. Luego $g'fu = g \iff (g'v^{-1})vfu = g$. Finalmente, falta ver que es minimal. Supongo que $hvf = vfu$. Luego $(v^{-1}hv)f = f$. Entonces $v^{-1}hv$ es un iso y como v es un iso, h también. La vuelta es inmediata usando la ida, y el punto 5 es completamente análogo. □

Lema 5.11. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo irreducible. Entonces f es un monomorfismo o un epimorfismo pero no ambos.

Demostración. Que no puede ser ambos al mismo tiempo es claro porque no puede ser un iso pues sería una sección. Veamos que alguno tiene que ser: Supongo que f no es sobreyectivo. Entonces $f = i_{\text{Im}(f)} \circ \tilde{f}$, con \tilde{f} la corestricción de f . Luego o i es una retracción o \tilde{f} es una sección. i no es una retracción pues entonces sería sobreyectiva y entonces $\text{Im}(f) = Y$. Entonces \tilde{f} es una sección y por lo tanto f es inyectiva. \square

Proposición 5.12. 1. Sea P proyectivo, indescomponible y no simple. Entonces $i : \text{Rad } P \hookrightarrow P$ es irreducible.

2. Sea I inyectivo, indescomponible y no simple. Entonces $\pi : I \rightarrow \frac{I}{\text{Soc } I}$ es irreducible.

Demostración.

1. Supongo que P no es simple. Entonces $\text{Rad } P \neq 0$ pues si lo fuera, P sería semisimple e indescomponible, i.e., simple. i no es sección pues P es indescomponible y $\text{Rad } P \neq 0$. Tampoco es retracción pues no es sobreyectiva. Supongo

Entonces tengo que se factoriza vía \tilde{i}_2 :

$$\begin{array}{ccc} \text{Rad } P & \xrightarrow{i} & P \\ & \searrow i_1 & \nearrow i_2 \\ & Z & \end{array} \quad \text{conmuta. Si } i_2 \text{ es sobreyectivo entonces es una retracción pues } P \text{ es proyectivo. Si } i_2 \text{ no es sobreyectivo, } \text{Im}(i_2) \subseteq \text{Rad } P.$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Rad } P & \xrightarrow{Id} & \text{Rad } P & \xrightarrow{i} & P \\ & \searrow i_1 & \nearrow \tilde{i}_2 & \nearrow i & \\ & Z & & & \end{array} \quad \text{Entonces } \tilde{i}_2 i_1 = id_{\text{Rad } P}.$$

Luego i_1 es una sección.

2. Análogo. \square

Damos una definición equivalente de morfismo irreducible:

Lema 5.13. X e Y indescomponibles. $f : X \rightarrow Y$ es irreducible $\iff f \in \text{Rad}(X, Y) - \text{Rad}^2(X, Y)$.

Demostración.

\implies) Como X e Y son indescomponibles, por el lema 4.26, $\text{Rad}(X, Y) = \{g : X \rightarrow Y : g \text{ no es una sección ni una retracción}\}$. Como f es irreducible, $f \in \text{Rad}(X, Y)$.

Supongo que $f \in \text{Rad}^2(X, Y)$, i.e. $f = gh$ con $g \in \text{Rad}(Z, Y)$ y $h \in \text{Rad}(X, Z)$. Entonces, como f es irreducible, g es retracción o h es sección. Si g es retracción, existe r tal que $gr = Id_Y$. Como $g \in \text{Rad}(Z, Y)$ y Rad es un ideal, $Id_Y \in \text{Rad}(Y, Y)$, entonces $Y = 0$, absurdo. Luego g no es retracción. Por lo tanto h es sección. Pero análogamente existe s tal que $sh = Id_X$. Como $h \in \text{Rad}$, $Id_X \in \text{Rad}(X, X)$. Luego $X = 0$, absurdo. Por lo tanto $f \in \text{Rad}^2$.

\impliedby) Como $f \in \text{Rad}(X, Y)$ y X e Y son indescomponibles, f no es ni sección ni retracción. Y si $f = gh$, con $h : X \rightarrow Z$, $g : Z \rightarrow Y$, no puedo utilizar inmediatamente la caracterización del Rad del lema 4.26 pues Z puede no ser indescomponible.

Si supongo que ni g es una retracción ni h una sección, y escribo $Z = \bigoplus_k Z_k$, con Z_k indescomponibles, $g = \sum g_k P_k$ con $g_k : Z_k \rightarrow Y$. Afirmando que $g_k \in \text{Rad}(Z_k, Y) \forall k$. En efecto, como Z_k e Y son indescomponibles puedo usar la equivalencia de 4.26. Si alguno fuera una retracción existiría $r : Y \rightarrow Z_{k_0}$ tal que $g_{k_0} r = Id_Y$. Sea $\tilde{r} = i_{k_0} r : Y \rightarrow Z$. Entonces $g \tilde{r} = (\sum g_k P_k) i_{k_0} r = \sum g_k P_k i_{k_0} r = g_{k_0} P_{k_0} i_{k_0} r = g_{k_0} r = Id_Y$ lo que contradice que g no es una retracción. Por lo tanto $g_k \in \text{Rad}(Z_k, Y) \forall k$, entonces $g_k P_k \in \text{Rad}(Z, Y) \forall k$, luego $g \in \text{Rad}(Z, Y)$. Análogamente, como h no es sección, $h \in \text{Rad}(X, Z)$. Luego $f \in \text{Rad}^2(X, Y)$, contradice la hipótesis. Luego g es una retracción o h es una sección. \square

Queremos demostrar que una sucesión exacta corta almost split es lo mismo que una con morfismos irreducibles y extremos indescomponibles. Para eso necesitamos algunos lemas:

Lema 5.14. *Sea*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta que no se parte. Entonces son equivalentes:

1. f es irreducible si y sólo si para todo $v : V \rightarrow N$ existe v_1 tal que $\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & N \\ v_1 \uparrow & \nearrow v & \\ V & & \end{array}$ o existe v_2

$$\text{tal que } \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & N \\ v_2 \downarrow & \nearrow v & \\ V & & \end{array}$$

2. g es irreducible si y sólo si para todo $u : L \rightarrow U$ existe u_1 tal que $\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ & \searrow u & \downarrow u_1 \\ & & U \end{array}$ o existe u_2

$$\text{tal que } \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ & \searrow u & \uparrow u_2 \\ & & U \end{array}$$

Demostración. Sólo demostraremos 1. Supongo f irreducible. Sea $v : V \rightarrow N$. Como tengo dos flechas que llegan a N , tiene sentido usar el pull back de M y V : recordar que por el teorema 1.33 tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & X & \xrightarrow{\pi_2} & V \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow v \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Por lo tanto $f = \pi_1 f'$ y como f es irreducible, π_1 es retracción o f' es sección. Si f' es sección, eso es equivalente a que π_2 sea retracción. Luego existe $r : V \rightarrow X$ tal que $\pi_2 r = Id_V$. Por lo tanto si tomo $v_1 := \pi_1 r$, $g(\pi_1 r) = (g\pi_1)r = (v\pi_2)r = v$. Y si π_1 es retracción, existe $r : M \rightarrow X$ tal que $\pi_1 r = Id_M$. Luego tomo $v_2 := \pi_2 r$, $v\pi_2 r = g\pi_1 r = g$.

Supongo ahora que vale la vuelta. f no es una sección pues la secuencia no se parte, tampoco es una retracción, pues no es sobreyectiva (si lo fuera $N = 0$ y g sería una retracción). Supongo

ahora $f = \beta\alpha$, $\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ \alpha \searrow & & \nearrow \beta \\ & \tilde{N} & \end{array}$ Entonces α es inyectiva pues f lo es, luego tengo un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{N} & \xrightarrow{\pi} & Coker(\alpha) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Entonces por la caracterización del pull back del teorema 1.33, \tilde{N} con π y β es el pull back de $Coker(\alpha) \xrightarrow{h} N$ y $M \xrightarrow{g} N$.

Por hipótesis existe $v_1 : Coker(\alpha) \rightarrow M$ tal que $gv_1 = h$ o $v_2 : M \rightarrow Coker(\alpha)$ tal que $hv_2 =$

g . En el primer caso, si existe tal v_1 , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Coker(\alpha) & \xrightarrow{Id} & Coker(\alpha) \\ v_1 \downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

por definición de v_1 y por la universalidad del pull back existe un morfismo $\psi : \text{coker}(\alpha) \rightarrow \tilde{N}$ tal que $\pi\psi = Id$ y $\beta\psi = v_1$. Luego $0 \rightarrow L \xrightarrow{\alpha} \tilde{N} \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(\alpha) \rightarrow 0$ se parte, por lo tanto α es una sección.

En el segundo caso, si existe v_2 tal que $hv_2 = g$,
$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{v_2} & \text{Coker}(\alpha) \\ Id \downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$
 conmuta. Luego existe $\psi : M \rightarrow \tilde{N}$ tal que $\pi\psi = v_2$ y $\beta\psi = Id$. Por lo tanto β es una retracción. \square

Lema 5.15. 1. Si $f : M \rightarrow N$ es irreducible inyectivo entonces f no es sobreyectivo y $\text{Coker}(f)$ es indescomponible.

2. Si $g : M \rightarrow N$ es irreducible sobreyectivo, entonces g no es inyectivo y $\text{Ker}(g)$ es indescomponible.

Demostración. Demostraremos 1. Que f no puede ser sobreyectivo ya lo vimos en el lema 5.11. Supongo que $\text{Coker}(f) = L_1 \oplus L_2$ con $L_k \neq 0$, $k = 1, 2$.

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(f) \rightarrow 0$$

no se parte pues f no es sección. Entonces para $k = 1, 2$, tengo el morfismo $L_k \xrightarrow{\text{inc}_k} \text{Coker}(f)$. Luego por el teorema anterior, para cada k , existe $v_k : N \rightarrow L_k$ tal que $\text{inc}_k \circ v_k = \pi$, o existe $v_k : L_k \rightarrow N$ tal que $\pi \circ v_k = \text{inc}_k$. Si estamos en el primer caso y $v_k : N \rightarrow L_k$, entonces el otro sumando directo $L_{k'}$ es cero. En efecto, si $\bar{a} \in L_{k'}$, con $a \in N$, $\text{inc}_k v_k(a) = \bar{a} \in L_{k'}$. Pero $\text{inc}_k(v_k(a)) \in L_k$ entonces $\bar{a} = 0$, luego $L_{k'} = 0$. Puedo asumir entonces que v_k va de L_k en N y $\pi v_k = \text{inc}_k$. Entonces π es una retracción con $r = v_1 + v_2 : L_1 \oplus L_2 \rightarrow N$: $\pi \circ (v_1 + v_2) = Id_{\text{Coker}(f)}$ y por lo tanto la sucesión se parte, contradicción. \square

Veamos ahora la relación entre morfismos almost split y morfismos irreducibles:

Proposición 5.16. Sea $g : M \rightarrow N$ un morfismo no nulo minimal a derecha almost split. Entonces:

1. g es irreducible

2. Un morfismo $g' : M' \rightarrow N$ es irreducible $\iff M' \neq 0$, y existe $M'' \in \text{Mod}_A$, un isomorfismo $\psi : M \rightarrow M' \oplus M''$ y un morfismo $g'' : M'' \rightarrow N$ tal que

$$(g', g'') : M' \oplus M'' \rightarrow N$$

es un morfismo minimal almost split a derecha y $(g', g'') \circ \psi = g$.

Demostración. 1. g es irreducible: g no es retracción por hipótesis. Tampoco es sección pues entonces N se descompondría como $\text{Im}(g) \oplus \text{Ker}(s)$ ($sg = Id_M$) con $\text{Im}(g) \neq 0$. Pero también $\text{Ker}(s) \neq 0$ pues si fuera cero, s sería un isomorfismo, y por lo tanto g también lo que implicaría que sería una retracción. Luego $\text{Ker}(s) \neq 0$ y entonces N no sería indescomponible, lo que contradice la proposición 5.3.

Finalmente, supongamos $g = g_2 g_1$. $g_1 : M \rightarrow Z$, $g_2 : Z \rightarrow N$. Supongo que g_2 no es una retracción. Entonces por hipótesis existe $g' : Z \rightarrow M$ tal que $gg' = g_2$ Precomponiendo con g_1 , $gg'g_1 = g_2 g_1 = g$, y como g es minimal $g'g_1$ es un iso. Luego existe un φ tal que $\varphi g'g_1 = Id_M$, por lo tanto g_1 es una sección.

2. Supongo ahora $g' : M' \rightarrow N$ es irreducible. Ya sabemos que $M' \neq 0$. Luego como g es almost split a derecha existe $v : M' \rightarrow M$ tal que $gv = g'$. Como g' es irreducible, v es sección (g no es retracción por hipótesis). Luego existe $s : M \rightarrow M'$ tal que $sv = Id_{M'}$. Por lo tanto $M = \text{Im}(v) \oplus \text{Ker}(s)$. Luego si defino $M'' := \text{Ker}(s)$ tengo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\text{Im}(v) \oplus \text{Ker}(s) & \xrightarrow{g} & N \\
v \oplus Id \uparrow \cong & & \nearrow \\
M' \oplus M'' & \xrightarrow{(g', g|_{\text{Ker}(s)})} &
\end{array}$$

Como $v \oplus Id$ es un iso y g es almost split minimal a derecha, $(g', g|_{\text{Ker}(s)})$ es almost split minimal a derecha por el lema 5.10.

Supongo ahora que (g', g'') es almost split minimal a derecha. Veamos que g' es irreducible. g' no es retracción: Si lo fuera existe $g'r = Id_N$, con $r : N \rightarrow M'$. Defino $\tilde{r} : N \rightarrow M' \oplus M''$, como $\tilde{r} = (r, 0)$. Entonces $(g', g'') \circ \tilde{r} = (g', g'') \circ (r, 0) = g' \circ r + g'' \circ 0 = g'r = Id_N$. Luego \tilde{r} es una retracción para (g', g'') , lo que contradice que sea almost split.

$g' : M' \rightarrow N$ no es sección, si lo fuera existiría N sería descomponible, lo que contradice que (g', g'') es almost split minimal a derecha (prop. 5.3)

Finalmente, supongo que $g' = \beta\alpha$, $\alpha : M' \rightarrow Z$ y $\beta : Z \rightarrow N$. Supongo que β no es una retracción. Quiero ver que α es una sección. La idea de la demostración es usar la parte del teorema que ya demostramos: que almost split minimal a derecha implica irreducible. La usaremos para la única función que sabemos que lo es: (g', g'') . Para eso, primero debemos escribir a (g', g'') como una composición. Eso no es muy difícil: si defino

$$\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Id_{M''} \end{bmatrix} : M' \oplus M'' & \longrightarrow & Z \oplus M'' & (\beta, g'') : Z \oplus M'' & \longrightarrow & N \\
(a, b) & \longrightarrow & (\alpha(a), b) & (z, m) & \longrightarrow & \beta(z) + g''(m)
\end{array}$$

$$\text{Entonces } (\beta, g'') \circ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Id_{M''} \end{bmatrix} = (\beta\alpha, g''Id_{M''}) = (g', g'')$$

Luego como (g', g'') es almost split minimal a derecha, es irreducible, y por lo tanto o (β, g'') debe ser retracción, o la matriz debe ser sección. Si vale la última posibilidad ya estamos, porque una sección de la matriz va a implicar una sección de α . Veamos entonces que (β, g'') no es una retracción. Sabemos que individualmente β no es una retracción por hipótesis y g'' tampoco puede ser una retracción: si lo fuera existiría r tal que $g''r = Id_N$. Entonces $(g', g'') \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} = 0 + g''r = Id_N$ y luego (g', g'') sería una retracción.

Por lo tanto ni β ni g'' son retracciones. Pero recordando el lema 4.26, como N es indescomponible, eso es equivalente a que $\beta \in \text{Rad}(Z, N)$ y $g'' \in \text{Rad}(M'', N)$. Luego $\beta P_1 \in \text{Rad}(Z \oplus M'', N)$ y $g'' P_2 \in \text{Rad}(Z \oplus M'', N)$. Entonces $\beta P_1 + g'' P_2 = (\beta, g'') \in \text{Rad}(Z \oplus M'', N)$.

Y por lo tanto no es una retracción. Luego la matriz es una sección, es decir existe $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$

$$\text{tal que } \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Id_{M''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}\alpha & g_{22} \\ g_{21}\alpha & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{M'} & 0 \\ 0 & Id_{M''} \end{bmatrix}.$$

Entonces $g_{11}\alpha = Id_{M'}$ y por lo tanto α es una sección. □

Análogamente para morfismos almost split a derecha:

Proposición 5.17. *Sea $f : L \rightarrow M$ un morfismo no nulo, almost split minimal a izquierda. Entonces:*

1. f es irreducible.
2. Un morfismo $f' : L \rightarrow M'$ es irreducible $\iff M' \neq 0$, y existe $M'' \in \text{Mod}_A$, un isomorfismo $\psi : M \rightarrow M' \oplus M''$ y un morfismo $f'' : L \rightarrow M''$ tal que

$$\begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix} : L \rightarrow M' \oplus M''$$

es un morfismo minimal almost split a izquierda y $\psi \circ f = \begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix}$

Lema 5.18. *Sea*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagrama conmutativo con las filas exactas y que no se parten. Entonces:

1. Si L es indescomponible y w es un iso, entonces u y v son isomorfismos.
2. Si N es indescomponible y u es un iso, entonces v y w son un iso.

Demostración. 1. Veamos que u es un iso. Supongo que no lo es, entonces como L es indescomponible, por el lema 4.26, $u \in \text{Rad}(L, L)$. Como $\text{Rad}(L, L)$ es nilpotente, existe m tal que $u^m = 0$. Luego $v^m f = v^{m-1} v f = v^{m-1} f u = \dots = f u^m = 0$. Entonces $v^m|_{\text{Ker}(g)} = 0$ Luego existe un morfismo $\widetilde{v}^m : \frac{M}{\text{Ker}(g)} \rightarrow M$. Componiendo con el iso $\widetilde{g}^{-1} : N \rightarrow \frac{M}{\text{Ker}(g)}$, tenemos una flecha $\widetilde{v}^m \circ \widetilde{g}^{-1} : N \rightarrow M$. Luego $\widetilde{v}^m \widetilde{g}^{-1} g = \widetilde{v}^m \pi = v^m$. Sea $h := \widetilde{v}^m \widetilde{g}^{-1} : N \rightarrow M$. Entonces $hg = v^m$. Luego $ghg = gv^m = w^m g$. Y como g es sobreyectiva, $gh = w^m$. Como w es iso, w^m también. Luego existe ψ tal que $w^m \psi = \text{Id}_N$. Luego $gh\psi = w^m \psi = \text{Id}_N$. Por lo tanto g es una retracción, contradicción. Luego u es un iso y por lo tanto v también.

2. Ejercicio. □

Veamos finalmente la unicidad de las sucesiones exactas almost split:

Teorema 5.19. *Sean*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow L' \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N' \rightarrow 0$$

dos sucesiones exactas almost split. Entonces son equivalentes:

1. Las sucesiones exactas son isomorfas.
2. L y L' son isomorfas.
3. N y N' son isomorfas.

Demostración. Vamos a demostrar 1 si y sólo si 2. Que 1 implica 2 es obvio. Supongo que $L \cong L'$. Puedo suponer que $L = L'$. Luego tengo un diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow u & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como $f' : L \rightarrow M'$ es almost split a izquierda y f no es sección, existe $u' : M' \rightarrow M$ tal que $u'f' = f$. Luego $uu'f' = uf = f'$. Entonces como f' es minimal, uu' es un iso. Análogamente como $uf = f'$, $u'uf = u'f' = f$. Entonces $u'u$ es un iso. Por lo tanto u es un iso. Luego v también lo es. Por lo tanto 2 implica 1. Análogamente $1 \leftrightarrow 3$. \square

Con la teoría sobre morfismos irreducibles desarrollada, podemos demostrar que varias definiciones alternativas de sucesiones exactas cortas almost split son equivalentes:

Teorema 5.20. *Sea $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta. Entonces son equivalentes:*

1. $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ es almost split.
2. L es indescomponible y g es almost split a derecha.
3. N es indescomponible y f es almost split a izquierda.
4. f es almost split minimal a izquierda.
5. g es almost split minimal a derecha.
6. L y N son indescomponibles y f y g son irreducibles.

Demostración. Demostremos $1 \leftrightarrow 2$. Si vale 1, por la proposición 5.3 y definición de sucesión almost split, vale 2. Supongo vale 2. Veamos primero que g es minimal: Supongo existe $h : M \rightarrow M$ tal que $gh = g$. Entonces $hf \subseteq \text{Im}(f)$ pues $ghf = gf = 0$. Entonces existe $u : L \rightarrow L$ tal que $fu = hf$. Luego el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow h & & \downarrow Id & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por el lema 5.18, como L es indescomponible, h es un isomorfismo. Entonces g es almost split minimal. En particular es irreducible.

Demostremos ahora que f es almost split minimal a izquierda. f no es una sección pues la sucesión no se parte. Sea ahora $u : L \rightarrow U$ que no es una sección. Puedo usar el lema 5.14 parte 2 pues g es irreducible y la sucesión no se parte. Entonces existe u_1 tal que $u_1f = u$ o u_2 tal que $f = u_2u$. Si existe u_1 listo, f es almost split. Si existe $u_2 : U \rightarrow M$, considero la sucesión exacta corta que no se parte

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} U \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(u) \rightarrow 0$$

. Entonces puedo completar el siguiente diagrama con un h

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & Id \uparrow & & u_2 \uparrow & & h \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & U & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker}(u) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con la formula $h(\pi(x)) = g(u_2(x))$. Entonces como g es almost split existe $v' : \text{Coker}(u) \rightarrow M$ tal que $gv' = h$. Entonces $gv'\pi = h\pi = gu_2$. Luego $g(u_2 - v'\pi) = 0$ Por lo tanto $u_2 - v'\pi \subseteq \text{Im}(f)$. Entonces existe $\xi : U \rightarrow L$ tal que $f\xi = u_2 - v'\pi$. Entonces $f\xi u = u_2u - v'\pi u = u_2u = f$. Entonces como f es inyectiva, $\xi u = Id_L$. Por lo tanto u es una sección, contradicción. Luego estoy en el primer caso, existe u_1 tal que $u_1f = u$ y por lo tanto f es almost split.

Finalmente, f es minimal: supongo existe $h : M \rightarrow M$ tal que $hf = f$. Además N es indescomponible por proposición 5.3. Puedo completar el siguiente diagrama con un morfismo $T : N \rightarrow N$ tal que el rectángulo conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow Id & & \downarrow h & & \downarrow T \\
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0
\end{array}$$

Como N es indescomponible, por el lema 5.18 h es un iso.

Luego $1 \leftrightarrow 2$. Análogamente $1 \leftrightarrow 3$. Luego $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$. Veamos $3 \leftrightarrow 4$. $3 \rightarrow 4$ es obvio. Supongo vale 4. Entonces f es almost split a izquierda y sólo resta ver que N es indescomponible. Pero por la proposición 5.17 f es irreducible. Entonces su $Coker(f)$ es indescomponible por lema 5.15. Pero $Coker(f) \cong L$. Entonces N es indescomponible. Luego $3 \leftrightarrow 4$. Análogamente $2 \leftrightarrow 5$. Por lo tanto $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5$.

Finalmente, veamos $\{1, 2, 3, 4, 5\} \leftrightarrow 6$. Claramente 1 implica 6 por las proposiciones 5.16 y 5.17 y el lema 5.15. Supongo 6. Voy a probar que 6 implica 3. Para eso hay que ver la segunda condición de ser almost split a izquierda para f . Sea $u : L \rightarrow U$ que no es sección. Si U , no es indescomponible, se escribe como $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, y tengo morfismos $u_i : L \rightarrow U_i$ tal que u se escribe $u = \sum u_i$, y además u_i no es sección para ningún i (si lo fuera, existiría $s_i : U_i \rightarrow L$ tal que $s_i u_i = Id_L$, entonces $0 + \cdots + s_i + \cdots + 0 : U \rightarrow L$ es una sección de u : $(0 + \cdots + s_i + \cdots + 0) \circ u = s_i \circ u_i = Id_L$). Entonces por lema 5.14 parte 2, para cada i existe $u_1^i : M \rightarrow U_i$ tal que $u_1^i f = u_i$ o existe $u_2^i : U_i \rightarrow M$ tal que $u_2^i u_i = f$. Si para todo i existe ese tal u_1^i listo, pues tomo $(u_1^1, \cdots, u_1^n) : M \rightarrow U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ y entonces $(u_1^1, \cdots, u_1^n) \circ f = \sum u_1^i f = \sum u_i = u$. Luego el morfismo (u_1^1, \cdots, u_1^n) me sirve para demostrar que f es almost split a izquierda.

Supongo que para un i_0 existe $u_2^{i_0}$ tal que $f = u_2^{i_0} u_{i_0}$, con $u_{i_0} : L \rightarrow U_{i_0}$ y $u_2^{i_0} : U_{i_0} \rightarrow M$. Entonces como f es irreducible, o bien u_{i_0} es sección, o $u_2^{i_0}$ es retracción. Como vimos antes, u_{i_0} no es sección, por lo tanto $u_2^{i_0} : U_{i_0} \rightarrow M$ es retracción. Pero entonces $U_{i_0} = Ker(u_2^{i_0}) \oplus M$ Como U_{i_0} es indescomponible, $Ker(u_2^{i_0}) = 0$, luego $u_2^{i_0}$ es inyectiva y entonces es un iso. Entonces existe $\xi_{i_0} : M \rightarrow U_{i_0}$ tal que $\xi_{i_0} f = u_{i_0}$

Por lo tanto, en todos los casos existe u_1^i tal que $u_1^i f = u_i$. Luego me puedo construir un $u' : M \rightarrow U$ tal que $u' \circ f = u$. Por lo tanto f es almost split a izquierda. Luego $6 \rightarrow 3$. \square

5.3 Quiver de Auslander Reiten

Con la teoría desarrollada podemos finalmente definir el quiver de Auslander Reiten para el caso k un cuerpo algebraicamente cerrado:

Definición 5.21. Sea A una k -álgebra de dimensión finita. El **quiver de Auslander Reiten** tiene como vértices a las clases de isomorfismos de A módulos indescomponibles, $Q_0 = \{\bar{X} : X \text{ es indescomponible}\}$ y entre dos módulos indescomponibles X e Y no isomorfos, la cantidad de flechas es igual a la dimensión sobre k de $\frac{Rad(X,Y)}{Rad^2(X,Y)}$.

Observacion 5.22. La definición se puede extender al caso de k no algebraicamente cerrado. La principal diferencia es que si k es algebraicamente cerrado, entonces $\frac{End(X)}{Rad(X)}$ es k si X es indescomponible. Si k no es algebraicamente cerrado, $F_X := \frac{End(X)}{Rad(X)}$ es un álgebra de división (de dimensión finita) sobre k . Entonces si defino $Irr(X,Y) := \frac{Rad(X,Y)}{Rad^2(X,Y)}$, $Irr(X,Y)$ es un k -espacio vectorial, pero más aún, es un $F_Y - F_X$ bimódulo con la estructura

$$\bar{h} \cdot [f] \cdot \bar{g} := [hfg]$$

donde $[-]$ representa la clase de una función en $Irr(X, Y)$ (es decir, módulo $\text{Rad}^2(X, Y)$) y $\bar{*}$ representa la clase de una función en F_X o F_Y (dependiendo si a izquierda o derecha).

Esta estructura está bien definida, y le da a $Irr(X, Y)$ una estructura de "espacio vectorial" a izquierda sobre el álgebra de división F_Y y a derecha sobre el álgebra de división F_X . La mayor parte del álgebra lineal (como el concepto de dimensión, existencia de bases, etcétera) vale para "espacios vectoriales" sobre álgebras de división de dimensión finita.

Además de su definición, el quiver AR tiene una estructura adicional que es la traslación τ . En general, si podemos, escribimos a los morfismos irreducibles entre representaciones diagonalmente en columnas distintas, y a las irreducibles trasladadas por τ en la misma fila, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tau Y & \xleftarrow{\tau} & & & Y \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & X & & \\
 & & & \xrightarrow{\tau^{-1}} & \tau^{-1} X
 \end{array}$$

Sabemos que los proyectivos son trasladados a la izquierda a cero por τ pues $\tau P = 0$. Pero eso no significa que no reciba flechas irreducibles.

Lema 5.23. *Sea P proyectivo indescomponible no simple, X indescomponible. Entonces existe un morfismo $f : X \rightarrow P$ irreducible si y sólo si X es un sumando directo de $\text{Rad } P$*

Demostración. Si $f : X \rightarrow P$ es irreducible no nulo, por 5.16 existe X' y f' tal que $(f, f') : X \oplus X' \rightarrow P$ es almost split minimal a derecha. Pero por 5.5 $i : \text{Rad } P \hookrightarrow P$ es almost split minimal a derecha. Por la unicidad de los morfismos almost split minimales, $X \oplus X' \cong \text{Rad } P$. Esto me dice que si P es simple, $\text{Rad } P = 0$, Entonces $X = 0$, y por lo tanto no existe ningún morfismo irreducible no nulo que llegue a P .

Por otra parte, si X es un sumando directo de $\text{Rad } P$, demostremos que $i \circ j_X$ con $j_X : X \hookrightarrow \text{Rad } P$, $i : \text{Rad } P \hookrightarrow P$ las inclusiones, es irreducible. Que $ij_X \in \text{Rad}(X, P)$ es obvio pues $i \in \text{Rad}$ ya que es irreducible, pues P no es simple. Supongamos $ij_X = \beta\alpha$, $\beta : Z \rightarrow P$, $\alpha, \beta \in \text{Rad}$. β no puede ser sobre, pues como P es proyectivo, sería una retracción. Entonces $\text{Im}(\beta) \subseteq \text{Rad } P$. Luego $\beta = i\tilde{\beta}$ Entonces $ij_X = i\tilde{\beta}\alpha$. Como i es inyectiva, $j_X = \tilde{\beta}\alpha$. Pero entonces $j_X \in \text{Rad}$ pues $\alpha \in \text{Rad}$. Contradicción pues j_X es sección. \square

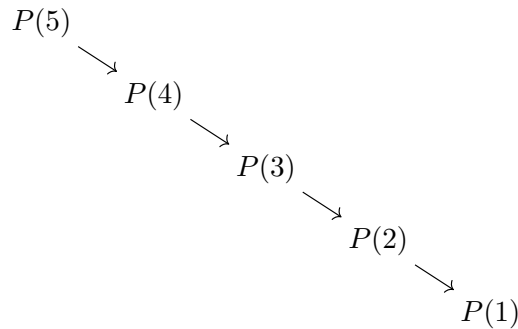
El lema me dice que para construir el quiver AR basta con empezar con los proyectivos, hallar sus radicales y los sumandos directos de estos, y dibujar una flecha de cada sumando directo al proyectivo que los contiene, y luego ir completando el quiver hacia la derecha hallando la traslación τ^{-1}

Antes de dar ejemplos, enunciemos sin demostración un teorema sobre la cantidad de flechas en el quiver AR :

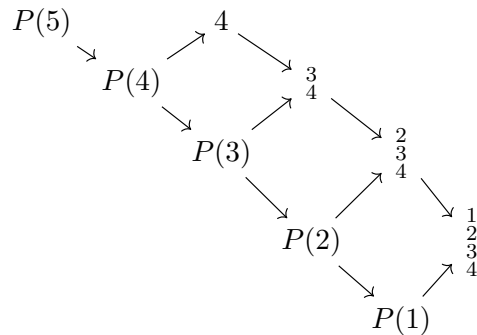
Teorema 5.24. *Sea A un álgebra de dimensión finita que además tiene tipo de representación finita (es decir, existen finitos módulos indescomponibles no isomorfos, i.e., el quiver AR tiene finitos vértices) con k un cuerpo algebraicamente cerrado y X e Y indescomponibles. Entonces si existe $f : X \rightarrow Y$ irreducible, $\dim_k \left(\frac{\text{Rad}(X, Y)}{\text{Rad}^2(X, Y)} \right) = 1$*

Esto me dice que en el caso de que A sea de representación finita (por ejemplo, si A es el álgebra de caminos de un quiver de tipo $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n$ o $\mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$), el quiver AR no tiene múltiples flechas entre dos vértices.

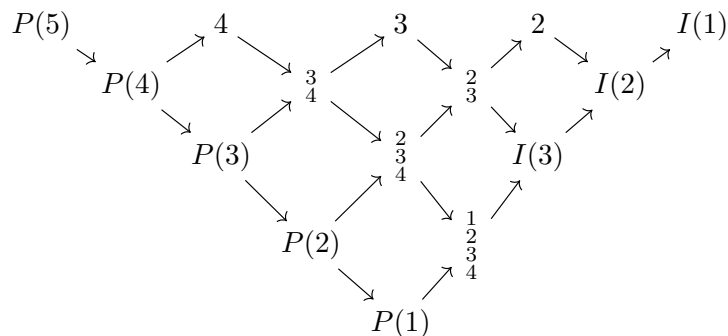
Ejemplo 5.25. Sea $Q = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ Entonces $\text{Rad } P(i) = P(i+1) \forall i \leq 4$ y $P(5) = 5$ es simple. Luego tenemos



Para seguir, tenemos dos opciones: una es calcular a mano $\tau^{-1}P(5)$ usando por ejemplo el funtor inverso de Nakayama: Una resolución inyectiva de $P(5)$ es $0 \rightarrow P(5) \rightarrow I(5) \rightarrow I(4) \rightarrow 0$, y aplicando el funtor de Nakayama ν^{-1} tenemos $0 \rightarrow 0 \rightarrow \nu^{-1}I(5) = P(5) \rightarrow \nu^{-1}I(4) = P(4) \rightarrow \tau^{-1}P(5) \rightarrow 0$. Luego calculando dimensiones, $\tau^{-1}P(5) = 4$. Análogamente, $\tau^{-1}P(4) = \frac{3}{4}$, $\tau^{-1}P(3) = \frac{2}{3}$ y así con todos los proyectivos indescomponibles:



Continuando con la construcción llegamos a los inyectivos:



Otra forma es usar el algoritmo de tejido (*knitting algorithm*) que me permite calcular $\tau^{-1}M$ conociendo M y todos los módulos intermedios en la grilla del quiver AR . Para calcular $\tau^{-1}M$ simplemente sumo los vectores dimensión de los módulos intermedios (que son los que reciben un morfismo irreducible de M) y le resto el vector dimensión de M . Así por ejemplo $\underline{\dim} \tau^{-1}P(5) = \underline{\dim} P(4) - \underline{\dim} P(5) = 4$, y una vez que tengo ese vector dimensión, procedo hacia diagonalmente hacia abajo a la derecha y calculo $\underline{\dim} \tau^{-1}P(4) = \underline{\dim} P(3) + 4 - \underline{\dim} P(4) = \frac{3}{4} + 4 - \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$

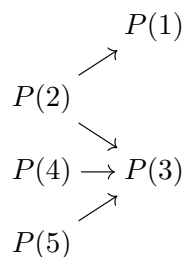
Notar que este método sólo me calcula el vector dimensión de la representación, pero en el caso de quivers del tipo Dynkin, una representación queda unívocamente determinada por su vector dimensión, como ya veremos con el teorema de Gabriel.

Una pregunta que podríamos hacernos es si esas son efectivamente todas las representaciones. En el caso de un álgebra de representación finita la respuesta es positiva. En efecto, veamos que toda representación M indescomponible no proyectiva, es un $\tau^{-j}P$. La razón es que como es de representación finita y τ manda indescomponibles en indescomponibles, eventualmente para algún n debe suceder que $\tau^n M = \tau^{n+1} M$. Tomo n_0 el primer natural tal que sucede eso. Luego $\tau \tau^{n_0-1} M = \tau \tau^{n_0} M$. Si $\tau^{n_0-1} M$ y $\tau^{n_0} M$ no son proyectivos, por el teorema 4.19, $\tau^{n_0-1} M = \tau^{n_0} M$, lo que contradice la minimalidad de n_0 . Entonces alguno es proyectivo y por lo tanto existe i tal que $\tau^i M$ es proyectivo. Entonces efectivamente, todo módulo indescomponible no proyectivo se consigue como $\tau^{-i}(\tau^i M) \cong M$ (es decir, moviéndome a la derecha j veces con la traslación) de un proyectivo.

Ejemplo 5.26. Consideremos ahora un quiver de tipo \mathbb{D}_n , $Q = 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 5 \end{matrix}$

$$P(1) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad P(2) = 2 \quad P(3) = \begin{matrix} 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{matrix} \quad P(4) = 4 \quad P(5) = 5$$

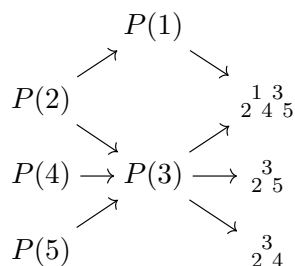
Entonces tenemos flechas



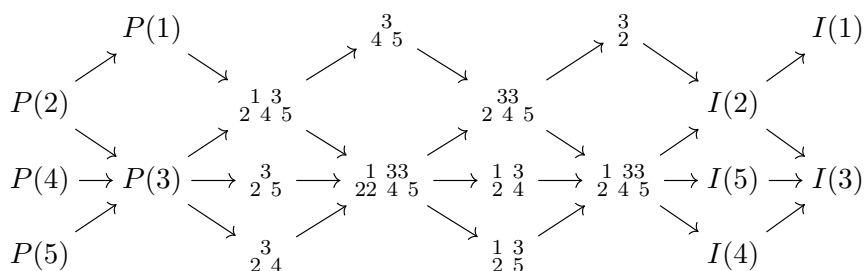
Usando el algoritmo de tejido $\tau^{-1}P(2) = \begin{matrix} 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{matrix} + \frac{1}{2} - 2 = \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{matrix}$ (Chequear que calculándolo a mano con el funtor de Nakayama nos da lo mismo)

Para calcular $\tau^{-1}P(4)$ sólo tenemos una representación intermedia ($P(3)$) entonces $\tau^{-1}P(4) = \begin{matrix} 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{matrix} - 4 = \begin{matrix} 3 \\ 2 & 5 \end{matrix}$. Finalmente $\tau^{-1}P(5) = \begin{matrix} 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}$.

Entonces



Completando el algoritmo de tejido obtengo...



Ejemplo 5.27. Incluso si Q no tiene relaciones, puede haber representaciones indescomponibles no isomorfas con el mismo vector dimensión. Veamos

$$Q = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$$

Calculemos primero los proyectivos, inyectivos, radicales y sócalos:

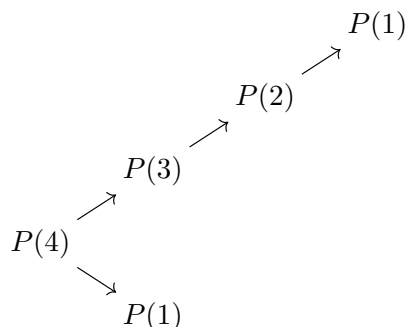
$$P(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{Rad } P(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \oplus 4 \quad I(1) = 1$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{Rad } P(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad I(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

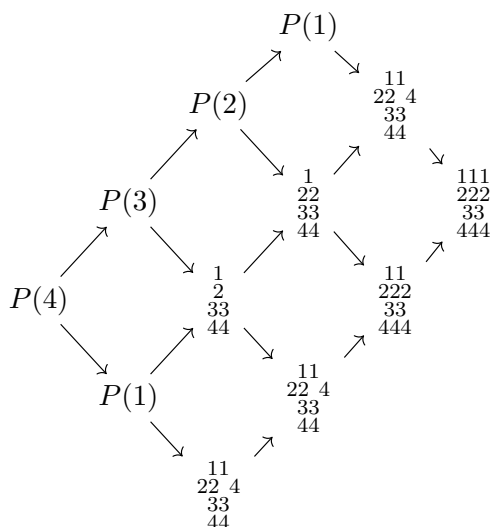
$$P(3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{Rad } P(3) = 4 \quad I(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P(4) = 4 \quad \text{Rad } P(4) = 0 \quad I(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Además el cálculo del sócalo es sencillo usando la dualidad: $\text{Soc } I(k) = D\text{Top } P(k) = DS(k) = S(k)$ Notar que $P(4)$ es un sumando directo del radical tanto de $P(1)$ como de $P(3)$. Entonces el comienzo del quiver es de la forma



donde identifico los dos $P(1)$. Calculo $\tau^{-1}P(4)$ y $\tau^{-1}P(3)$ y $\tau^{-1}P(2)$ en ese orden con el algoritmo de tejido, y luego finalmente $\tau^{-1}P(1)$ con el algoritmo de tejido:



Donde identifico las representaciones indescomponibles con el mismo vector dimensión.

¿Cómo sabemos que $P(1)$ no tiene otros indescomponibles distintos a $\tau^{-1}P(2)$ y $\tau^{-1}P(4)$ tal que existe $P(1) \rightarrow X$ irreducible? Para empezar, X no es proyectivo pues si lo fuera,

$P(1)$ sería un sumando directo de su radical, y ningún radical tiene a $P(1)$ como sumando directo. Entonces existe una sucesión exacta almost split $0 \rightarrow \tau X \rightarrow E \rightarrow X \rightarrow 0$. Y como $P(1) \rightarrow X$ es irreducible, existe K y una flecha tal que $P(1) \oplus K \rightarrow X$ es almost split minimal a derecha por la proposición 5.16. Luego por la unicidad de los morfismos almost split, tengo que $E = P(1) \oplus K$. Luego tengo una flecha almost split minimal a izquierda $\tau X \rightarrow P(1) \oplus K$. Entonces tengo una flecha $\tau X \rightarrow P(1)$ irreducible por la proposición 5.17. Pero entonces τX es un sumando directo del radical de $P(1)$, $\text{Rad } P(1) = P(2) \oplus P(4)$. Luego como X no es proyectivo, $X = \tau^{-1}\tau X = \tau^{-1}P(2)$ o $X = \tau^{-1}P(4)$.

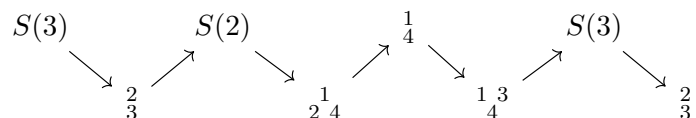
El quiver sigue hacia la derecha, y por los vectores dimensión vemos que es de tipo de representación infinita: existen infinitas representaciones indescomponibles no isomorfas.

Calculemos localmente la forma del quiver alrededor del vértice $S(3)$. Tomando $0 \rightarrow S(3) \rightarrow I(3) \rightarrow I(2) \rightarrow 0$ y luego aplicando ν^{-1} : $0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow \tau^{-1}S(3) \rightarrow 0$ vemos que $\tau^{-1}S(3) = 2$. Análogamente $\tau^{-2}S(3) = \tau^{-1}S(2) = \frac{1}{4}$ y $\tau^{-3}S(3) = S(3)$. Luego tenemos la situación que el quiver de Auslander Reiten localmente alrededor de $S(3)$ se ve como un tubo

$$S(3) \dashrightarrow S(2) \dashrightarrow \frac{1}{4} \dashrightarrow S(3)$$

donde identifico los dos extremos, y queremos hallar qué hay en el medio. Sabemos que como $S(3)$ no es inyectivo, existe una sucesión exacta almost split $0 \rightarrow S(3) \rightarrow E \rightarrow S(2) \rightarrow 0$. Por dimensión, la única posibilidad es $E = \frac{2}{3}$. Calculando con el funtor (inverso) de Nakayama tenemos $\tau^{-1}\frac{2}{3} = \frac{1}{4}$, $\tau^{-1}\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \frac{3}{4}$ y $\tau^{-1}\frac{1}{4} \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

Entonces tengo

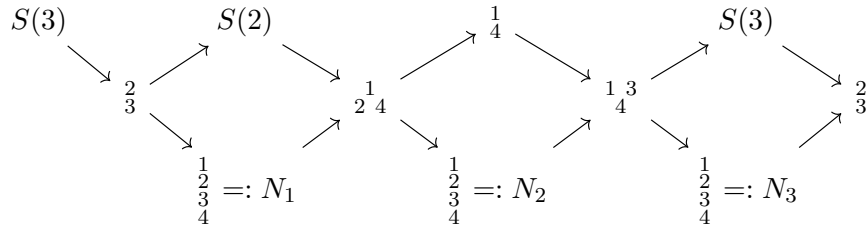


Comparando las dimensiones de los extremos en la sucesión exacta almost split $0 \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow E \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow 0$ concluimos que $E = S(2) \oplus N$ donde el vector dimensión de N es $(1, 1, 1, 1)$. ¿Puede ser que N sea la suma de dos (o tres) indescomponibles? N no puede tener un sumando directo proyectivo, pues todas las flechas que llegan a un proyectivo ya vimos que salen de un sumando directo del radical de ese proyectivo, pero $\frac{2}{3}$ no es el sumando directo de ningún proyectivo. Como N tiene un k en la coordenada 4, y la representación $P(4)$ no puede estar, necesito tener un $\frac{2}{4}$, un $\frac{3}{4}$, un $\frac{1}{4}$ o un $\frac{1}{4} \frac{3}{4}$ como sumando directo de N . Pero $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$ son proyectivos, entonces las únicas opciones son $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4} \frac{3}{4}$. Si fuera $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ o $2 \oplus 3$ deben ser el otro sumando directo de N . $\frac{2}{3}$ no puede ser, pues entonces el morfismo irreducible e inyectivo $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{4} \oplus \frac{2}{3}$ sería una sección. Entonces N sería $\frac{1}{4} \oplus 2 \oplus 3$. Pero no hay un morfismo inyectivo pues este diagrama debería conmutar:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & k & \xrightarrow{1} & k & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \lambda \neq 0 & & \downarrow \\
 k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{0} & k & \xrightarrow{0} & k \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & &
 \end{array}$$

pero el cuadrado del medio no lo hace. Entonces la única opción es $N = \frac{1}{4} \frac{3}{4}$. Con el funtor

de Nakayama, fácilmente se prueba que $\tau^{-1} \frac{1}{3} \frac{2}{4}$ tiene vector dimensión $(1, 1, 1, 1)$, y como es indescomponible, $\tau^{-1} \frac{1}{3} \frac{2}{4} = \frac{1}{3} \frac{2}{4}$. Así puedo completar como



donde identifico los extremos derechos e izquierdos. Afirmando que las representaciones N_1 , N_2 y N_3 son indescomponibles y no isomorfas. En efecto, recordemos que el Sócalo, Soc es un funtor exacto a izquierda, y por lo tanto lo podemos aplicar a las sucesiones exactas almost split

$$0 \longrightarrow \frac{2}{3} \longrightarrow S(2) \oplus N_1 \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{4} \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4} \oplus N_2 \longrightarrow \frac{1}{4} \frac{3}{4} \longrightarrow 0$$

No es difícil calcular los sócalos de las representaciones: $\text{Soc}(\frac{2}{3}) = 3$, $\text{Soc}(\frac{1}{2} \frac{1}{4}) = 2 \oplus 4$, $\text{Soc}(\frac{1}{4} \frac{3}{4}) = 4$ y $\text{Soc}(\frac{1}{4}) = 4$. Entonces tenemos las siguientes sucesiones exactas a izquierda:

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \oplus \text{Soc}(N_1) \longrightarrow 2 \oplus 4 \quad (1)$$

y

$$0 \longrightarrow 2 \oplus 4 \longrightarrow 4 \oplus \text{Soc}(N_2) \longrightarrow 4 \quad (2)$$

La sucesión (1) me dice que $S(3) \leq \text{Soc}(N_1)$ y la sucesión (2) me dice que $S(3) \not\leq \text{Soc}(N_2)$. Por lo tanto no pueden ser isomorfos. Análogamente para ver que N_2 y N_3 no son isomorfos.

5.4 Fórmulas de Auslander-Reiten

Presentamos dos fórmulas muy útiles a la hora de hacer cálculos con representaciones de quivers: las fórmulas de Auslander-Reiten. Estas fórmulas me permiten hallar el funtor Ext^1 conociendo el Hom y el funtor traslación τ . La fórmula involucra el producto tensorial (sobre A). Recordemos algunas de sus propiedades más importantes:

Proposición 5.28. *Sea A una k álgebra de dimensión finita y sean M un A módulo a derecha y N un A módulo a izquierda. Entonces:*

1. $M \otimes_A A \cong M$ Y $A \otimes_A N \cong N$
2. $M \otimes_A (N \oplus N') \cong (M \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A N')$ y $(M \oplus M') \otimes_A N \cong (M \otimes_A N) \oplus (M' \otimes_A N)$
3. (Adjunción) Si A y B son anillos, L un A módulo a derecha, M un $A - B$ bimódulo y N un B módulo a derecha, existe un isomorfismo natural k -espacios vectoriales

$$\text{Hom}_B(L \otimes_A M, N) \cong \text{Hom}_A(L, \text{Hom}_B(M, N))$$

Lema 5.29. Recordar que tenemos el funtor de Nakayama $\nu = DL^t$. Sea

$$\omega_M^L : D\text{Hom}_A(L, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, \nu L)$$

un funtor definido de la siguiente forma: Dado $\varphi : \text{Hom}_A(L, M) \rightarrow k$, entonces $\omega_M^L(\varphi)(m) \in \nu L = D\text{Hom}_A(L, A)$. Sea $f \in \text{Hom}_A(L, A)$. Defino

$$\omega_M^L(\varphi)(m)(f) := \varphi(m \cdot f)$$

donde $m \cdot f : L \rightarrow M$ es el morfismo $m \cdot f(l) = mf(l)$.

Entonces:

1. Si P es proyectivo entonces ω_M^P es un isomorfismo.

2. $\text{Ker}(\omega_M^L) \cong D\underline{\text{Hom}}_A(L, M)$

3. ω_M^- es natural.

Demostración.

1.a) Empecemos por probar que ω_M^P es sobreyectivo: Si P es proyectivo, $P = e_1A \oplus \cdots \oplus e_kA$, con $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$. Entonces existe $p : A \rightarrow P$ la proyección y $\iota : eA \rightarrow A$ la inclusión, morfismos de A módulos tal que $p \circ \iota = Id_P$.

Ahora, para probar que ω es sobre, tomo $\varrho \in \text{Hom}_A(M, DP^t)$ y defino $\xi \in D\text{Hom}_A(P, M)$ de la siguiente forma:

$$\xi(f) := \varrho(f(e))(\iota), \quad e := e_1 \cdot 1_A + \cdots + e_k \cdot 1_A$$

Afirmo que $\omega_M^P(\xi)(m)(h) = \varrho(m)(h)$:

$$\omega_M^P(\xi)(m)(h) = \xi(m \cdot h) = \varrho(mh(e))(\iota) = (\varrho(m) \cdot h(e))(\iota) = \varrho(m)(h(e)\iota)$$

Y finalmente $h(e)\iota = h$: En efecto, $h(e)\iota(ex) = h(e\iota(ex)) = h(eex) = h(ex)$. Luego $h(e)\iota = h$.

Luego

$$\omega_M^P(\xi)(m)(h) = \varrho(m)(h) \quad \forall h \quad \forall m$$

Entonces $\omega_M^P(\xi) = \varrho$. Luego ω_M^P es sobreyectivo,

b) Y además es inyectivo: Si tomo $\varphi \in D\text{Hom}_A(P, M)$ y supongo que $\varphi(m \cdot f) = 0 \quad \forall m, f$, entonces $\varphi(\xi) = 0 \quad \forall \xi : P \rightarrow M$. En efecto, si $P = e_1A \oplus \cdots \oplus e_kA$, entonces $\xi = \sum m_j \cdot f_j$ donde $m_j = \xi(e_j)$ y $f_j = inc_j \circ P_j$ con $P_j : P \rightarrow e_jA$ la proyección e $inc_j : e_jA \rightarrow A$ la inclusión.

Por lo tanto $\varphi(\xi) = \sum \varphi(m_j \cdot f_j) = 0$. Entonces $\varphi \equiv 0$.

2. Quiero ver que $\text{Ker}(\omega_m^L) = D\text{Hom}_A(L, M) \iff DKer(\omega_m^L) = \underline{\text{Hom}}_A(L, M)$

Voy a definir un isomorfismo entre ambos. Sea

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(L, M) &\xrightarrow{\Psi} DKer(\omega_m^L) \\ f &\longrightarrow \Psi(f) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Donde defino $\Psi(f)$ como, si $c \in \text{Ker}(\omega_m^L)$, $c : \text{Hom}(L, M) \rightarrow k$, $\Psi(f)(c) := c(f)$. Luego Ψ es lineal.

a) Afirmando que $\text{Ker}(\Psi) = \mathcal{P}(L, M)$. Sea $\beta\alpha \in \mathcal{P}$ con $\alpha : L \rightarrow P$ y $\beta : P \rightarrow M$. Quiero ver que $\beta\alpha \in \text{Ker}(\Psi)$. Por definición, si $c \in \text{Ker}(\omega)$, $\Psi(\beta\alpha)(c) = c(\beta\alpha)$. Como P es proyectivo puedo suponer $P = e_1A \oplus \cdots \oplus e_kA$. Luego $\alpha(l) = \sum_{1 \leq j \leq k} e_j\alpha(l)$.

Entonces $c(\beta\alpha) = c\left(\beta\left(\sum_{1 \leq j \leq k} e_j.\alpha\right)\right) = \sum c(\beta(e_j.\alpha)) = \sum c(e_j.\beta\alpha) = \sum \omega_M^L(c)(e_j)(\beta\alpha) = \sum 0 = 0$ pues $c \in \text{Ker}(\omega)$.

Sea ahora $f : L \rightarrow M$ tal que $\Psi(f) = 0$. Por definición de Ψ , esto significa que $\Psi(f)(c) = 0 \forall c \in \text{Ker}(\omega_M^L) \iff c(f) = 0 \forall c \in \text{Ker}(\omega_M^L)$.

Yo quiero ver que f pertenece a \mathcal{P} . Si $f = 0$ es obvio así que supongo que $f \neq 0$. Completo $\{f\}$ a una base de $\text{Hom}_A(L, M)$ y defino $\tilde{c}(f) := 1$ y $\tilde{c}(g) = 0 \forall g \neq f, g \in \text{Hom}_A(L, M)$. Entonces $\tilde{c} \neq 0 \in \text{DHom}(L, M)$. Y además como $\tilde{c}(f) \neq 0$, $\tilde{c} \notin \text{Ker}(\omega_M^L)$. Es decir que existe $m_0 \in M$ tal que $\omega_M^L(\tilde{c})(m_0) \neq 0$. Es decir que existe $g_0 : L \rightarrow A$ tal que $\omega_M^L(\tilde{c})(m_0)(g_0) = \tilde{c}(m_0.g_0) \neq 0$. Luego por definición de \tilde{c} , existe $\lambda \neq 0$ tal que $f = \lambda m_0.g_0$. Pero $\lambda m_0.g_0 \in \mathcal{P}(L, M)$ pues

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ g_0 \searrow & & \nearrow \lambda m_0.g_0 \\ & A & \end{array} \quad \text{conmuta.}$$

b) Finalmente, queda demostrar que Ψ es sobreyectiva. Sea $d \in \text{DKer}(\omega_M^L)$. Quiero ver que existe $f_0 \in \text{Hom}_A(L, M)$ tal que $d(c) = c(f_0) \forall c \in \text{Ker}(\omega_M^L)$.

Si $d \neq 0$, existe $c_0 \in \text{Ker}(\omega_M^L)$ tal que $d(c_0) = 1$. En particular $c_0 \neq 0$. Completo c_0 a una base de $\text{Ker}(\omega_M^L)$. Luego todo c se escribe como $c = \lambda_c c_0 \oplus \Sigma_c$ con $\Sigma_c \in \langle c_0 \rangle^\perp$. Como $\text{Ker}(d)^\perp$ tiene dimensión uno como espacio vectorial, $\text{Ker}(d)^\perp = \langle c_0 \rangle \leftrightarrow \text{Ker}(d) = \langle c_0 \rangle^\perp$. Luego $d(c) = \lambda_c d(c_0) = \lambda_c$.

Por otra parte como $c_0 \neq 0$, existe $f_0 : L \rightarrow M$, A lineal tal que $c_0(f_0) = 1$. Entonces $f_0 \notin \text{Ker}(c_0)$. Afirmando que $f_0 \in \text{Ker}(\Sigma)$ para todo $\Sigma \in \langle c_0 \rangle^\perp$. En efecto, si $f_0 \notin \text{Ker}(\Sigma)$ entonces $f_0 \in \text{Ker}(\Sigma)^\perp \cap \text{Ker}(c_0)^\perp$. Como $\dim \text{Ker}(\Sigma)^\perp = \dim \text{Ker}(c_0)^\perp = 1$, eso significa que $\text{Ker}(\Sigma)^\perp = \text{Ker}(c_0)^\perp = \langle f_0 \rangle$. Pero entonces $\Sigma = \mu c_0$, $\mu \neq 0$, entonces Σ y c_0 son LD, contradicción. Luego $f_0 \in \text{Ker}(\Sigma)$. Entonces para todo c , $c(f_0) = \lambda_c c_0(f_0) + \Sigma_c(f_0) = \lambda_c c_0(f_0) = \lambda_c$. Por lo tanto $d(c) = \lambda_c = c(f_0)$ para todo $c \in \text{Ker}(\omega_M^L)$. Luego $d = \Psi(f_0)$. Entonces Ψ es sobre y por lo tanto $\underline{\text{Hom}}_A(L, M) \cong \text{DKer}(\omega_M^L)$.

3. Comprobar que la definición de ω que parece completamente natural, efectivamente lo es. □

Enunciemos y demostremos ahora las fórmulas:

Teorema 5.30. Sean M y N A módulos. Entonces existen isomorfismos naturales

$$\text{Ext}^1(M, N) \cong \text{DHom}(\tau^{-1}N, M) \cong \text{DHom}(N, \tau M)$$

Demostración. Vamos a demostrar $\text{Ext}^1(M, N) \cong \text{DHom}(\tau^{-1}N, M)$, el otro isomorfismo es equivalente.

Puedo suponer N sin sumandos directos inyectivos. En efecto, $\text{Ext}^1(M, N) \cong \text{Ext}^1(M, N_i)$ con $N = N_i \oplus I$ con N_i sin sumandos directos inyectivos pues $\text{Ext}^1(M, N) = \text{Ext}^1(M, N_i \oplus I) \cong \text{Ext}^1(M, N_i) \oplus \text{Ext}^1(M, I) = \text{Ext}^1(M, N_i)$ donde $\text{Ext}^1(M, I) = 0$ por la proposición 3.43; y $\text{DHom}(\tau^{-1}N, M) = \text{DHom}(\tau^{-1}(N_i \oplus I), M) = \text{DHom}(\tau^{-1}N_i \oplus \tau^{-1}I, M) = \text{DHom}(\tau^{-1}N_i, M)$ pues τ^{-1} es cero sobre los inyectivos.

Entonces N no tiene sumandos directos inyectivos. Luego $N = \tau L$ para un L . Sea

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} L \rightarrow 0$$

una ppm de L . Luego aplicando $\text{Hom}(-, M)$ tengo una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L, M) \rightarrow \text{Hom}(P_0, M) \rightarrow \text{Hom}(P_1, M)$$

y aplicando D , tengo una sucesión exacta

$$D\text{Hom}(P_1, M) \rightarrow D\text{Hom}(P_0, M) \rightarrow D\text{Hom}(L, M) \rightarrow 0$$

Por otra parte, si vuelvo a la ppm de L y aplica ν en ella, obtengo una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \tau L \xrightarrow{i} \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu L \rightarrow 0$$

Como $\tau L = N$, $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0$ es una secuencia exacta y luego aplicando $\text{Hom}(M, -)$ obtengo una secuencia exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, \tau L) \rightarrow \text{Hom}(M, \nu P_1) \xrightarrow{(\nu p_1)_*} \text{Hom}(M, \nu P_0)$$

Por la naturalidad, y recordando que $L = \tau^{-1}N$, tengo un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} D\text{Hom}(P_1, M) & \xrightarrow{Dp_1^*} & D\text{Hom}(P_0, M) & \xrightarrow{Dp_0^*} & D\text{Hom}(\tau^{-1}N, M) & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow \omega_M^{P_1} & & \cong \downarrow \omega_M^{P_0} & & \downarrow \omega_M^L & & \\ \text{Hom}(M, \nu P_1) & \xrightarrow{(\nu p_1)_*} & \text{Hom}(M, \nu P_0) & \xrightarrow{(\nu p_0)_*} & \text{Hom}(M, \nu L) & & \end{array}$$

Volvamos a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \tau L \xrightarrow{i} \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu L \rightarrow 0$$

Considero la presentación inyectiva $0 \rightarrow \tau L \xrightarrow{i} \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0$ y la completo a una resolución inyectiva de τL :

$$0 \rightarrow \tau L \xrightarrow{i} \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{f} I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow \dots$$

Entonces $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(\nu p_0)$. Por lo tanto $\text{Ker}(f_*) = \text{Ker}((\nu p_0)_*)$. Entonces $\text{Ext}^1(M, N) = \frac{\text{Ker}(f_*)}{\text{Im}((\nu p_1)_*)} = \frac{\text{Ker}((\nu p_0)_*)}{\text{Im}((\nu p_1)_*)}$.
Voy a definir un morfismo

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Ker}((\nu p_0)_*) &\longrightarrow D\text{Hom}(\tau^{-1}N, M) \\ \Psi &= Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1} \Big|_{\text{Ker}((\nu p_0)_*)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si recordamos que $\text{Ker}(\omega_M^L) = D\text{Hom}_A(L, M)$, alcanza con demostrar que $\text{Im}(\Psi) = \text{Ker}(\omega_M^L)$ y que $\text{Ker}(\Psi) = \text{Im}((\nu p_1)_*)$

a) $\text{Ker}(\Psi) = \text{Im}((\nu p_1)_*)$:

\subseteq) Sea η tal que $\Psi(\eta) = 0$, i.e., $Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta) = 0$. Entonces $(\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta) \in \text{Ker}(Dp_0^*) = \text{Im}(Dp_1^*)$. Luego $(\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta) = Dp_1^*(\Sigma)$ y por lo tanto

$$\eta = \omega_M^{P_0} Dp_1^*(\Sigma) = (\nu p_1)_* \circ \omega_M^{P_1}(\Sigma) \in \text{Im}((\nu p_1)_*)$$

\supseteq) Sea $(\nu p_1)_*(\Sigma)$. Calculo $\Psi((\nu p_1)_*(\Sigma)) = Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\nu p_1)_*(\Sigma) = Dp_0^* Dp_1^*(\omega_M^{P_1})^{-1}(\Sigma) = 0$. Luego $(\nu p_1)_*(\Sigma) \in \text{Ker}(\Psi)$

b) $\text{Im}(\Psi) = \text{Ker}(\omega_M^L)$:

⊆) Sea $\Psi(\eta) = Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta)$. Quiero ver que pertenece al núcleo de ω . $\omega_M^L(Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta)) = (\nu p_0)_* \circ \omega_M^{P_0} \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\eta) = (\nu p_0)_*(\eta) = 0$ pues $\eta \in \text{Ker}((\nu p_0)_*)$.

⊇) Sea $\varphi \in \text{Ker}(\omega_M^L)$. Por sobreyectividad existe ξ tal que $\varphi = Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\xi)$. Hay que ver que $\xi \in \text{Ker}((\nu p_0)_*)$. En efecto: $(\nu p_0)_*(\xi) = (\nu p_0)_* \circ (\omega_M^{P_0}) \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\xi) = \omega_M^L \circ Dp_0^* \circ (\omega_M^{P_0})^{-1}(\xi) = \omega_M^L(\varphi) = 0$. Luego $\xi \in \text{Ker}((\nu p_0)_*)$ y por lo tanto $\varphi = \Psi(\xi)$

Entonces Ψ induce un iso entre $\frac{\text{Ker}((\nu p_0)_*)}{\text{Im}((\nu p_1)_*)} = \text{Ext}^1(M, N) \cong \text{Im}(\Psi) = \text{Ker}(\omega_M^L) \cong \underline{\text{DHom}}_A(L, M)$ \square

Corolario 5.31. Sean M y N A módulos. Entonces:

- Si $\text{pd } M \leq 1$ entonces $\text{Ext}^1(M, N) \cong \text{DHom}(N, \tau M)$
- Si $\text{id } N \leq 1$ entonces $\text{Ext}^1(M, N) \cong \text{DHom}(\tau^{-1}N, M)$

Demostración. 1. Sabemos por las fórmulas que $\text{Ext}^1(M, N) \cong \overline{\text{DHom}}_A(N, \tau M)$ Entonces únicamente hay que demostrar que $I(N, \tau M) = 0$. Recordemos que por la proposición 4.16, si $\text{pd } M \leq 1$ entonces $\text{Hom}(DA, \tau M) = 0$.

Sea entonces un $f \in I(N, \tau M)$. Luego existen β y α tal que
$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & \tau M \\ & \searrow \alpha & \nearrow \beta \\ & I & \end{array}$$
 conmuta. Luego

$$\begin{array}{ccc} \tau M & \xrightarrow{Df} & N \\ & \searrow D\beta & \nearrow D\alpha \\ & DI & \end{array}$$
 conmuta.

DI es proyectivo, entonces $A^n = DI \oplus P$ para algún n . Notar que puedo extender $D\alpha$ a un $\widetilde{D\alpha}$ definido sobre todo A^n , definiéndolo como 0 sobre P . Entonces:

$$\begin{array}{ccc} DI & \xrightarrow{i} & A^n \\ & \searrow D\alpha & \downarrow \widetilde{D\alpha} \\ & & N \end{array}$$
 conmuta, y aplicando D de nuevo obtengo que
$$\begin{array}{ccc} I & \xleftarrow{\alpha_2} & (DA)^n \\ & \searrow \alpha & \nearrow \alpha_1 \\ & & N \end{array}$$
 conmuta. Es

decir, $\alpha = \alpha_2 \alpha_1$.

Por lo tanto, $f = \beta \alpha = \beta \alpha_2 \alpha_1 = (\beta \alpha_2) \alpha_1$ con $\beta \alpha_2 : (DA)^n \rightarrow \tau M$. Entonces $\beta \alpha_2 \in \text{Hom}((DA)^n, \tau M) = \bigoplus_n \text{Hom}(DA, \tau M) = 0$. Entonces $\beta \alpha_2 = 0$ y por lo tanto $f = 0$. Por lo tanto $I(N, \tau M) = 0$.

2. Ejercicio. \square

Un corolario inmediato es:

Corolario 5.32. Sea N sin sumandos directos proyectivos tal que $\text{pd } M \leq 1$ y $\text{id } \tau N \leq 1$. Entonces

$$\text{Hom}(\tau N, \tau M) \cong \text{Hom}(N, M)$$

Demostración. Como $\text{pd } M \leq 1$, $\text{Hom}(\tau N, \tau M) \cong \text{DExt}^1(M, \tau N)$ por el corolario 5.32 parte 1. Como $\text{id } \tau N \leq 1$, $\text{DExt}^1(M, \tau N) \cong \text{DHom}(\tau^{-1}\tau N, M)$ por el corolario 5.32 parte 2. Finalmente $\tau^{-1}\tau N \cong N$ pues N no tiene sumandos directos proyectivos. Luego $\text{Hom}(\tau N, \tau M) \cong \text{Hom}(N, M)$. \square

Estos dos corolarios son válidos, por ejemplo, para cualquier quiver sin relaciones, ya que en ese caso ya vimos que la categoría es hereditaria.

Parte 6

Teorema de Gabriel

En 1972 ([Gab72]) el matemático francés Pierre Gabriel clasificó a los quivers (sin relaciones) de **tipo finito**, es decir, de aquellos que tienen una cantidad finita de representaciones indecomponibles. El resultado establece que los quivers de tipo finito son exactamente aquellos cuyo grafo es un diagrama de Dynkin como los vistos en el ejemplo 1.3. Lo curioso es que estos diagramas aparecen en la clasificación de otros objetos algebraicos y geométricos como las álgebras de Lie semisimples.

La demostración que daremos, proveniente de [Sch14] y [Bri00], tiene un componente de geometría algebraica y grupos algebraicos. El *background* necesario para los detalles técnicos escapan a esta tesina.

Los teoremas 6.8 y 6.16 se desarrollan más en profundidad con respecto a las fuentes citadas.

Sea Q un quiver sin ciclos orientados, con sus vértices ordenados $\{1, \dots, n\}$ y $d = (d_i) \in (\mathbb{N}_0)^n$ un vector dimensión (es decir, un vector cuyas coordenadas son todos enteros mayores o iguales que cero).

Definición 6.1. Sea E_d el conjunto de todas las representaciones con vector dimensión d .

Notar que todas las representaciones de E_d están completamente determinadas en sus espacios vectoriales y lo único que elijo de una representación son los morfismos entre sus vértices. Luego

$$E_d \cong \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}_k(k^{d_{s(\alpha)}}, k^{d_{t(\alpha)}})$$

donde la flecha es una biyección, pero el objeto de la derecha tiene una estructura algebraica y geométrica natural. Como $\text{Hom}_k(k^{d_{s(\alpha)}}, k^{d_{t(\alpha)}}) \cong M_{t(\alpha) \times s(\alpha)}(k)$, luego $E_d = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} M_{d_{t(\alpha)} \times d_{s(\alpha)}}(k) = k^{\sum d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}}$

Definición 6.2. Sea $G_d := \prod_{i \in Q_0} GL_{d_i}(k)$

Entonces G_d es un grupo que actúa sobre E_d vía

$$\{g\}_i \cdot M := \widetilde{M}, \text{ con } \widetilde{M}_i = k^{d_i} \text{ y } \widetilde{\varphi}_\alpha := g_{t(\alpha)} \varphi_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1}$$

Es decir,

$$\begin{array}{ccc} M_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_{t(\alpha)} \\ g_{s(\alpha)}^{-1} \uparrow & & \downarrow g_{t(\alpha)} \\ M_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_\alpha} & M_{t(\alpha)} \end{array}$$

conmuta.

Definición 6.3. Sea $\mathcal{O}_M := \{g \cdot M : g \in G_d\}$ la órbita de M .

Ejemplo 6.4. Sea $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$ y $d = (1, 1, 0)$. Entonces $E_d = \text{Hom}_k(k, k) = k$, $G_d = GL_1(k) \times GL_1(k) = k^\times \times k^\times$

Notar que entre $g \cdot M$ y M tengo un isomorfismo de representaciones dado por g . Y efectivamente, dentro del conjunto de todas las representaciones de vector dimensión d , \mathcal{O}_M es el conjunto de representaciones isomorfas a M :

Lema 6.5. Sea $M \in E_d$, $M = (M_i, \varphi_\alpha)$. Entonces $\mathcal{O}_M := \{M' \in \text{Rep}_Q : M' \cong M\}$

Demostración. Sea $g \cdot M \in \mathcal{O}_M$. Luego $g \cdot M \cong M$ vía $(g \cdot M)_i \xrightarrow{g_i^{-1}} M_i$.

Y si $N \cong M$, $N = (M_i, \psi_\alpha)$, sea $f : N \rightarrow M$ un isomorfismo, con $f_i \in \text{Aut}(M_i)$. Luego como f es un morfismo de representaciones, $f_j \circ \psi_\alpha = \varphi_\alpha \circ f_i$ con $\alpha : i \rightarrow j$. Por lo tanto $\psi_\alpha = f_j^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ f_i = (f_j^{-1}) \circ \varphi_\alpha \circ (f_i^{-1})^{-1}$ con $f_i \in GL_{d_i}(k)$. Luego $N = f \cdot M$. \square

Definición 6.6. $\text{Stab}(M) = \{g \in G_d : g \cdot M = M\} = \text{Aut}(M)$

Usaremos los siguientes hechos de la geometría algebraica:

Lema 6.7. Sea $d \in (\mathbb{N}_0)^n$. Entonces:

1. Para toda representación M de vector dimensión d , la dimensión de \mathcal{O}_M satisfice

$$\dim \mathcal{O}_M = \dim G_d - \dim \text{Aut } M$$

2. Hay a lo sumo una órbita de codimensión cero en E_d .

3. Si E_d tiene finitas órbitas bajo la acción de G_d , entonces existe una órbita de codimensión cero.

Teorema 6.8. Sea $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta que no se parte. Entonces $\dim \mathcal{O}_{L \oplus N} < \dim \mathcal{O}_M$

Demostración. Recordemos que $\mathcal{O}_{L \oplus N} = \{J : J \cong L \oplus N\} = \{g \cdot (L \oplus N) : g \in G_d\} \leq E_d$.

Escribo a las representaciones como $L = (L_i, \psi_\alpha)$, $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ y $N = (N_i, \chi_\alpha)$. Para cada i , sea $\mathcal{L}_i = \{l_1^i, \dots, l_{n_i}^i\}$ una base de L_i . Además sea B_i una base que extiende al conjunto LI $\{f_i(\mathcal{L}_i)\} \leq M$. Entonces afirmo que $g_i(B_i)$ es una base de N : que genera es obvio pues g es sobre. Además es LI : Si $B_i = \{f_i(l_1^i), \dots, f_i(l_{n_i}^i), v_1, \dots, v_{r_i}\}$. Luego $g_i(B_i) = \{g_i(v_1), \dots, g_i(v_{r_i})\}$ con $\{v_1, \dots, v_{r_i}\} LI$. Como $\text{Ker}(g) = \langle f_i(b_1^i), \dots, f_i(b_{n_i}^i) \rangle$, $g|_{\langle v_1, \dots, v_{r_i} \rangle}$ es mono. Luego $\mathcal{N}_i := g_i(B_i)$ es base de N_i . Luego en las bases \mathcal{L}_i , B_i y \mathcal{N}_i , f y g se escriben como

$$f_i = \begin{bmatrix} Id_{n_i \times n_i} \\ 0_{r_i \times n_i} \end{bmatrix} \text{ y } g_i = \left[\begin{array}{c|c} 0_{r_i \times n_i} & Id_{r_i \times r_i} \end{array} \right]$$

Sea ahora $\alpha : i \rightarrow j$ una flecha. Quiero calcular los morfismos de cada representación en las bases $\mathcal{L}_i, B_i, \mathcal{N}_i$.

Como f y g son morfismos de representaciones, tengo dos ecuaciones:

$$\varphi_\alpha \circ f_i = f_j \circ \psi_\alpha \tag{6.1}$$

y

$$g_j \circ \varphi_\alpha = \chi_\alpha \circ g_i \tag{6.2}$$

con $[\psi] : k^{n_i} \rightarrow k^{n_j}$, $[\varphi_\alpha] : k^{n_i+r_i} \rightarrow k^{n_j+r_j}$, $[\chi_\alpha] : k^{r_i} \rightarrow k^{r_j}$. Voy a usar la notación de matrices para las transformaciones lineales, donde $[A]^c$ indica la columna c de la matriz $[A]$, $[A]_l$ indica la fila l y $[A]_{1 \leq k \leq m}$ indica las filas de la primera a la m -ésima.

Mirando la igualdad 6.1 tengo que $[\varphi_\alpha] \circ \begin{bmatrix} Id_{n_i \times n_i} \\ 0_{r_i \times n_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{n_j \times n_j} \\ 0_{r_j \times n_j} \end{bmatrix} \circ [\psi_\alpha]$, luego $\begin{bmatrix} [\varphi_\alpha]^1 & \cdots & [\varphi_\alpha]^{n_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\psi_\alpha] \\ 0_{r_j \times n_j} \end{bmatrix}$.

Entonces $[\varphi_\alpha] = \begin{bmatrix} [\psi_\alpha] & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$. Por otra parte, $\chi_\alpha \circ g_i = g_j \circ \varphi_\alpha$, es decir

$$[\chi_\alpha] \circ \begin{bmatrix} 0_{r_i \times n_i} & Id_{r_i \times r_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{r_j \times n_j} & Id_{r_j \times r_j} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} [\psi_\alpha] & [\varphi_\alpha]^{n_i+1 \leq l \leq n_i+r_i} \\ 0 & [\varphi_\alpha]^{n_i+1 \leq l \leq n_i+r_i} \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{bmatrix} 0_{r_j \times n_i} & [\chi_\alpha]^1 & \cdots & [\chi_\alpha]^{r_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{r_j \times n_i} & [\varphi_\alpha]_{k \geq n_j+1}^{n_i+1} & \cdots & [\varphi_\alpha]_{k \geq n_j+1}^{n_i+r_i} \end{bmatrix}$$

y por lo tanto φ_α en esas bases tienen la forma

$$[\varphi_\alpha]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j} = \begin{bmatrix} [\psi_\alpha]_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j} & \epsilon_\alpha \\ 0 & [\chi_\alpha]_{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j} \end{bmatrix}$$

donde ϵ_α es una matriz de $(d_j - r_j) \times (d_i - n_i)$.

Afirmo que M no es isomorfa a $L \oplus N$. En efecto, si M fuera isomorfa a $L \oplus N$, $\text{Hom}(N, M) = \text{Hom}(N, L) \oplus \text{Hom}(N, N)$, y entonces $\dim \text{Hom}(N, M) = \dim \text{Hom}(N, L) + \dim \text{Hom}(N, N)$. Luego como tengo una secuencia exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N, L) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(N, M) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(N, N) \quad (6.3)$$

Tengo que

$$\begin{aligned} \dim \text{Im}(g_*) + \dim \text{Ker}(g_*) &= \dim \text{Hom}(N, M) \\ \dim \text{Im}(g_*) + \dim \text{Hom}(N, L) &= \dim \text{Hom}(N, L) + \dim \text{Hom}(N, N) \\ \dim \text{Im}(g_*) &= \dim \text{Hom}(N, N) \end{aligned}$$

Luego en 6.3 g_* es sobreyectiva, y por lo tanto existe $r : N \rightarrow M$ tal que $g \circ r = Id_N$. Por lo tanto la sucesión original se parte, absurdo. Por lo tanto M no es isomorfa a $L \oplus N$. Entonces algún ϵ_α es no nulo. Si fueran todos nulos, la transformación lineal $G_i : M_i \rightarrow L_i \oplus N_i$ que manda $G_i(f_i(l_k^i))$ en l_k^i y $G_i(v_k)$ en $g_i(v_k)$ sería un isomorfismo de representaciones para todo i . En efecto, basta comprobar que sería un morfismo de representaciones (biyectiva ya es): queremos ver que si $\alpha : i \rightarrow j$, $G_j \circ \varphi_\alpha = \psi_\alpha \oplus \chi_\alpha \circ G_i$. Si lo miro en las bases $\mathcal{B}, \mathcal{L}, \mathcal{N}$, como $[G_j]_{\mathcal{B}_j, \mathcal{L}_j \oplus \mathcal{N}_j}$ y $[G_i]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{N}_i}$ son las identidades y $[\varphi_\alpha]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j} = [\psi_\alpha]_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j} \oplus [\chi_\alpha]_{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j}$, tenemos que $[\psi_\alpha \oplus \chi_\alpha]_{\mathcal{L}_i \oplus \mathcal{N}_i, \mathcal{L}_j \oplus \mathcal{N}_j} \circ [G_i]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{N}_i} = [\psi_\alpha]_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j} \oplus [\chi_\alpha]_{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j} \circ Id = [\psi_\alpha]_{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j} \oplus [\chi_\alpha]_{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j} = [\varphi_\alpha]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j} = Id \circ [\varphi_\alpha]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j} = [G_j]_{\mathcal{B}_j, \mathcal{L}_j \oplus \mathcal{N}_j} \circ [\varphi_\alpha]_{\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j}$ y por lo tanto G es un morfismo de representaciones, además es biyectivo y por lo tanto $M \cong L \oplus N$, absurdo.

Luego existe algún α_0 tal que $\varphi_{\alpha_0} = \left[\begin{array}{c|c} [\psi_{\alpha_0}] & \epsilon_{\alpha_0} \\ \hline 0 & [\chi_{\alpha_0}] \end{array} \right]$ y $\epsilon_{\alpha_0} \neq 0$. Luego si considero la curva

de representaciones $t \cdot M := (M_i, t \cdot \varphi_\alpha)$, $t \in k^\times$, con $[t \cdot \varphi_\alpha] = \left[\begin{array}{c|c} [\psi_\alpha] & t \cdot \epsilon_\alpha \\ \hline 0 & [\chi_\alpha] \end{array} \right]$, tengo $t \cdot M \in \mathcal{O}_M$

para todo $t \neq 0$ pero $t \cdot M \notin \mathcal{O}_{L \oplus N} \forall t \neq 0$. Esto nos dice que \mathcal{O}_M tiene al menos una dimensión que no tiene $\mathcal{O}_{L \oplus N}$. Entonces $\dim \mathcal{O}_{L \oplus N} < \dim \mathcal{O}_M$. \square

Ejemplo 6.9. 1. Sea Q un quiver sin relaciones ni ciclos dirigidos. Si M es una representación semisimple ($M = \bigoplus_k S(i_k)^{d_k}$), y $M' \cong M$, $M' = M$, entonces $\#\mathcal{O}_M = 1$, luego $\dim \mathcal{O}_M = 0$.

2. Sea $Q = 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$ y $M = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$. Calculemos $\dim \mathcal{O}_M$:

Sea $M' = k \xrightarrow{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}} k$ isomorfa a $k \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} k$. Luego:

$$M' \cong M \iff \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & k \\ \downarrow \mu \neq 0 & & \downarrow A & \lambda \neq 0 \\ k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} & k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}} & k \end{array} \text{ conmuta. Entonces } A = \begin{bmatrix} \mu a & \lambda c \\ \mu b & \lambda d \end{bmatrix}. \text{ Como } A \text{ es inversible,}$$

$\det(A) = \mu \lambda \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq 0 \iff \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq 0$. Luego $M' \cong M \iff \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq 0$. Por lo tanto $\mathcal{O}_{\frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}} \cong Gl_{2 \times 2}(k)$. Entonces $\dim \mathcal{O}_M = 4$.

6.1 Forma cuadrática de un quiver

Sea Q sin ciclos dirigidos. Una n **forma cuadrática** q es un polinomio de grado dos, homogéneo en n variables con coeficientes en \mathbb{Z} . Luego q es de la forma $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$.

Pensaremos a q como una función polinomial $q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Notar que $q(rx) = r^2 q(x) \forall r \in \mathbb{Z}$. Dada una forma cuadrática q , definimos una forma bilineal simétrica

$$\langle x, y \rangle = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

$\langle -, - \rangle$ claramente es simétrica y se demuestra fácilmente que es bilineal.

Recíprocamente, dada una forma bilineal simétrica \langle, \rangle podemos definir una forma cuadrática como

$$q(x) = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle$$

y las dos operaciones son inversas.

Definición 6.10. Dado Q un carcaj con n vértices, defino su forma cuadrática, llamada también **forma de Tits**, como

$$q(x) := \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} \quad q: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

Observación 6.11. (importante): q no depende de la dirección de las flechas, sólo del grafo sin orientar subyacente.

Ejemplo 6.12. $Q = 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$, $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3$.

Teorema 6.13. Sea Q sin relaciones ni ciclos dirigidos. Entonces para toda representación M con vector dimensión d , $q(d) = \dim \text{End}(M) - \dim \text{Ext}^1(M, M)$.

Demostración. Como Q no tiene relaciones ni ciclos dirigidos, existe una resolución proyectiva

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(t(\alpha))^{d_s(\alpha)} \longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)^{d_i} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor $\text{Hom}(-, M)$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{End}(M) \rightarrow \bigoplus_i \text{Hom}(P(i)^{d_i}, M) \xrightarrow{T} \bigoplus_{\alpha} \text{Hom}(P(t(\alpha))^{d_s(\alpha)}, M) \\ \rightarrow \text{Ext}^1(M, M) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Expandiendo y usando que $\text{Hom}(P(i), M) = M_i$,

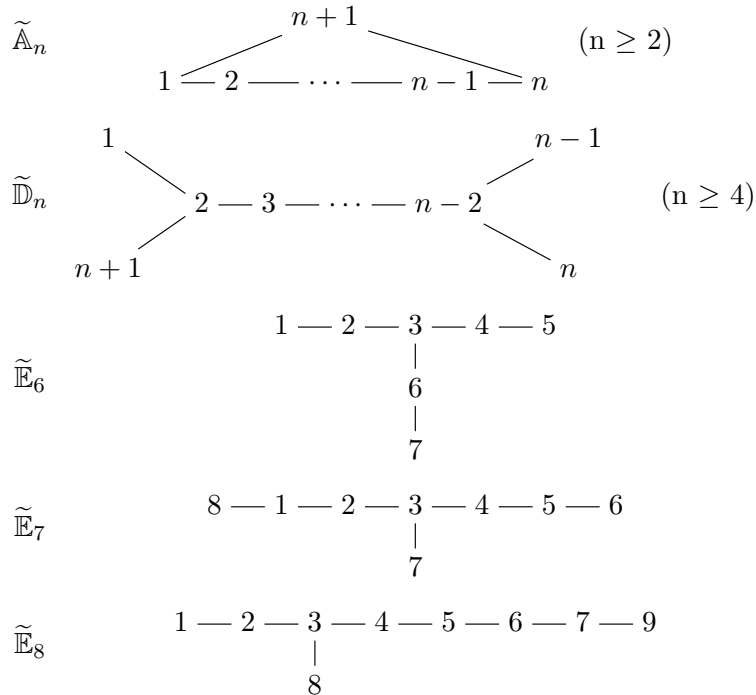
$$0 \rightarrow \text{End}(M) \rightarrow \bigoplus_i M_i^{d_i} \xrightarrow{T} \bigoplus_{\alpha} M_{t(\alpha)}^{d_s(\alpha)} \rightarrow \text{Ext}^1(M, M) \rightarrow 0$$

Luego tomando dimensión,

$$\begin{aligned} \sum d_i^2 &= \dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T) \\ \sum d_i^2 &= \dim \text{End}(M) + \dim \text{Im}(T) - \dim \bigoplus_{\alpha} M_{t(\alpha)}^{d_s(\alpha)} + \dim \bigoplus_{\alpha} M_{t(\alpha)}^{d_s(\alpha)} \\ \sum d_i^2 &= \dim \text{End}(M) - \dim \text{Coker}(T) + \sum d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} \\ \sum d_i^2 - \sum d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} &= \dim \text{End}(M) - \dim \text{Ext}^1(M, M) \\ q(d) &= \dim \text{End}(M) - \dim \text{Ext}^1(M, M) \end{aligned}$$

□

Definición 6.14. Análogamente a como definimos los quivers de tipo Dynkin, tenemos los de tipo Euclideo, llamados también "Dynkin extendidos", que se consiguen agregando un vértice a un diagrama Dynkin de manera que el resultado no es un diagrama de Dynkin, pero si se remueve cualquier vértice se obtiene una unión de Dynkins.



\tilde{A}_1 tiene una definición aparte que es $\tilde{A}_1 := 1 \text{ --- } 2$

Lema 6.15. Sea Q conexo y sin lazos, $d = (d_i) \in (\mathbb{N}_0)^n - \{0\}$ tal que $\langle d, x \rangle = 0 \forall x \in \mathbb{Z}^n$.

Entonces:

1. $q = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle$ es semidefinida positiva.
2. $d_i \neq 0 \forall i$.
3. $q(x) = 0 \iff x = q \cdot d, q \in \mathbb{Q}$

Demostración. Defino $n_{i,j} := \#\{\text{flechas de } i \text{ en } j\} + \#\{\text{flechas de } j \text{ en } i\} = \#\{\text{aristas que conectan } i \text{ y } j \text{ en el grafo subyacente}\}.$

Voy a demostrar primero que $d_i \neq 0 \forall i$. Escribo $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_i \sum_{j < i} n_{i,j} x_i x_j.$

Entonces, reemplazando en la definición tengo que $\langle x, y \rangle = \sum_i (x_i + y_i)^2 - \sum_i \sum_{j < i} n_{i,j} (x_i + y_i)(x_j + y_j) - \sum_i x_i^2 + \sum_i \sum_{j < i} n_{i,j} x_i x_j - \sum_i y_i^2 + \sum_i \sum_{j < i} n_{i,j} y_i y_j = 2 \sum_i x_i y_i - \sum_i \sum_{j < i} n_{i,j} (x_i y_j + y_i x_j).$

Luego $\langle d, e_k \rangle = 2 \sum_i d_i (e_k)_i - \sum_i \sum_{j < i} n_{i,j} (d_i (e_k)_j + (e_k)_i d_j) = 2d_k - \left(\sum_{i \neq k} \sum_{j < i} n_{i,j} (d_i (e_k)_j + (e_k)_i d_j) \right) = 2d_k - \left(\sum_{k < i} \sum_{j < i} n_{i,j} d_i (e_k)_j + \sum_{j < k} n_{k,j} d_j (e_k)_k \right) = 2d_k - \left(\sum_{k < i} \sum_{j < i} n_{i,j} d_i (e_k)_j + \sum_{j < k} n_{k,j} d_j \right) = 2d_k - \left(\sum_{k < i} n_{i,k} d_i + \sum_{j < k} n_{k,j} d_j \right) = 2d_k - \sum_{j \neq k} n_{j,k} d_j$

Como $\langle d, e_k \rangle = 0$ por hipótesis, entonces $d_k \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} n_{j,k} d_j$. Si existe k_0 un vértice tal que $d_{k_0} = 0$, como $n_{j,k} d_j \geq 0 \forall j$, eso implica que $d_j = 0$ para todo j vértice tal que existe una flecha de k_0 en j ó de j en k_0 (pues $n_{j,k_0} > 0$ en ese caso y $\sum_{j \neq k_0} n_{j,k_0} d_j = 0$). Luego $d_j = 0 \forall j$ vecino de k_0 . Como Q es conexo y finito, todo vértice es alcanzable por finitos vecinos desde k_0 . Entonces si i_0 es un vértice cualquiera, existe una secuencia $k_0, k_1, \dots, k_r = i_0$ donde vértices consecutivos están unidos por una flecha. Pero entonces $d_{k_1} = 0$, lo que implica $d_{k_2} = 0$ y así siguiendo $d_{k_r} = 0 = d_{i_0}$. Luego $d_k = 0$ para todo vértice. Entonces $d = 0$, absurdo. Por lo tanto $d_k \neq 0$ para todo k . Eso demuestra 2.

Demostremos ahora 1. Reescribo $\sum_i x_i^2 = \sum_{i \in Q_0} d_i \cdot \frac{x_i^2}{d_i} \stackrel{*}{=} \sum_{i \in Q_0} \left(\sum_{j \neq i} \frac{n_{j,i} d_j}{2} \right) \frac{x_i^2}{d_i} = \sum_{i \in Q_0} \sum_{j > i} \frac{n_{j,i}}{2} d_j \frac{x_i^2}{d_i} + \sum_{i \in Q_0} \sum_{j < i} \frac{n_{j,i}}{2} d_j \frac{x_i^2}{d_i}$. Expaniendo la suma y recordando que $n_{j,i} = n_{i,j}$ es muy fácil ver que $\sum_{i \in Q_0} \sum_{j > i} \frac{n_{j,i}}{2} d_j \frac{x_i^2}{d_i} = \sum_{i \in Q_0} \sum_{j < i} \frac{n_{j,i}}{2} d_i \frac{x_j^2}{d_j}$. Por lo tanto $\sum_i x_i^2 = \sum_{i \in Q_0} \sum_{j < i} \left(\frac{n_{j,i}}{2} d_j \frac{x_i^2}{d_i} + \frac{n_{j,i}}{2} d_i \frac{x_j^2}{d_j} \right) = \sum_{i \in Q_0} \sum_{j < i} \frac{n_{j,i}}{2} \left(d_j \frac{x_i^2}{d_i} + d_i \frac{x_j^2}{d_j} \right).$

Entonces, $q(x) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_i \sum_{j < i} n_{i,j} x_i x_j = \sum_i \sum_{j < i} \frac{n_{j,i}}{2} \left(d_j \frac{x_i^2}{d_i} - 2x_i x_j + d_i \frac{x_j^2}{d_j} \right) = \sum_i \sum_{j < i} \frac{n_{j,i}}{2} \left(x_i \frac{\sqrt{d_j}}{\sqrt{d_i}} - x_j \frac{\sqrt{d_i}}{\sqrt{d_j}} \right)^2 \geq 0$

Luego $q(x)$ es semidefinida positiva. Supongamos ahora que $q(x) = 0$. Reescribo $q(x)$ como

q es definida positiva. Esto demuestra la vuelta de 1.

Supongo ahora q semidefinida positiva. Y supongo que Q no es de tipo euclideo ni Dynkin. Afirmo que entonces, si Q no tiene lazos, necesariamente contiene un **subquiver propio** de tipo euclideo. Un subquiver propio es un quiver (Q'_0, Q'_1, s', t') tal que $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ y, o bien $Q'_0 \neq Q_0$ o bien $Q'_1 \neq Q_1$. Esto claramente es falso si Q tiene lazos, por ejemplo $\curvearrowright 1 \longleftarrow 2$ no tiene ningún subquiver euclideo.

Si Q tiene caminos dobles (dos vértices con dos flechas distintas que los unen) entonces Q contiene un \tilde{A}_1 . Si Q no tiene caminos dobles pero tiene un ciclo (dirigido o no), contiene un \tilde{A}_n con $n \geq 2$. Puedo suponer entonces que Q no tiene ciclos, ni lazos ni caminos dobles. Entonces el grafo subyacente de Q es un árbol. Sea T una sucesión maximal de vértices vecinos sin repetirse (existe pues Q no tiene ciclos). Digamos $T = v_1 - v_2 - \dots - v_n$, con v_1 y v_2 sin continuación. Como Q es conexo y no es de tipo A_n y T es maximal, en algún momento algún v_i , $i = 2, \dots, n-1$ se separa en dos:

$$\begin{array}{ccccccc} v_1 & \text{---} & v_2 & \text{---} & \dots & \text{---} & v_i & \text{---} & \dots & \text{---} & v_n \\ & & & & & & | & & & & \\ & & & & & & w_1 & & & & \end{array}$$

Los casos del $n = 3$ al $n = 7$ los voy a hacer a mano, y después el caso para $n \geq 8$ sale de los casos previos.

Caso $n = 3$: Obtengo un \mathbb{D}_3 , que como Q es conexo y no es Dynkin, y T es maximal, nece-

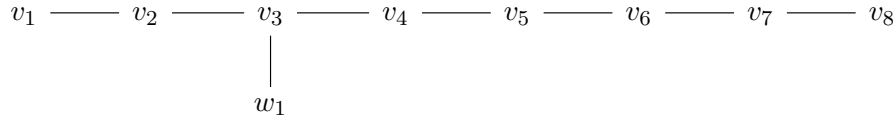
sariamente T continúa en w_1 o en v_2 . Si v_2 se vuelve a separar obtengo un $\tilde{\mathbb{D}}_4$: $v_1 - v_2 - v_3$ con w_1 conectado a v_2 .

Si continúa en w_1 , tengo: $v_1 - v_2 - v_3$ con w_1 conectado a v_2 , w_2 conectado a w_1 , v_3 conectado a w_2 . que sigue siendo un \mathbb{D}_n . Entonces eventualmente, algún w_i se debe separar en dos: $v_2 - w_1 - \dots - w_i - w_{i+1}$ y por lo tanto existe un $\tilde{\mathbb{D}}_n$ contenido en Q .

Caso $n = 4$: Supongo $v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ con w_1 conectado a v_2 . Este es un diagrama de tipo \mathbb{D}_n .

Si en v_3 T también se separa, obtengo un $\tilde{\mathbb{D}}_5$. Si no se separa, w_1 o v_2 se deben separar. Si v_2 se separa en otro vértice obtengo un $\tilde{\mathbb{D}}_4$. Si no lo hace, w_1 se separa: $v_4 - v_3 - v_2 - w_1 - w_2$ con v_1 conectado a w_1 , que es un \mathbb{E}_6 . Como Q no es euclideo y es conexo, w_1 o w_2 se separa. Si w_1 lo hace obtengo un $\tilde{\mathbb{D}}_n$. Si no lo hace, w_2 se separa: $v_4 - v_3 - v_2 - w_1 - w_2 - w_3$ con v_1 conectado a w_2 , que es un \mathbb{E}_7 . Entonces de nuevo w_2 o w_3 se tienen que volver a separar. Si w_2 lo hace obtengo un $\tilde{\mathbb{D}}_n$. Si no lo hace, w_3 se separa y obtengo un \mathbb{E}_8 : $v_4 - v_3 - v_2 - w_1 - w_2 - w_3 - w_4$ con v_1 conectado a w_3 . Como Q no es Dynkin,

b) Supongo $i = 3$. Entonces, como $n \geq 8$, tengo al menos



que es otro $\widetilde{\mathbb{E}}_8$. Entonces Q contiene un euclideo.

Sea $Q' \subseteq Q$ un subquiver propio de tipo euclideo. Sea q' su forma cuadrática. Como ya vimos recién, $\exists d$ vector dimensión tal que $\langle d, x \rangle = 0 \forall x \in \mathbb{Z}^{n'} - \{0\}$ y $q'(d) = 0$.

Si $Q_0 = Q'_0$, como $q'(z) = q(z) + \sum_{\alpha \in Q_1 - Q'_1} z_{s(\alpha)} z_{t(\alpha)}$, y usando que $d_i > 0 \forall i$ y que $Q'_1 \subsetneq Q_1$, $q'(d) = 0 = q(d) + \underbrace{\sum_{\alpha \in Q_1 - Q'_1} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}}_{>0} > q(d)$. Luego $0 > q(d)$, lo que contradice que $q(d)$ es semidefinida positiva, absurdo.

Si $Q'_0 \subsetneq Q_0$, como antes tomo q' la forma cuadrática de Q' y d su vector dimensión tal que $\langle d, x \rangle = 0 \forall x$ y $q'(d) = 0$. Defino un vector dimensión \tilde{d} como $\tilde{d}_i = \begin{cases} d_i & \text{si } i \in Q'_0 \\ 0 & \text{si } i \notin Q'_0 \end{cases}$. Luego

$$q(\tilde{d}) = \sum_{i \in Q'_0} d_i^2 - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1: s(\alpha) \\ \text{y } t(\alpha) \in Q'_0}} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} \leq \sum_{i \in Q'_0} d_i^2 - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1: \\ \alpha \in Q'_1}} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} = q'(d) = 0$$

Si la desigualdad es estricta es pues $Q'_1 \subsetneq \{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) \text{ y } t(\alpha) \in Q'_0\}$ y llego a una contradicción: $q(\tilde{d}) < 0$ que contradice que q sea semidefinida positiva.

Supongo que la inclusión no es estricta, es decir $Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 : s(\alpha) \text{ y } t(\alpha) \in Q'_0\}$. Definiremos en ese caso otro vector dimensión: Sean $i_0 \in Q'_0$ y $j_0 \notin Q'_0$ tal que existe una flecha en Q_1 entre ellos dos. Como Q es conexo, dichos vértices existen. Defino un nuevo vector dimensión x de la siguiente forma: $x_i = 2d_i$ si $i \in Q'_0$, $x_{j_0} = 1$ y $x_k = 0 \forall k \neq j_0$ y $k \notin Q'_0$.

Luego

$$\begin{aligned}
 q(x) &= \sum_{k \in Q'_0} (2d_k)^2 + 1 - \sum_{\alpha \in Q'_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1: \\ s(\alpha)=j_0 \text{ y } t(\alpha) \in Q'_0 \\ s(\alpha) \in Q'_0 \text{ y } t(\alpha)=j_0}} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)} \\
 &= q'(2d) + 1 - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1: \\ s(\alpha)=j_0 \text{ y } t(\alpha) \in Q'_0 \\ s(\alpha) \in Q'_0 \text{ y } t(\alpha)=j_0}} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}
 \end{aligned}$$

Notar que como existe una flecha entre i_0 y j_0 (no importa la dirección), la última suma tiene el término $x_{j_0} \cdot x_{i_0} = 2d_{i_0} > 1$. Luego $q(x) < q'(2d) = 4q'(d) = 0$, absurdo también. Por lo tanto q es semidefinida positiva $\iff Q$ es Dynkin o euclideo.

2. Ya demostramos que si Q era Dynkin, entonces q era definida positiva. Demostremos la vuelta. Supongamos que q es definida positiva y demostremos que Q es Dynkin. Veamos primero que Q no puede tener lazos: Si tuviera, existe i_0 un vértice y una flecha $\alpha : i_0 \rightarrow i_0$. Entonces evaluando q en el vector e_{i_0} , tengo $q(e_{i_0}) = 1^2 - \#\{\text{cantidad de flechas } \beta : i_0 \rightarrow i_0\} \leq 0$. Por lo tanto, q no sería definida positiva, absurdo. Luego puedo suponer Q sin lazos. Entonces es semidefinida positiva y por lo tanto Q o es euclideo o es Dynkin. Pero para los euclideos vimos al comienzo que existe un vector d tal que $q(d) = 0$. Por lo tanto Q debe ser Dynkin. \square

6.2 Raíces de una forma cuadrática

Definición 6.17. Sea q una forma cuadrática semidefinida positiva. Un elemento $x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ es una **raíz real** si $q(x) = 1$ y es una **raíz imaginaria** si $q(x) = 0$. Llamamos Φ al conjunto de raíces.

Si Q no tiene lazos, todos los e_i son raíces reales, donde identifico a e_i con el vector que tiene 1 en i , y 0 en todos los otros vértices. En general, cualquier raíz se puede escribir como $\sum_i a_i e_i$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ de forma única.

Una raíz se dice **positiva** si $a_i \geq 0 \forall i$ y **negativa** si $a_i \leq 0 \forall i$. Noto a Φ_+ como el conjunto de raíces positivas y Φ_- el conjunto de raíces negativas.

Lema 6.18. Sea Q conexo y sin lazos.

1. e_i es una raíz real $\forall i \in Q_0$
2. Si α es una raíz, $-\alpha$ es una raíz.
3. Si α es una raíz de un carcaj euclideo y δ es la raíz imaginaria que escribimos en la demostración del teorema 6.16, entonces $\alpha - \delta$ es una raíz.
4. Si q es semidefinida positiva, entonces cada raíz o es positiva, o es negativa, $\Phi = \Phi_- \cup \Phi_+$ y $\Phi_- = -\Phi_+$.

Demostración. 1. $q(e_i) = 1^2 - 0 = 1$.

$$2. q(-\alpha) = (-1)^2 q(\alpha) = q(\alpha)$$

3.i. Supongo α es una raíz imaginaria. Si $q(\alpha) = 0$ entonces $\alpha = \lambda\delta$ por el lema 6.15. Luego $\alpha - \delta = (\lambda - 1)\delta$. Por lo tanto $q(\alpha - \delta) = (\lambda - 1)^2 q(\delta) = 0$. Luego $\alpha - \delta$ es una raíz imaginaria.

3.ii. Supongo α es una raíz real.

$$\begin{aligned} q(\alpha) &= q((\alpha - \delta) + \delta) = \langle \alpha - \delta, \delta \rangle + q(\alpha - \delta) + q(\delta) \\ 1 &= \langle \alpha - \delta, \delta \rangle + q(\alpha - \delta) + 0 \end{aligned}$$

Como $\langle x, \delta \rangle = 0 \forall x$ entonces $\langle \alpha - \delta, \delta \rangle = 0$. Luego $1 = q(\alpha - \delta)$. Por lo tanto $\alpha - \delta$ es una raíz real.

4. Empiezo por suponer x una raíz imaginaria. Como q es semidefinida positiva, por el teorema anterior Q es euclideo o Dynkin.

Dynkin no puede ser pues en ese caso sería definida positiva y sin raíces imaginarias. Por lo tanto Q es euclideo. Pero entonces $x = \lambda \cdot \delta$ con δ una de las raíces del teorema 6.16, Luego todas las coordenadas de x tienen el mismo signo.

Supongo x una raíz real. Sea $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Si defino $x^+ = \sum_{i:x_i \geq 0} x_i e_i$, $x^- = \sum_{i:x_i < 0} x_i e_i$, entonces $x = x^+ + x^-$. Completando las coordenadas faltantes por cero, puedo considerar a x^+ y x^- como vectores de \mathbb{Z}^n . Además $\langle x^+, x^- \rangle = 2 \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i^+ x_i^-}_{=0} - \sum_{i=1}^n \sum_{j:j \neq i} \underbrace{n_{i,j} x_i^+ x_j^-}_{\leq 0} \geq 0$.

Entonces

$$\begin{aligned} 1 = q(x) &= q(x^+ + x^-) = \langle x^+, x^- \rangle + q(x^+) + q(x^-) \geq q(x^+) + q(x^-) \\ 1 &\geq q(x^+) + q(x^-) \geq 0 \end{aligned}$$

Como $q(x^+)$ y $q(x^-)$ son dos números enteros mayores o iguales a cero tengo tres opciones:

- 1) $q(x^+) = 0, q(x^-) = 0$
- 2) $q(x^+) = 1, q(x^-) = 0$
- 3) $q(x^+) = 0, q(x^-) = 1$

Si supongo que x tiene coordenadas positivas y negativas, entonces x^+ y x^- son no nulos. Por lo tanto en los tres casos concluyo que Q no puede ser Dynkin, y entonces es euclideo. Luego o existe λ tal que $x^+ = \lambda\delta$ o $x^- = \lambda\delta$. Pero entonces en el primer caso eso significa que x^+ tiene todas sus coordenadas no nulas y por lo tanto $x^- = 0$, y en el segundo que x^- tiene todas sus coordenadas no nulas y por lo tanto $x^+ = 0$. Absurdo. Por lo tanto $x^+ = 0$ o $x^- = 0$. Luego $\Phi = \Phi_- \cup \Phi_+$ y por 2, $\Phi_- = -\Phi_+$. \square

Corolario 6.19. *Si Q es de tipo Dynkin $\implies q$ tiene finitas raíces y son todas reales*

Demostración. Que no hay raíces imaginarias es obvio pues q es definida positiva. Sea α una raíz real, que puedo suponer positiva. Sea \tilde{Q} el grafo euclideo que extiende a Q , y denoto $n+1$ el nuevo vértice. Defino $\tilde{\alpha}$ el siguiente vector dimensión $\tilde{\alpha}_k = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } k \in Q \\ 0 & \text{si } k = n+1 \end{cases}$ y sea \tilde{q} la forma cuadrática semidefinida positiva de \tilde{Q} . Luego $\tilde{q}(\tilde{\alpha}) = q(\alpha) = 1$. Luego $\tilde{\alpha}$ es una raíz real de \tilde{q} , y por lo tanto $\tilde{\alpha} - \delta$ es una raíz real de \tilde{q} . Entonces mirando el vértice $n+1$, $\tilde{\alpha}_{n+1} - \delta_{n+1} = -\delta_{n+1} < 0$. Pero como $\tilde{\alpha} - \delta$ es una raíz, y \tilde{q} es semidefinida positiva, y en la coordenada $n+1$ es negativa, $\tilde{\alpha} - \delta$ es negativa. por lo tanto $\tilde{\alpha}_i - \delta_i \leq 0 \forall i \iff \tilde{\alpha}_i \leq \delta_i \forall i \iff \alpha_i \leq \delta_i \forall i \in Q$. Luego $\alpha_i \in \{0, \dots, \delta_i\} \forall i \in Q$. Por lo tanto hay sólo finitas posibilidades para α . \square

Se puede probar ([Sch14]) que no todas las posibilidades son raíces, y de hecho que la cantidad de raíces de un Dynkin están dadas por los siguientes números:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}_n & \mathbb{D}_n & \mathbb{E}_6 & \mathbb{E}_7 & \mathbb{E}_8 \\ \frac{n(n+1)}{n} & n^2 - n & 36 & 63 & 120 \end{array}$$

6.3 Teorema de Gabriel

En la última sección demostraremos el famoso teorema de Gabriel. Empezamos con un lema:

Lema 6.20. *Sea Q conexo, M una representación de Q y $d = d_M$ su vector dimensión. Entonces $\text{codim } \mathcal{O}_M = \dim \text{End}(M) - q(d) = \dim \text{Ext}^1(M, M)$*

Demostración. Por el lema 6.7, $\dim \mathcal{O}_M = \dim G_d - \dim \text{Aut}(M)$. Por lo tanto, $\dim E_d - \dim \mathcal{O}_M = \dim E_d - \dim G_d + \dim \text{Aut}(M)$. Luego $\text{codim } E_d = \dim E_d - \dim G_d + \dim \text{Aut}(M)$.

Claramente $\text{Aut}(M)$ es un subgrupo abierto de $\text{End}(M)$, pues es el subgrupo de las transformaciones con determinante no nulo, entonces $\dim \text{Aut}(M) = \dim \text{End}(M)$. Entonces $\text{codim } E_d = \dim E_d - \dim G_d + \dim \text{End}(M)$. Recordemos que $\dim G_d = \sum d_i^2$. Y que $\dim E_d = \sum_{\alpha} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}$. Por lo tanto $\dim E_d - \dim G_d = -q(d)$. Luego $\text{codim } E_d = \dim \text{End}(M) - q(d) = \dim \text{Ext}^1(M, M)$ por el teorema 6.14. \square

Corolario 6.21. *Sea d un vector dimensión. Si $q(d) \leq 0 \implies$ la cantidad de órbitas en E_d es infinita. Es decir, hay infinitas clases de isomorfismo con el mismo vector dimensión d .*

Demostración. Supongo que solamente hay finitas órbitas en E_d . Por lo tanto, por el lema 6.7, una de ellas, M_0 , tiene dimensión igual a la dimensión de E_d . Entonces $0 = \text{codim } \mathcal{O}_{M_0} = \dim \text{End}(M_0) - q(d) \geq \dim \text{End}(M_0) \geq 1$. Absurdo. Por lo tanto la cantidad de órbitas debe ser infinita. \square

Corolario 6.22. Si Q tiene lazos, es de tipo de representación infinita.

Demostración. Como Q tiene lazos, existe i_0 un vértice y una flecha $\beta : i_0 \rightarrow i_0$. Por lo tanto $q(e_{i_0}) \leq 0$. Entonces existen infinitas representaciones no isomorfas con vector dimensión e_{i_0} . Pero estas tienen todas dimensión 1, entonces son todas indescomponibles. Luego Q tiene infinitas representaciones indescomponibles no isomorfas. \square

Ejemplo 6.23. Sea Q el quiver $1 \curvearrowright$. Entonces su álgebra de caminos, como ya vimos, es $k[x]$. Existen infinitos $k[x]$ módulos indescomponibles no isomorfos de la misma dimensión. En efecto, para todo n , las representaciones $V_\lambda = k^n$ junto con el producto dado por la matriz A_λ

$$x \cdot v := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \cdots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

son $k[x]$ -módulos. Si $\lambda \neq \lambda'$, V_λ y $V_{\lambda'}$ son no isomorfas, y además son indescomponibles por la unicidad de la forma de Jordan.

Solamente vamos a necesitar un lema más antes de demostrar el teorema principal del trabajo:

Lema 6.24. Sea M una representación indescomponible de Q . Si $\dim \text{End}(M) > 1$, entonces existe una subrepresentación M' tal que $\dim \text{End}(M') = 1$ y $\dim \text{Ext}^1(M', M') > 0$.

Demostración. Por hipótesis y por el teorema 3.29, existe g endomorfismo de M nilpotente y no nula. Más aún, podemos tomar a g tal que $g^2 = 0$. Y entre todos los nilpotentes tal que $g^2 = 0$ tomar el que tiene $\text{Im}(g)$ de dimensión mínima. Como $g^2 = 0$ entonces $\text{Im}(g) \subseteq \text{Ker}(g)$. Descompongo $\text{Ker}(g)$ como suma de indescomponibles no nulos: $\text{Ker}(g) = N_1 \oplus \cdots \oplus N_t$.

a) Primero voy a demostrar que $\text{Ext}^1(\text{Im}(g), N_{s_0}) \neq 0$ para todo sumando directo no nulo de $\text{Ker}(g)$. En efecto, como $\bigoplus_{j \neq s_0} N_j \subseteq \text{Ker}(g)$, tenemos un morfismo sobreyectivo $\frac{M}{\bigoplus_{j \neq s_0} N_j} \xrightarrow{\bar{g}} \text{Im}(g)$. Y además si considero $\pi : M \rightarrow \frac{M}{\bigoplus_{j \neq s_0} N_j}$, $\pi(N_{s_0}) \cong N_{s_0}$. Luego tenemos una sucesión exacta corta.

$$0 \longrightarrow N_{s_0} \longrightarrow \frac{M}{\bigoplus_{j \neq s_0} N_j} \xrightarrow{\bar{g}} \text{Im}(g) \longrightarrow 0$$

Si $\text{Ext}^1(\text{Im}(g), N_{s_0}) = 0$, esta sucesión se parte. Luego $\frac{M}{\bigoplus_{j \neq s_0} N_j} = \text{Im}(g) \oplus N_{s_0}$. Entonces

$$M = \overbrace{\text{Im}(g)}^{\neq 0} \oplus \overbrace{N_{s_0}}^{\neq 0} \oplus \left(\bigoplus_{j \neq s_0} N_j \right), \text{ lo que contradice que } M \text{ sea indescomponible.}$$

Por lo tanto $\text{Ext}^1(\text{Im}(g), N_{s_0}) \neq 0$.

b) Sea $p_s : \text{Ker}(g) \rightarrow N_s$ la proyección. A continuación, demuestro que existe un sumando directo N_{s_0} tal que $p_{s_0}(\text{Im}(g)) \neq 0$. En efecto, como $\text{Im}(g) \neq 0$, existe $0 \neq x \in \text{Im}(g)$. Entonces $x \in \text{Ker}(g)$, luego $x = x^1 + \cdots + x^t$. Como $x \neq 0$, existe s_0 tal que $x^{s_0} \neq 0$. Por lo tanto $p_{s_0}(x) = x^{s_0} \neq 0$. Luego $p_{s_0}|_{\text{Im}(g)} \neq 0$. Voy a llamar N a N_{s_0} y p a esa proyección restringida a $\text{Im}(g)$: $p := p_{s_0}|_{\text{Im}(g)} : \text{Im}(g) \rightarrow N$. Entonces si llamo $i := \iota \circ p \circ g : M \rightarrow M$,

$$\begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ M & \xrightarrow{g} & \text{Im}(g) & \xrightarrow{p} & N & \xleftarrow{\iota} & M \end{array}$$

con $\iota : N \hookrightarrow M$ la inclusión, i es un endomorfismo no nulo. Además es nilpotente: $i^2 = i \circ i = 0$. En efecto, si $x \in M$, $i(x) = p(g(x)) \in N \subseteq \text{Ker}(g)$. Luego $i(i(x)) = p \circ g(i(x)) = 0$. Por lo tanto $i^2 = 0$ y entonces $\dim \text{Im}(g) \leq \dim \text{Im}(i)$. Pero $\text{Im}(i) = \text{Im}(p)$. Y además $\dim \text{Im}(p) \leq \dim \text{Im}(g)$. Luego $\dim \text{Im}(p) \leq \dim \text{Im}(g) \leq \dim \text{Im}(i) = \dim \text{Im}(p)$. Luego $\dim \text{Im}(p) = \dim \text{Im}(g)$, Por lo tanto p es inyectiva.

c) Considero la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(g) \xrightarrow{p} N \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(p) \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor Ext tenemos una sucesión exacta larga...

$$\dots \longrightarrow \text{Ext}^1(N, N) \longrightarrow \text{Ext}^1(\text{Ker}(g), N) \longrightarrow \text{Ext}^2(\text{Coker}(p), N) \longrightarrow \dots$$

Como $\text{Ext}^2(\text{Coker}(p), N) = 0$ pues Q no tiene relaciones, y $\text{Ext}^1(\text{Ker}(g), N) \neq 0$, entonces $\text{Ext}^1(N, N) \neq 0$. Como $\dim N < \dim M$, $\dim \text{End}(N) < \dim \text{End}(M)$. Si $\dim \text{End}(N) = 1$, listo. Sino, como N es indescomponible, puedo reemplazar N por M y proceder por inducción. \square

Teorema 6.25. (Gabriel) Sea Q un carcaj conexo. Entonces:

1. Q es de tipo de representación finito $\iff Q$ es de tipo \mathbb{A}, \mathbb{D} o \mathbb{E}_i ($i \in \{6, 7, 8\}$).
2. Si Q es de tipo \mathbb{A}, \mathbb{D} o \mathbb{E}_i , el vector dimensión induce una biyección ψ del conjunto de isoclases de representaciones indescomponibles de Q al conjunto de raíces positivas. En otras palabras, una representación indescomponible queda unívocamente determinada por su vector dimensión.

Demostración. Empezamos por 2. Noto Ind_Q al conjunto de representaciones indescomponibles de Q y defino $\psi : \text{Ind}_Q \longrightarrow \Psi_+$ como $\psi(M) := \underline{\dim} M$. Afirimo que ψ es una función bien definida y es biyectiva.

Buena definición: Sea M indescomponible. Quiero ver que $\underline{\dim} M$ es una raíz de q . Como q va ser definida positiva, la única posibilidad es que sea una raíz real. Usando la fórmula $\dim \text{End}(M) - q(d) = \dim \text{Ext}^1(M, M)$, tengo que $q(d) = \dim \text{End}(M) - \dim \text{Ext}^1(M, M)$. Entonces alcanza con probar que $\dim \text{End}(M) = 1$ y $\dim \text{Ext}^1(M, M) = 0$. Supongo que $\dim \text{End}(M) > 1$. Entonces por el lema anterior existe M' tal que $\dim \text{End}(M') = 1$ y $\dim \text{Ext}^1(M', M') > 0$. Sea $d' = \underline{\dim} M'$. Luego, por el lema 6.21 tengo una igualdad $1 - q(d') = \dim \text{Ext}^1(M', M') \geq 1$. Luego $0 \geq q(d')$. Absurdo pues q es definida positiva al ser Q de tipo Dynkin. Luego $\dim \text{End}(M) = 1$. Entonces de nuevo por el lema 6.21, $1 - q(d) = \dim \text{Ext}^1(M, M)$. Como $q(d) \geq 1$, $1 - q(d) = \dim \text{Ext}^1(M, M) \leq 0$. Luego $\text{Ext}^1(M, M) = 0$.

Inyectividad: Sea R una representación indescomponible de Q con vector dimensión d . Ya vimos en la primera parte que $\text{End}(R) \cong k$ y que d es una raíz imaginaria de q . Luego $\text{codim } \mathcal{O}_R = 1 - q(d) = 1 - 1 = 0$. por lo tanto $\mathcal{O}_R = E_d$ para toda representación indescomponible de Q . Luego dos representaciones indescomponibles con el mismo vector dimensión tienen órbitas iguales, y por lo tanto son isomorfas.

Sobreyectividad: Sea d una raíz real positiva de q Luego $d_i \geq 0 \forall i$. Trivialmente, al menos una representación con vector dimensión d existe ($M_i = d_i \forall i, \varphi_\alpha = 0 \forall \alpha$). Sea M una representación

tal que $\dim M = d$ y que $\dim \mathcal{O}_M$ sea maximal. Afirmo que M es indescomponible. Voy a usar la equivalencia del teorema 3.29 y demostrar que $\text{End}(M)$ es local. Para eso, usando la fórmula $\dim \text{End}(M) - q(d) = \dim \text{Ext}^1(M, M)$, como $q(d) = 1$, alcanza con probar que $\dim \text{Ext}^1(M, M) = 0$. Eso implica que $\text{End}(M) \cong k$, que es local.

Supongo $M = M_1 \oplus M_2$ con M_1 indescomponible no nulo y $M_2 \neq 0$. Luego $\text{Ext}^1(M, M) = \text{Ext}^1(M_1, M_1) \oplus \text{Ext}^1(M_1, M_2) \oplus \text{Ext}^1(M_2, M_1) \oplus \text{Ext}^1(M_2, M_2)$. Supongo que $\text{Ext}^1(M_1, M_2) \neq 0$. Entonces existe una sucesión exacta corta que no se parte

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow N \rightarrow M_2 \rightarrow 0$$

Por lo tanto, por el lema 6.8, $\dim \mathcal{O}_{M_1 \oplus M_2} < \dim \mathcal{O}_N$, absurdo. Por lo tanto $\text{Ext}^1(M_1, M_2) = 0$. Análogamente $\text{Ext}^1(M_2, M_1) = 0$. Además M_1 es indescomponible de un Dynkin. Por lo visto en la buena definición, $\text{Ext}^1(M_1, M_1) = 0$. Luego $\text{Ext}^1(M, M) \cong \text{Ext}^1(M_2, M_2)$ con $\dim M_2 < \dim M$. Por inducción, $\text{Ext}^1(M, M) = 0$ y entonces $\dim \text{End}(M) = q(d) = 1$. Luego $\text{End}(M) \cong k$ y es local y por lo tanto M indescomponible.

1. Si Q es Dynkin, la cantidad de isoclases de representaciones indescomponibles es igual a la cantidad de raíces positivas de q , que por el corolario 6.20 es finita.

Supongo ahora Q es de tipo de representación finita. Entonces Q no tiene lazos por el corolario 6.22. Afirmo que q es definida positiva. Supongo existe x_0 vector dimensión tal que $q(x_0) < 0$. Luego por el corolario 6.21, la cantidad de órbitas en E_{x_0} es infinita. Por lo tanto existen infinitas representaciones no isomorfas con el mismo vector dimensión. Por Krull Schmidt, esto sólo puede pasar si la cantidad de indescomponibles no isomorfos también es infinita. Absurdo. \square

Bibliography

- [AR75] A. M. Auslander, I. Reiten, *Representation theory of artin algebras III almost split sequences* Communications in Algebra, vol. 3, 1975, pp. 239–294.
- [ASS06] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Vol. 1, Cambridge, 2006, pp. 28-30.
- [BB81] R. Bautista y S. Brenner, *On the number of terms in the middle of an almost split sequence*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 903, Springer, 1981, pp. 1-8.
- [Bri00] M. Brion, *Representations of quivers*. 2000.
- [Gab72] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*. Manuscripta Mathematica, vol. 6, Springer, 1972, pp. 71-103.
- [MCR87] J.C. McConnell, J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*. AMS, 1987, pp. 249.
- [Sch14] R. Schiffler, *Quiver Representations*. Springer, 2014.
- [SY12] A. Skowroński, K. Yamagata, *Frobenius Algebras I: Basic representation theory*. European Mathematical Society, 2012.