ALGEBRA III

Práctica 6

1. Determinar la única subextensión cuadrática de $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$ (p primo distinto de 2).

2. (i) Demostrar que toda extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$ está contenida en una extensión ciclotómica.

   (ii) En cada uno de los siguientes casos, exhibir una extensión ciclotómica $E/\mathbb{Q}$ tal que $F \subseteq E$:

   a) $F = \mathbb{Q}[\sqrt{6}]$ *b)* $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{7}]$ *c)* $F = \mathbb{Q}[\sqrt{-21}]$

   d) $F/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $X^{10} + 3X^8 - X^2 - 3$

3. Sea $E/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $X^3 + X + 1$. Probar que $X^4 - 6X^2 + 40$ es reducible en $E[X]$.

4. Encontrar las subextensiones de $\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q}$ y de $E/\mathbb{Z}_p$, siendo E un cuerpo de descomposición de $X^8 - 1$.

5. Para cada primo positivo p, caracterizar $G(E, \mathbb{Q}(\xi_p))$, donde E es cuerpo de descomposición de $f = X^{10} - X^5 + 1$.

6. Sea p primo y $f = X^5 + pX^3 + p$. Si $E/\mathbb{Q}$ es el cuerpo de descomposición de f, probar que $G(E/\mathbb{Q})$ contiene subgrupos de orden 2 no invariantes.

7. Sea K un cuerpo, $f \in K[X]$ de grado n y E cuerpo de descomposición de f. Probar que si $G(E, K) \simeq S_n$, entonces f es irreducible en $K[X]$.

8. Probar que:

   (i) D_n es resoluble.

   (ii) Si G es un grupo simple y resoluble, entonces $G \simeq \mathbb{Z}_p$ para algún primo p.

9. Mostrar explícitamente que las siguientes extensiones son radicales:

   (i) $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, i + \sqrt{3}\right)/\mathbb{Q}$

   (ii) $K(t_1, t_2)/K(s_1, s_2)$, con K cuerpo de característica 0 , $\{t_1, t_2\}$ variables independientes sobre K y $\{s_1, s_2\}$ los polinomios simétricos elementales.

   (iii) $E/\mathbb{Q}$ cuerpo de descomposición de $f = (X^4 - 2)(X^2 - 5)$.

10. (i) Sea p primo. Sea $H \subseteq S_p$ subgrupo que contiene una transposición y una permutación de orden p. Probar que $H = S_p$.

    (ii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducible de grado p (primo) y $E \subseteq \mathbb{C}$ cuerpo de descomposición de f. Probar que si f tiene exactamente 2 raíces no reales en $\mathbb{C}$, entonces $G(E/\mathbb{Q}) \simeq S_p$.