

1	2	3	4	5	Nota

**Matemática 3 (Complementos) – RECUPERATORIO DEL SEGUNDO PARCIAL (19/03/08)**

APELLIDO Y NOMBRE:

Nº. DE LIBRETA:

CARRERA:

- (1) • Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Calcular  $\det(-A)$  en función de  $\det(A)$ .  
 • Probar que si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es antisimétrica (i.e.  $A^t = -A$ ) y  $n$  es **impar**, entonces  $\det(A) = 0$ .

- (2) Determinar, justificando, todos los valores de  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 3 & 4 & a & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable sobre  $\mathbb{R}$  y todos los valores de  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales es diagonalizable sobre  $\mathbb{C}$  (**no** se pide calcular para esos valores una matriz  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  es diagonal.)

- (3) Supongamos que la población de cierta área metropolitana se mantiene constante, pero que hay movimiento año a año de gente entre la ciudad y los suburbios. Se observa que al cabo de cada año  $k + 1$  el 20% de la gente que vivía en la ciudad a fines del año  $k$  se mudó a los suburbios (el 80 restante se queda en la ciudad) y el 10 % de la gente que vivía en los suburbios a fines del año  $k$  se mudó a la ciudad (el 90 restante se queda en los suburbios). Llamemos  $x_k$  al número de habitantes de los suburbios y a  $y_k$  al número de habitantes de la ciudad al cabo del  $k$ -ésimo año. El proceso se describe por medio de

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ .
- Calcular qué proporción de habitantes termina habiendo en los suburbios y en la ciudad al cabo de una cantidad suficiente de años.

- (4) Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (5) Se define la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Determinar una fórmula general para el término  $a_n, \forall n \in \mathbb{N}_0$ .