Ecuaciones Polinomiales y Algoritmos 2006

Programa

1.– Polinomios en una variable con coeficientes en un cuerpo. Máximo común divisor y factorización única (Repaso). Raíces en $\mathbb{R}[X]$: Algoritmos de Descartes y Sturm para determinar el número de raíces reales. Equivalencia de las factorizaciones en $\mathbb{Q}[X]$ y $\mathbb{Z}[X]$: Polinomios primitivos, Lema de Gauss, Criterio de Eisenstein.

2.– Polinomios en varias variables. Factorización Unica. Polinomios irreducibles.

3.– Ideales de $K[X_1, \ldots, X_n]$. Ideales monomiales y el Lema de Dickson. Ordenes monomiales. Teorema de la base de Hilbert (Noetherianidad). Algoritmo de división de Hironaka en $K[X_1, \ldots, X_n]$.

4.– Bases de Gröbner. Propiedades. Algoritmo de Buchberger de construcción de una base de Gröbner. Aplicación a los problemas de pertenencia de un polinomio a un ideal y representación. Comparación con el punto de vista clásico. Teoremas de Eliminación.

5.– Variedades en K^n. Las correspondencias $I \mapsto V(I)$ y $V \mapsto I(V)$. La Resultante de dos polinomios en una variable. El Discriminante. Teoremas de Extensión. Teorema de los ceros de Hilbert. Ideales radicales y la correspondencia ideal radical de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$–variedad de ceros en $\mathbb{C}^n$.

6.– Sistemas de ecuaciones polinomiales sin soluciones en $\mathbb{C}^n$. Sistemas con finitas soluciones en $\mathbb{C}^n$. Operaciones con ideales. La clausura de Zariski de la proyección de una variedad.

7.– Cocientes de anillos polinomiales. El teorema Chino del Resto. Ideales radicales cero-dimensionales y la dimensión el espacio vectorial cociente.

8.– Ideales cocientes. Ideales irreducibles y primarios. Descomposición primaria en A con A anillo noetheriano. Componentes aisladas e inmersas. Unicidad de los primos asociados y de las componentes aisladas.

9.– El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Ideales homogeneos y variedades proyectivas. El teorema de los Ceros de Hilbert proyectivo. La correspondencia entre ideales radicales homogeneos propiamente contenidos en $(X_0, \ldots, X_n)$ y variedades proyectivas no vacías. Afinización y Homogeneización. La clausura proyectiva de una variedad afín. El teorema de Bézout para curvas en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Bibliografía

– Adams W., Loustaunau P. : *An introduction to Gröbner Bases.* Graduate Studies in Mathematics, AMS, 1994.

– Akritas A. : *Elements of Computer Algebra with applications.* Wiley&Sons, 1989.

– Becker T. - Weispfenning V. : *Gröbner bases. A computational Approach to Commutative Algebra.* Springer-Verlag, 1993.

– Cox D. - Little J. - O'Shea D. : *Ideals , Varieties and Algorithms : An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1992.

– Cox D. - Little J. - O'Shea D. : *Using Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, 1998.

– von zur Gathen J. - Gerhard J. : *Modern Computer Algebra.* Cambridge University Press, 1999.

– Geddes K. - Czapor S. - Labahn G. : *Algorithms for Computer Algebra.* Kluwer Academic Publishers, 1992.

– Lejeune-Jalabert M. : *Effectivité des Calculs Polynomiaux.* Cours de DEA. Institut Fourier, Univ. Grenoble 1, 1986.

– Mishra, B. : *Algorithmic Algebra.* Springer-Verlag, 1993.

– Van der Waerden, B.L. : *Modern Algebra.* Ungar Publishing Co., New York, 1969.