

Ecuaciones Polinomiales y Algoritmos

Programa

- 1.– Polinomios en una variable con coeficientes en un cuerpo. Máximo común divisor y factorización única (Repaso). Raíces en $\mathbb{R}[X]$: Algoritmos de Descartes y Sturm para determinar el número de raíces reales. Equivalencia de las factorizaciones en $\mathbb{Q}[X]$ y $\mathbb{Z}[X]$: Polinomios primitivos, Lema de Gauss, Criterio de Eisenstein.
- 2.– Polinomios en varias variables. Factorización Unica. Polinomios irreducibles. Ideales de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ y Variedades en \mathbb{K}^n . Las correspondencias $I \mapsto V(I)$ y $V \mapsto I(V)$.
- 3.– Ordenes monomiales y Algoritmo de división de Hironaka en $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Ideales monomiales. El Lema de Dickson y el teorema de la base de Hilbert (Noetherianidad).
- 4.– Bases de Gröbner. Propiedades. Algoritmo de Buchberger de construcción de una base de Gröbner. Aplicación a los problemas de pertenencia de un polinomio a un ideal y representación. Comparación con el punto de vista clásico.
- 5.– La Resultante de dos polinomios en una variable. El Discriminante. Teoremas de Eliminación y Extensión.
- 6.– El Teorema de los ceros de Hilbert. Ideales radicales y la correspondencia ideal radical-variedad de ceros. Sistemas de ecuaciones polinomiales sin soluciones. Sistemas con finitas soluciones. Operaciones con ideales. La clausura de Zariski de la proyección de una variedad.
- 7.– Cocientes de anillos polinomiales. El teorema Chino del Resto. Ideales radicales cero-dimensionales y la dimensión el espacio vectorial cociente.
- 8.– Ideales cocientes. Ideales irreducibles y primarios. Descomposición primaria en A con A anillo noetheriano. Componentes aisladas e inmersas. Unicidad de los primos asociados y de las componentes aisladas.
- 9.– El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Ideales homogéneos y variedades proyectivas. El teorema de los Ceros de Hilbert proyectivo. La correspondencia entre ideales radicales homogéneos propiamente contenidos en (X_0, \dots, X_n) y variedades proyectivas no vacías. Afinización y Homogeneización. La clausura proyectiva de una variedad afín. El teorema de Bézout para curvas en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.
- 10.– Polinomios con coeficientes en cuerpos finitos y en \mathbb{Z} . Estructura de un cuerpo finito. El algoritmo de Berlekamp de factorización de polinomios sobre un cuerpo finito. Medida de Mahler de un polinomio. Altura de divisores de polinomios en $\mathbb{Z}[X]$. El lema de Hensel. Breve referencia a las métricas sobre \mathbb{Q} y los cuerpos p -ádicos. Algoritmo de Zassenhaus de factorización de polinomios en $\mathbb{Z}[X]$.

Bibliografía

- Adams W., Loustaunau P. : *An introduction to Gröbner Bases*. Graduate Studies in Mathematics, AMS, 1994.
- Akritas A. : *Elements of Computer Algebra with applications*. Wiley&Sons, 1989.
- Becker T. - Weispfenning V. : *Gröbner bases. A computational Approach to Commutative Algebra*. Springer-Verlag, 1993.
- Cox D. - Little J. - O’Shea D. : *Ideals , Varieties and Algorithms : An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1992.
- Cox D. - Little J. - O’Shea D. : *Using Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1998.
- von zur Gathen J. - Gerhard J. : *Modern Computer Algebra*. Cambridge University Press, 1999.
- Geddes K. - Czapor S. - Labahn G. : *Algorithms for Computer Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 1992.

- Lejeune-Jalabert M. : *Effectivité des Calculs Polynomiaux*. Cours de DEA. Institut Fourier, Univ. Grenoble 1, 1986.
- Mignotte M. : *Mathématiques pour le Calcul Formel*. Presses Universitaires Françaises, 1986.
- Mignotte M., Stefanescu D. : *Polynomials, An Algorithmic Approach*. Springer-Verlag, 1999.
- Mishra, B. : *Algorithmic Algebra*. Springer-Verlag, 1993.
- Van der Waerden, B.L. : *Modern Algebra*. Ungar Publishing Co., New York, 1969.