MATEMÁTICA 3 (Complementos) - Verano 2008

Práctica 6 - Diagonalización

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matrices A siguientes (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$). En cada caso decidir si la matriz es diagonalizable, y de ser posible, exhibir una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Como en el ejercicio anterior, discutiendo según los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k + k^2 & -k^2 \\ 0 & k + 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k + 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Demostrar que los autovalores de una matriz triangular superior (o inferior) $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ son a_{ii} , $1 \leq i \leq n$.

Ejercicio 5. Si A tiene un autovalor λ correspondiente al autovector x , demostrar que:

1. λ es autovalor de A^t .
2. Si A es inversible, $1/\lambda$ es autovalor de A^{-1} . ¿Con qué autovector?
3. la matriz kA tiene autovalor $k\lambda$, y la matriz A^n tiene autovalor λ^n , $n \in \mathbb{N}$.
4. $A + kI$ tiene autovalor $\lambda + k$, y $A^2 + A$ tiene autovalor $\lambda^2 + \lambda$.

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que para toda fila F_i , la suma de sus coeficientes es igual a 1. Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

Ejercicio 7. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar 2 matrices distintas P y $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ inversibles tales que $D = P^{-1}AP$ y $D' = Q^{-1}AQ$ sean diagonales. ¿Vale $D = D'$? ¿y $D \sim D'$?

Ejercicio 8. Sea $f : K^n \rightarrow K^n$ un proyector con $\dim(\text{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular el polinomio característico $\mathcal{X}_f$ de f .

Ejercicio 9.

1. Calcular A^n for all $n \in \mathbb{N}$ para las siguientes matrices A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Determinar en cada caso si es posible encontrar $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $B^2 = A$. ¿Y en $\mathbb{C}^{2 \times 2}$?

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-7y + z, 4y, -2x + y + 3z).$$

1. Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.
2. Calcular $f^n := f \circ f \circ \dots \circ f$ (n veces), $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 11. Se define la siguiente sucesión de números enteros de la manera siguiente:

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 2 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad \forall n \geq 0.$$

1. Determinar $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que para todo $n \geq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

2. Usando lo anterior mostrar que para todo $n \geq 0$ se tiene

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Diagonalizando la matriz A determinar el valor de a_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 12. Encontrar una fórmula general para x_n e y_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$, en función de x_0 e y_0 (ecuaciones en diferencias):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}.$$

Ejercicio 13. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

- $$\begin{cases} x'(t) = 8x(t) + 10y(t) \\ y'(t) = -5x(t) - 7y(t) \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}, \text{ con condiciones iniciales } x(0) = 3, y(0) = -1.$$

Ejercicio 14. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Probar que $A^n \rightarrow 0$ (es decir: $(A^n)_{ij} \rightarrow 0, 1 \leq i, j \leq 3$).

Ejercicio 15. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que están sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos. Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k -ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k -ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k -ésimo mes.

- Determinar $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

- Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o término del mes 0) es $(0, 0, 10000)$, o sea de ningún enfermo y 10000 sanos, calcular el número de enfermos al cabo del k -ésimo mes.
- Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0) , (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (determinarlo en función de (x_0, y_0, z_0)), es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que se enferman o se mueren pero ni se curan ni nacen nuevos individuos en el modelo).

Ejercicio 16. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo.

- Calcular el rango de A y probar que el vector $(1, \dots, 1)$ es un autovector de A . ¿A qué autovalor corresponde?
- Determinar el polinomio característico $\chi_A(t)$ de A (sin necesidad de hacer cuentas).
- Relacionar $\det(B)$ con $\chi_A(\lambda)$, y calcular $\det(B)$.

Ejercicio 17. Para todos los casos de los ejercicios anteriores donde la matriz A a diagonalizar es simétrica, determinar una matriz ortogonal U tal que $U^t A U$ es diagonal.

Ejercicio 18.

Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ unitaria tal que $\overline{U}^t A U$ sea diagonal para la matriz A siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$