MATEMATICA 3 (Complementos) - Verano 2008

Práctica 5 - Determinantes

Ejercicio 1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ con $\det(A) = 8$. Calcular $\det(3A)$ y $\det(-A)$.

Ejercicio 3. Demostrar, sin calcular, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} sen^2 a & 1 & cos^2 a \\ sen^2 b & 1 & cos^2 b \\ sen^2 c & 1 & cos^2 c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Si A es una matriz inversible tal que tanto A como A^{-1} tienen sus coeficientes enteros, ¿por qué ambos determinantes deben dar 1 ó -1 ?

Ejercicio 6. Encontrar un ejemplo de 4×4 en el que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$$

donde A, B, C, D son matrices de 2×2.

Ejercicio 7. Demostrar que las raíces de la ecuación $\det \begin{pmatrix} \lambda - a & b \\ b & \lambda - c \end{pmatrix} = 0$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$ dados, y la variable λ, son reales.

Ejercicio 8.

1. Hallar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal con $\det(A) = -1$.
2. ¿Cuánto vale el determinante de una matriz ortogonal? ¿Y el de una matriz unitaria? ¿Cuál es su rango?

Ejercicio 9. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible y en esos casos hallar la inversa.

Ejercicio 11. Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz triangular superior inversible. Mostrar, usando cofactores, que A^{-1} también es triangular superior.

Ejercicio 12. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre $\mathbb{R}$ empleando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Ejercicio 13. Dadas las funciones reales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ que satisfacen

$$\begin{cases} x_1(t) + t\,x_2(t) + t^2\,x_3(t) & = & t^4 \\ t^2\,x_1(t) + x_2(t) + t\,x_3(t) & = & t^3 \\ t\,x_1(t) + t^2\,x_2(t) + x_3(t) & = & 0 \end{cases}$$

calcular $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)$.

Ejercicio 14.

1. Calcular el área del triángulo con vértices en el $(0,0)$, $(2,2)$ y $(-1,3)$.
2. Calcular el volumen del paralelepípedo con 4 vértices en $(0,0,0)$, $(-1,2,2)$, $(2,-1,2)$ y $(2,2,-1)$. ¿Cuáles son sus otros vértices?

Aplicaciones del determinante de Vandermonde

Ejercicio 15. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.
(Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.)

Ejercicio 16. Interpolación de polinomios:
Sean $a_0, \dots, a_n \in K$ todos distintos y $b_0, \dots, b_n \in K$ cualesquiera. Probar que existe un único polinomio $P \in K[X]$ de grado menor o igual que n (o nulo) que satisface simultáneamente las condiciones

$$P(a_0) = b_0,\ P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n.$$