

MATEMATICA 3 (Complementos) - Verano 2008**Práctica 4 - Producto interno**

En lo que sigue, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno canónico si no está especificado

Ejercicio 1. Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en K^n , $n \geq 2$:

1. Si $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ para algún $u \neq 0$, entonces $v = w$.
2. Si $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$, $\forall u \in K^n$, entonces $v = w$.

Ejercicio 2.

1. Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$ tal que $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$.
2. Sea $u = (1, -1)$. Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v \rangle = 0$.
3. Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u \rangle = 0$.
4. Sean $u = (1, 2)$, $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w \rangle = 1$ y $\langle v, w \rangle = 3$. Hallar w .

Ejercicio 3. Sea la recta $S = \langle (3, 4) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S . Hallar:

1. El complemento ortogonal S^\perp de S .
2. $p(3, 4)$, $p(-4, 3)$ y $p(2, 1)$.
3. El punto más cercano de la recta S a cada uno de los puntos $(3, 4)$, $(-4, 3)$ y $(2, 1)$. y la distancia de esos puntos a la recta S .
4. Una fórmula explícita para $p(x_1, x_2)$ y la matriz $[p]_{\mathcal{E}}$ de p en la base canónica \mathcal{E} .
5. Una base ortonormal \mathcal{B} tal que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.

1. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 para obtener una base ortonormal \mathcal{B}' .
2. Calcular las coordenadas de $v = (1, 1, 1)$ y de $w = (1, 0, 0)$ en \mathcal{B}' .
3. Hallar una base ortonormal de \mathbb{R}^3 que contenga una base del plano

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

y definir explícitamente la proyección ortogonal sobre ese plano.

4. Calcular el punto de S más cercano a w , y la distancia que los separa. Idem para v .

Ejercicio 5. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(0, i, 0); (1, 0, i); (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{C}^3 para obtener una base ortonormal \mathcal{B}' .

Ejercicio 6. Para los subespacios siguientes hallar el complemento ortogonal, y definir las proyecciones ortogonales sobre esos subespacios

1. $\langle (1, 2, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$
2. $\{x \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
3. $\langle (i, 1, 1), (-1, 0, i) \rangle \subseteq \mathbb{C}^3$
4. $\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\} \subseteq \mathbb{C}^4$.

Ejercicio 7. Sea $S = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1, 0)$, y la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S .

Ejercicio 8.

1. En $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A\overline{B^t})$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales, i.e. las matrices con coeficientes todos nulos fuera de la diagonal principal.
2. En $\mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$,
 - (a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2\}$.
 - (b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1 \rangle$.
 - (c) Hallar los polinomios constantes más cercanos a X y a X^2 .

Ejercicio 9.

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica. Probar que $\text{Nu}(A)$ es ortogonal a $\text{Im}(A)$.
2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz hermitiana, es decir tal que $\overline{A^t} = A$. Probar que $\text{Nu}(A)$ es ortogonal a $\text{Im}(A)$.

Ejercicio 10. Encontrar una tercera columna para que la matriz $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sea ortogonal siendo

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & * \end{pmatrix}.$$

¿Cuántas soluciones hay? Interpretar geoméricamente.

Ejercicio 11. Encontrar una tercer fila para que la matriz $Q \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ sea unitaria siendo

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

(*) **Ejercicio 12.** La solución de longitud mínima de un sistema compatible

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que el sistema $Ax = b$ es compatible.

1. Intuitivamente: hacer un dibujo en \mathbb{R}^2 representando $\text{Nu}(A)$ como una recta y representar también el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$. Determinar quién debe ser la solución de longitud mínima (cómo debe ser con respecto a la recta $\text{Nu}(A)$).
2. Esta parte prueba que si existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$, $x \perp \text{Nu}(A)$, entonces \bar{x} es la solución de longitud mínima, i.e. $\forall x$ solución, $x \neq \bar{x}$, se tiene $\|\bar{x}\| < \|x\|$:
Usando que si $x \neq \bar{x}$, entonces existe $z \in \text{Nu}(A)$ no nulo tal que $x = \bar{x} + z$ (justificar), calcular $\|x\|^2 = \langle \bar{x} + z, \bar{x} + z \rangle$ y concluir (recordar que $\bar{x} \perp \text{Nu}(A)$).
(Observar que esto implica en particular que si existe tal \bar{x} , entonces es único.)
3. Este parte prueba que siempre existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$, $x \perp \text{Nu}(A)$ (y que es única).
 - (a) Justificar que sin pérdida de generalidad se puede suponer $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \leq n$ y $\text{Rg}(A) = m$.
 - (b) Probar que el sistema que resulta de $Ax = 0, x \perp \text{Nu}(A)$ es cuadrado y tiene como única solución el 0
 - (c) Concluir del item anterior que la matriz que describe el sistema $Ax = 0, x \perp \text{Nu}(A)$ es inversible, y por lo tanto $\forall b \in \mathbb{R}^m$ el sistema $Ax = b, x \perp \text{Nu}(A)$ tiene una única solución.
4. Encontrar la solución de longitud mínima del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle (1, 0, 1) \rangle$.