MATEMATICA 3 (Complementos) - Verano 2008

Práctica 3 - Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\ 2x_2,\ 1 + x_1)$
2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \ f(z) = \overline{z}$, considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
3. $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
4. $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3},\ \ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
5. $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^3,\ \ \phi(f) = (f(0), f'(0), f''(0))$

Ejercicio 2. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

1. $tr : K^{n\times n} \to K,\ tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$
2. $f : K^{n\times m} \to K^{r\times m},\ \ f(A) = BA$ donde $B \in K^{r\times n}$ está dado
3. $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ \ \delta(f) = f'$
4. $\Phi : C([0,1]) \to C([0,1]),\ \ \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt$
5. $\epsilon_\alpha : K[X] \to K,\ \ \epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$

Ejercicio 3.

1. Justificar que existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = (5,2)$, y que es única. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$.
2. ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$; $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$?
3. Sean f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(1,0,1) = (1,2,1),\quad f(2,1,0) = (2,1,0),\quad f(-1,0,0) = (1,2,1),$$
$$g(1,1,1) = (1,1,0),\quad g(3,2,1) = (0,0,1),\quad g(2,2,-1) = (3,-1,2).$$

   Determinar si $f = g$.

4. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1,-1,1) = (2,a,-1)$, $f(1,-1,2) = (a^2,-1,1)$ y $f(1,-1,-2) = (5,-1,-7)$.

Ejercicio 4.

1. Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las tranformaciones lineales del Ejercicio 1. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

2. Clasificar las transformaciones lineales tr y ϵ_α del Ejercicio 2 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + x_3 - x_4)$$

1. Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$
2. Calcular $f^{-1}(2, 0, 6)$

Ejercicio 6. Sea $S = < (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

1. Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$
2. Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $< (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > + (0, 1, 1, 2)$

Ejercicio 7.

1. ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_4[X]$?,
   ¿Y un monomorfismo $f : \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : tr(A) = 0\} \to \{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(1) = f'(1) = 0\}$?
2. Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathrm{Im}(f)$?
3. Sean S, $T \subset \mathbb{R}^4$ los subespacios definidos por
   $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, 2x_1 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$.
   ¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?
4. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que satisfaga $\mathrm{Nu}(f) = S$ e $\mathrm{Im}(f) = T$ en los siguientes casos:
   (a) $S = < (1, 2, 1) >$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$,
   (b) $S = < (1, -2, 1) >$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$,

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga lo pedido

1. $(1, 1, 0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$
2. $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = < (1, 1, 2) >$
3. $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$
4. $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$
5. $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$
6. $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

Ejercicio 9. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular $g \circ f$. También las matrices correspondientes a f, g y $g \circ f$ con respecto a las bases canónicas, el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 10.

1. Mostrar que la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x \cos\phi - y \operatorname{sen}\phi\,,\ x \operatorname{sen}\phi + y \cos\phi)$ con $\phi \in \mathbb{R}$ fijo es una rotación (de ángulo ϕ radianes).
2. Para $\phi = \pi$ calcular f^2
3. Hallar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \neq \mathrm{Id}$, tal que $f^3 = \mathrm{Id}$
4. Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A \neq \mathrm{Id}$ tal que $A^3 = \mathrm{Id}$ ¿Y en $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

Ejercicio 11. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$(*)$ **Ejercicio 12.** Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(B)$.

Ejercicio 13. Para los siguientes $f : V \to V$, calcular $[f]_{\mathcal{E}}$, donde $\mathcal{E}$ es la base canónica

1. $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$
2. $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $\mathcal{E} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$
3. $V = \mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2,\ x_1 + x_2)$, $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

y sean las bases $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

1. Calcular $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$
2. Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$
3. Calcular las matrices inversibles $Q \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ y $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Q[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}P$ donde $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

1. Determinar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Si A es la matriz de f en la base canónica,

   (a) ¿cuál es el rango de A?

   (b) encontrar matrices inversibles Q y P tales que

$$QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. ¿Existe una base $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{R}^3$ para la cual $[f]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Ejercicio 16. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}'$?

2. Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$

Ejercicio 17. Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + 2x_2 + x_3),$$

1. Calcular $[f]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

2. Verificar que f es un isomorfismo

3. Exhibir una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E}}P$

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$. Probar que f es un proyector (i.e. $f \circ f = f$) y encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ en la cual $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 19. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla lo pedido

1. $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = <(-2, 1, 1)>$

2. $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = <(1, 1, 1)>$

y en caso que sea posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea una matriz diagonal con solo 1 o 0 en la diagonal.