MATEMATICA 3 (Complementos) - Verano 2008

Práctica 2 - Espacios vectoriales

Los ejercicios marcados con $(*)$ son opcionales (o un poco más difíciles)

Ejercicio 1. Verificar que el conjunto de las sucesiones $K^{\mathbb{N}}$ de elementos de K,

$$K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)/a_i \in K \ \forall\, i \in \mathbb{N}\},$$

es un K-espacio vectorial, con la suma y producto por escalares "coordenada a coordenada".

Ejercicio 2. Mostrar que los siguientes son espacios vectoriales, verificando que son subespacios de espacios vectoriales conocidos. Explicitar la suma y el producto por escalares en cada caso.

1. $K_n[X] := \{f \in K[X] \ / \ f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq n\}$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijado.
2. $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ / \ A^t = -A\}$
3. $\{f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \ / \ f''(1) = f(2)\}$
4. $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ / \ \int_0^1 f(x)\ dx = 0\}$

Ejercicio 3. Probar que $\{f \in K[X] \ / \ f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \geq 2\}$ no es un subespacio de $K[X]$.

Ejercicio 4. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales

1. $K_n[X]$
2. $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\,;\ x - y = 0\}$
4. $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \ / \ A^t = -A\}$
5. $\{f \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ f(1) = 0$ y $f(2) = f(3)\}$
6. $\{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \ / \ f''' = 0\}$
7. $(*)$ $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ a_{i+1} - a_i = a_2 - a_1,\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$

$(*)$ **Ejercicio 6.** Probar que $\{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \ / \ f'' + f = 0\} = <\mathrm{sen}\, x, \cos x>$.

(Sugerencia: Probar que si $f'' + f = 0$, entonces $f'(x)\cos x + f(x)\mathrm{sen} x$ es una función constante, cuyo valor es $f(\frac{\pi}{2})$. Deducir que $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})\,\mathrm{sen} x}{\cos x}$ es una función constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

Ejercicio 7. Sea $S = < (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

1. Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.
2. Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.
3. Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

Ejercicio 8. Sea V un K-espacio vectorial y sean $v, w \in V$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

1. $< v, w > = < v, w + 5v >$.
2. $< v, w > = < v, aw + bv >, \forall\, a, b \in K$.
3. $< v, w > = < v, aw + bv >, \forall\, a \in K^\times, b \in K$.

Ejercicio 9. Decidir si los siguientes vectores son linealmente independientes sobre K.

1. $(1 - i, i)$, $(2, -1 + i)$ en $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
2. $(1 - X)^3$, $(1 - X)^2$, $1 - X$, 1 en $K[X]$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x \cos x$ en $\mathbb{R}^\mathbb{R}$
4. $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{-x}$ en $\mathbb{R}^\mathbb{R}$
5. $u = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$, $v = (0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$, $w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots)$ en $K^\mathbb{N}$

Ejercicio 10. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ es un conjunto linealmente independiente.

1. $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\}$
2. $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\}$

Ejercicio 11. Hallar una base y la dimensión de los siguientes espacios vectoriales.

1. $< (1, 4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7) > \subseteq \mathbb{R}^4$
2. $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
3. $\{f \in \mathbb{R}[X] \,/\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3$ y $f(2) = f(-1)\}$
4. $\{f \in \mathbb{R}[X] \,/\, f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3$ y f es un múltiplo de $(x^2 - 2)\}$
5. $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^\mathbb{N} \,/\, a_i = a_j,\ \forall\, i, j\}$

Ejercicio 12.

1. Probar que el conjunto $\{(1, 0, 0), (0, i, 0), (1, 1, i)\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

2. Probar que el conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

3. Probar que $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

Ejercicio 13. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del espacio vectorial indicado.

1. $\{(1,1,1,1),\ (0,2,1,1)\} \ \subseteq\ \mathbb{R}^4$
2. $\{X^3 - 2X + 1,\ X^3 + 3X\}\ \subseteq \mathbb{R}_3[X]$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ como $\mathbb{C}$-esp.vect. y como $\mathbb{R}$-esp.vect.

Ejercicio 14. Extraer una base de los siguientes espacios vectoriales, de cada uno de los sistemas de generadores dados.

1. $< (1,1,2),\ (1,3,5),\ (1,1,4),\ (5,1,1) >$
2. $< X^2 + 2X + 1,\ X^2 + 3X + 1,\ X + 2 >$
3. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ como $\mathbb{C}$-esp.vect. y como $\mathbb{R}$-esp.vect.

Ejercicio 15. Hallar la dimensión de los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, para cada $k \in \mathbb{R}$

1. $< (1,k,1),\ (-1,k,1),\ (0,1,k) >$
2. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
3. $\{x \in \mathbb{R}^3 /\, Ax = 0\}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Ejercicio 16. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$< (-2,1,6), (3,0,-8) > = < (1,k,2k), (-1,-1,k^2-2), (1,1,k) >$$

Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V. Determinar si la suma es directa.

1. $V = \mathbb{R}^3,\ \ S = \{(x,y,z)/\, 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x,y,z)/\, x + z = 0\}$
2. $V = \mathbb{R}^3,\ \ S = \{(x,y,z)/\, 3x - 2y + z = 0,\ x - y = 0\}$ y $T = < (1,1,0), (5,7,3) >$
3. $V = \mathbb{R}^3,\ \ S = < (1,1,3), (1,3,5), (6,12,24) >$ y $T = < (1,1,0), (3,2,1) >$
4. $V = \mathbb{R}[X],\ \ S = \{f \in \mathbb{R}[X]/\, f(1) = 0\}$ y $T = < 1,\ X,\ X^2,\ X^3 + 2X^2 - X,\ X^5 >$
5. $V = \mathbb{R}[X],\ \ S = \{f \in \mathbb{R}[X]/\, f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X]/\, f'(0) = f''(0) = 0\}$

Ejercicio 18. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = < (0, 1, 1) >$, siendo

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \quad \text{y} \quad T = < (1, k, 2), (-1, 2, k) >$$

Ejercicio 19. Para cada subespacio $S \subseteq V$ dado, hallar un complemento T de S

1. $S = < (1, 2, -1, 3), \, (2, 3, -2, 1), \, (0, 1, 0, 7) > \;\subseteq\; \mathbb{R}^4$
2. $S = \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} \,/\, \mathrm{tr}(A) = 0\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^{3\times3}$
3. $S = < 3, 1 + X^2 > \;\subseteq\; \mathbb{R}_4[X]$

($*$) **Ejercicio 20.**

1. Sean $S = \{A \in K^{n\times n} \,/\, A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n\times n} \,/\, A = -A^t\}$ (los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*). Probar que S y T son subespacios de $K^{n\times n}$ y $S \oplus T = K^{n\times n}$.
2. Sean $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, f$ es constante$\}$. Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 21. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

1. S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists\, v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$
2. S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^5$, $\dim S = \dim T = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$

($*$) **Ejercicio 22.** Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (i.e. un subespacio de dimensión $n - 1$).

1. Probar que $\forall\, v \notin T$, $T \oplus < v > = V$.
2. Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.
3. Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

Ejercicio 23. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ en los siguientes casos:

1. $V = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$, $v = (1, 2, -1)$ y $v = (x_1, x_2, x_3)$
2. $V = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{B} = \{3, \, X + 1, \, X^2 + 5, \, X^3 + X^2\}$, $v = 2X^2 - X^3$
3. $V = \mathbb{R}^{2\times2}$; $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Ejercicio 24. En cada uno de los siguientes casos, calcular $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, hallar las coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}$ y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}'$.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$, $v = (-1, 5, 6)$
2. $V = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = \{3, \, 1 + X, \, X^2\}$, $\mathcal{B}' = \{1, \, X + 3, \, X^2 + X\}$, $v = X$
3. $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\mathcal{B}' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$, $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$

($*$) **Ejercicio 25.** Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ dos bases de K^n. Sea M la matriz cuyas columnas son $v_1, \ldots, v_n$ y sea N la matriz cuyas columnas son $w_1, \ldots, w_n$ (ordenadamente). Probar que $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = N^{-1}M$.