

**MATEMATICA 3 (Complementos) - Verano 2008****Práctica 1 - Repaso de matrices y de sistemas de ecuaciones lineales**

En todas las prácticas,  $K = \mathbb{R}$  (los números reales) o  $\mathbb{C}$  (los números complejos)

**Ejercicio 1.** Exhibir una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $A^2 = -\text{Id}$ .

**Ejercicio 2.**

- Sean  $A, B$  y  $C \in K^{n \times n}$  con  $n \geq 2$ . Mostrar un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones (que son por lo tanto todas falsas sin más hipótesis sobre las matrices  $A, B, C$ ):
  1.  $(AB)^2 = A^2B^2$
  2.  $AB = 0 \Rightarrow A = 0$  ó  $B = 0$
  3.  $AB = AC$  y  $A \neq 0 \Rightarrow B = C$
  4.  $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$
  5.  $A^j = 0$  para algún  $j \geq 2 \Rightarrow A = 0$
  6.  $A^2 = A \Rightarrow A = 0$  ó  $A = \text{Id}$
- Dar condiciones necesarias y suficientes sobre  $A$  y  $B \in K^{n \times n}$  para que:
  1.  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
  2.  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ .

**Ejercicio 3.** Caracterizar el conjunto  $\{A \in K^{3 \times 3} / AB = BA, \forall B \in K^{3 \times 3}\}$ .

**Ejercicio 4.** ¿Es cierto que el producto de dos matrices en  $K^{n \times n}$  triangulares superiores (resp. inferiores) es triangular superior (resp. inferior)?

**Ejercicio 5.** Si  $A$  es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz  $B$ ,  $AB$  tiene una fila de ceros? (siempre que  $AB$  esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

**Ejercicio 6.** Sea  $A \in K^{n \times n}$  una matriz inversible y sean  $B, C \in K^{n \times m}$ . Probar:

- i)  $AB = AC \Rightarrow B = C$
- ii)  $AB = 0 \Rightarrow B = 0$

**Ejercicio 7.** Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa para matrices  $A, B \in K^{n \times n}$ . Justificar:

1.  $A, B$  inversibles  $\Rightarrow A + B$  inversible
2.  $A$  nilpotente (es decir,  $\exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0$ )  $\Rightarrow A$  no es inversible.

**Ejercicio 8.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales ( $K = \mathbb{R}$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 & = 6 \end{cases} & \text{ii)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = 0 \end{cases} \\ \\ \text{iii)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \end{cases} & \text{iv)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \end{cases} \end{array}$$

¿Cambia algo si  $K = \mathbb{C}$ ?

**Ejercicio 9.** Resolver los siguientes sistemas no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados a cada uno de ellos:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = 1 \end{cases} & \text{ii)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = 4 \end{cases} \\ \\ \text{iii)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = 1 \end{cases} & \text{iv)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = \alpha \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = \beta \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{array}$$

Verificar que en cada caso, el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es igual a una solución particular más el conjunto de soluciones del homogéneo asociado.

**Ejercicio 10.** Encontrar los coeficientes de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que pasa por los puntos  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  y  $(3, 0)$ .

**Ejercicio 11.** Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = \alpha \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = \beta \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = \gamma \end{cases}$$

Determinar los valores de  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  para los cuales el sistema admite solución.

**Ejercicio 12.** Determinar para qué valores de  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$  cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 & = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 & = -1 \end{cases} \quad \text{ii)} \quad \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = b \end{cases}$$

**Ejercicio 13.** Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{ii)} & A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{iii)} & A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \text{iv)} & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{v)} & A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \text{vi)} & A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

**Ejercicio 14.** Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial (i.e. no nula):

$$\text{i)} \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$