POLINOMIOS Y FACTORIZACIÓN

Primer Cuatrimestre 2007

Primer hoja de ejercicios: a ser entregada resuelta el Miércoles 2 de Mayo.

(**1**)
- Acotar inferiormente $\binom{2n}{n}$, e investigar cómo se puede aproximar $\binom{2n}{n}$.
- Probar que no existe ningún polinomio $f(n,k)$ tal que $\binom{n}{k} \le f(n,k), \ \forall\, n,k \in \mathbb{N}$.

(**2**) Probar que $\mathbb{R}$ no es isomorfo (como cuerpo) a ningún $\mathbb{Q}_p$ y que los $\mathbb{Q}_p$ tampoco son isomorfos entre sí. (Para ello probablemente tenga que investigar sobre números que son cuadrados módulo p y no módulo q)

(**3**)
- Probar que el único endomorfismo de cuerpo de $\mathbb{R}$ es la identidad.
- Probar que el único endomorfismo de cuerpo de $\mathbb{Q}_p$ es la identidad.
  Sugerencia: se puede probar que todo endomorfismo σ es continuo, i.e si $x_n \to x$ entonces $\sigma(x_n) \to \sigma(x)$ probando primero que σ manda unidades de $\mathbb{Z}_p$ a unidades de Z_p (¿ quiénes son las unidades de $\mathbb{Z}_p$?) a través del resultado siguiente (que hay que probar):
  Sea $u \in \mathbb{Q}_p$. Entonces
  u es unidad de $Z_p \iff \forall\, m$ coprimo con $p\,(p-1)$, $x^m = u$ tiene solución en $\mathbb{Q}_p$.

(**4**) Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ tal que su coeficiente principal $\mathrm{cp}\,(f) = a > 1$.
- Probar que existen $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ tales que $f = g\,h$ si y sólo si existen $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{Z}[x]$ tales que $af = \tilde{g}\,\tilde{h}$ y $\mathrm{cp}\,(\tilde{g}) = \mathrm{cp}\,(\tilde{h}) = a$. En ambas direcciones con $\mathrm{gr}\,(g) = \mathrm{gr}\,(\tilde{g}), \mathrm{gr}\,(h) = \mathrm{gr}\,(\tilde{h})$.
- Adaptar el lema de Hensel en su versión general a esta situación.

(**5**) **Para los que ya vieron Teoría de Cuerpos:** Ejemplo (Swinnerton-Dyer)
Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $p_1, \dots, p_n$ primos distintos.
Se define

$$f(x) := \prod_{\varepsilon_i \in \{1,-1\}} \big(x - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{p_i}\big).$$

- Probar que $f \in \mathbb{Z}[x]$.
- Probar que f es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.
- Probar que cualquiera sea el número primo p, el polinomio $f \bmod p$ se factoriza en $\mathbb{F}_p[x]$ como un producto de polinomios irreducibles de grado a lo sumo 2.