1	2	3	4	5	Nota

Matemática 3 (Complementos) – Primer Parcial (22/02/08)

Apellido y Nombre:

No. de libreta: Carrera:

(**1**) Sea el sistema

$$\begin{cases} x+y+az & = & 1 \\ x+ay+z & = & a \\ x+y+a^2z & = & a \end{cases}$$

Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ decidir si el sistema es compatible o incompatible y describir las soluciones.

(**2**) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ el conjunto de todas las matrices A que satisfacen que los coeficientes de cada fila suman 0, y también los de cada columna, por ejemplo las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^{3\times 3}$, y determinar una base de S.

(**3**) Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y sea $f_\lambda : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ la función definida por

$$f_\lambda(P) := \lambda\, P - X\, P'$$

donde P' denota la derivada de P y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un número real fijado.
Verificar que f_λ es una transformación lineal y determinar para qué valores del parámetro λ se tiene que f_λ es un isomorfismo.

(**4**) Sea $A \in R^{2\times 2}$ una matriz no nula que satisface $A^2 = 0$.

- Si $x \in \mathbb{R}^2$ es tal que $Ax \neq 0$, probar que $\{x, Ax\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^2$.
- Probar que existe una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}\, A\, P.$$

(**5**) Sea $p_S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre el subespacio

$$S = < (1,1,1,0), (1,0,1,0) > .$$

- Determinar la matriz $[p_s]_{\mathcal{E}}$ de p_S en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^4$.
- Determinar la distancia de $(\sqrt{2}, 1, 0, 1)$ a S.