ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Práctica 7 $*$ 1er. Cuatrimestre 2002

Teorema de los Ceros de Hilbert y Operaciones con Ideales

Dado un ideal $I \subset \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$, se recuerda que el *radical* de I es

$$\sqrt{I} := \{ f \in \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n] \ : \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^N \in I \},$$

y que I es un *ideal radical* si coincide con su radical.

1.– Sea $I \subset \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ un ideal. Probar que siempre existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $f \in \sqrt{I}$, se tiene que $f^{N_0} \in I$.

2.– Sea $I = < X^2+Y^2-1, Y-1 > \subset \mathbb{C}[X,Y]$. Hallar $f \in I(V(I))$ tal que $f \notin I$. ¿ Es I un ideal radical ?

3.– Probar que en $\mathbb{K}[X,Y]$, $\sqrt{< X^2, Y^3 >} = < X, Y >$, e $I(V(X^2,Y^3)) = < X, Y >$. Generalizar para $\sqrt{< X^n, Y^m >}$ e $I(V(X^n,Y^m))$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

4.– Si f, g son dos polinomios no constantes, ¿ es necesariamente cierto que $\sqrt{< f^2, g^3 >} = < f, g >$? ¿ Y si más aún f y g no tienen factores múltiples ?

5.– Sea $I = < XY, (X-Y)X > \in \mathbb{C}[X,Y]$. Describir $V(I)$ y $\sqrt{I}$.

6.– Determinar si $X+Y \in \sqrt{< X^3, Y^3, XY(X+Y) >}$ y si $X^2+3XZ \in \sqrt{< X+Z, X^2Y, X-Z^2 >}$. En caso afirmativo, ¿ a qué potencia hay que elevar los polinomios para meterlos en los ideales ?

7.– Probar que $< XY, XZ, YZ >$ es un ideal radical.

Dados los ideales $I, J \subset \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$, se recuerda la definición de los ideales
Suma: $I + J := \{ f+g\, ;\ f \in I, g \in J \}$.
Producto: $I\,J = < f\,g\, ;\ f \in I, g \in J >$.

8.– Sean $I = < (X+Y)^4(X^2+Y)^2(X-5Y) >$ y $J = < (X+Y)(X^2+Y)^3(X+3Y) >$.
Calcular $I+J$, $I\,J$ e $I \cap J$.

9.– Sean $f, g \in \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$.
(i) Probar que $< f > \cap < g >$ es principal (es decir, existe $h \in \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ tal que $< f > \cap < g > = < h >$). ¿ Quién es h?
(ii) Suponiendo que no se conocen las factorizaciones de f y g, ¿ cómo se hace para calcular h?
(iii) Deducir un algoritmo para calcular $\mathrm{mcd}(f;g)$ sin conocer las factorizaciones de f y g.

10.– Sean $f = X^4+X^3Y+X^3Z^2-X^2Y^2+X^2YZ^2-XY^3-XY^2Z^2-Y^3Z^2$ y $g = X^4+2X^3Z^2-X^2Y^2+X^2Z^4-2XY^2Z^2-Y^2Z^4$.
(i) Calcular $< f > \cap < g >$ y $\mathrm{mcd}(f;g)$
(ii) Calcular $< f, g > \cap < X^2+XY+XZ+YZ, X^2-XY-XZ+YZ >$.

11.– Sea $I = < f >$, $J = < g >$ ideales de $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$.
Probar que $I\,J = I \cap J \iff \mathrm{mcd}(f;g) = 1$.

12.– Sean $I, J \subset \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ ideales tales que $I + J = < 1 >$ (en ese caso se dice que I y J son *comaximales*).

Probar que $I\,J = I \cap J$.

13.– Sea $I =< X^2+Y^2+Z^2-1, X^2+Z^2-Y, X-Z > \subset \mathbb{C}[X,Y,Z]$.
(i) Describir $V(I)$.
(ii) ¿ Es I un ideal radical ?

14.– La flor de 4 pétalos
Esta es la curva de $\mathbb{R}^2$ definida por la ecuación polar $r = \text{sen}\,(2\theta)$.
(i) Usando $r^2 = x^2+y^2$, $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\text{sen}\,(\theta)$, probar que la flor de 4 pétalos está contenida en la variedad afín $V((X^2+Y^2)^3-4X^2Y^2)$.
(ii) Justificar cuidadosamente que $V((X^2+Y^2)^3-4X^2Y^2)$ está contenido en la flor de 4 pétalos. (Hay que tener cuidado pues r puede ser negativo en $r = \text{sen}\,(2\theta)$).
(iii) ¿ Se anula el polinomio $X^7-X^6Y+3X^5Y^2-3X^4Y^3-3X^2Y^3+Y^6X-Y^7-4X^3Y^2+4X^2Y^2$ sobre los puntos de la flor ? (Cuidado con la justificación si se usa el teorema de los ceros de Hilbert)

15.– ¿ Tiene el sistema :

$$\begin{cases} XZ + Y^2Z + 5X^3 + 8Y = 0 \\ XY - 2X^2 + 3Y^5 - Z^2 = 0 \\ Z^3 + X^3 + Y^4 - XYZ = 0 \end{cases}$$

soluciones comunes en $\mathbb{C}^3$?
Si las tiene, ¿ cuántas ? ¿ finitas o infinitas ? ¿ cómo describirlas ?

16.– Probar que en $\mathbb{R}$, $V(X^2+Y^2)$ es finito y sin embargo, $< X^2+Y^2 > \cap\, \mathbb{R}[X] = (0)$ y $< X^2+Y^2 > \cap\, \mathbb{R}[Y] = (0)$. ¿ Dónde falla el razonamiento hecho para $\mathbb{C}$?

17.– Shape Lemma (Lema de la Forma)
Sea $I \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ un ideal radical tal que $V(I)$ es finito, con N puntos, y supongamos además que las primeras coordenadas de todos los $x \in V(I)$ son distintas dos a dos. El objetivo del ejercicio es probar que I admite un sistema de generadores muy particular :
(i) Probar que existe un polinomio en $\mathbb{C}[X_1] \cap I$. ¿ De qué grado es el polinomio mónico puro en X_1 de menor grado en I ? Explicitar quién es y llamarlo $p_1(X_1)$.
(ii) Probar que para cada i , $2 \le i \le n$, existe en I un único polinomio de la forma $X_i - p_i(X_1)$ donde p_i es un polinomio puro en X_1 de grado menor que N .
(iii) Probar que si llamamos $J :=< p_1(X_1), X_2-p_2(X_1), \dots, X_n-p_n(X_1) >$, entonces claramente $J \subset I$, los generadores de J son la base de Gröbner reducida de J para cierto orden monomial (¿ cuál por ejplo ?) y además (no tan claramente) J es un ideal radical.
(iv) Concluir que $I = J$. Por lo tanto se ha probado que el ideal I admite el sistema de generadores $\{\, p_1(X_1), X_2-p_2(X_1), \dots, X_n-p_n(X_1)\,\}$.