

ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

PRIMER CUATRIMESTRE 2008– PRÁCTICA 7

Ideales cero-dimensionales, anillos cociente, variedades irreducibles

(1) Sea $f(X) = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \in K[X]$ con $\alpha_i \in K$ todos distintos. Se define $g_i := \prod_{j \neq i} (X - \alpha_j)$, $1 \leq i \leq n$.

- Probar que $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$ es una base de $K[X] / \langle f \rangle$.
- Dado $g \in K[X]$, determinar las coordenadas λ_i de $\overline{g} \in K[X] / \langle f \rangle$ en la base $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$, y relacionar esto con la interpolación de Lagrange.

(2) Sea $f(X) = a_n X^n + \dots + a_0 \in K[X]$ con $a_n \neq 0$. Se puede escribir :

$$\begin{aligned} f(X) &= (a_n X^{n-1} + \dots + a_1)X + a_0 \\ &= ((a_n X^{n-2} + \dots + a_2)X + a_1)X + a_0 \\ \dots &= ((\dots((a_n X + a_{n-1})X + a_{n-2})X + \dots)X + a_1)X + a_0. \end{aligned}$$

Es decir, si se define inductivamente $H_n = a_n, H_{n-1} = H_n X + a_{n-1}, H_{n-2} = H_{n-1} X + a_{n-2}, \dots, H_0 = H_1 X + a_0$, entonces, $H_0 = f$ y $\text{gr}(H_{n-i}) = i$ ($0 \leq i \leq n$).

- Probar que $\{\overline{H_1}, \dots, \overline{H_n}\}$ es una base de $K[X] / \langle f \rangle$. (Los polinomios H_i se llaman los polinomios de Horner, y satisfacen que calcular H_{n-1}, \dots, H_0 sucesivamente es la forma de evaluar un polinomio f general en 1 variable que usa la menor cantidad de productos).
- Sea $\mu_X : K[X] / \langle f \rangle \rightarrow K[X] / \langle f \rangle$ la transformación lineal “multiplicar por X ” en $K[X] / \langle f \rangle$, o sea $\mu_X(\overline{g}) = \overline{Xg}$.
 - Escribir la matriz de μ_X en la base $\{H_n, \dots, H_1\}$.
 - Determinar el polinomio característico de la transformación lineal μ_X .

(3) Probar que $\mathbb{R}[X] / \langle X^2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$; $\overline{f} \mapsto (f(0), f'(0))$ es un isomorfismo de \mathbb{R} -espacios vectoriales.

(4) Probar que:

- $\mathbb{R}[X] / \langle X^2 + 1 \rangle$ y \mathbb{C} son anillos (luego cuerpos) isomorfos.
- $K[X, Y] / \langle X \rangle$ y $K[Y]$ son anillos isomorfos.
- $K[\mathbf{X}] / \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ y K son anillos (luego cuerpos) isomorfos.

(5) Sea $I = \langle XY + Z - XZ, X^2 - Z, 2X^3 - X^2YZ - 1 \rangle \subset \mathbb{Q}[X, Y, Z]$. Determinar si I es cero-dimensional y en caso afirmativo calcular $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$.

(6) Sea $I = \langle Y + X^2 - 1, XY - 2Y^2 + 2Y \rangle \subset \mathbb{R}[X, Y]$.

- Determinar una base del \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{R}[X, Y] / I$.
- Determinar un isomorfismo entre $\mathbb{R}[X, Y] / I$ y \mathbb{R}^n para algún $n \in \mathbb{N}$.
- Escribir la tabla de multiplicación de los elementos de la base hallada (que determina la multiplicación del anillo $\mathbb{R}[X, Y] / I$) y decidir si $\mathbb{R}[X, Y] / I$ es un cuerpo.

(7) Sea $I = \langle X^2 + Y^5, X^3 + Y^4 \rangle \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Decidir si los siguientes pares de polinomios determinan la misma clase en $\mathbb{C}[X, Y] / I$: XY y 1 , XY^5 e Y^4 , Y^4 y $-X^4Y$, y $5X^2 + 7Y^2$ y $5Y^2 + 7X^2$.

(8) Sea $I = \langle X^4Y - Z^6, X^2 - Y^3Z, X^3Z^2 - Y^3 \rangle \subset K[X, Y, Z]$. Determinar una base del K -espacio vectorial $K[X, Y, Z]/I$.

(9) Sea $I = \langle XY^4 - Y^4 + 3X^3 - 3X^2, X^2Y - 2X^2, 2XY^4 - 2Y^4 - X^3 + X^2 \rangle \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Calcular \sqrt{I} .

(10) Sea $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ un ideal cero-dimensional. Probar que

$$\#\mathbf{V}_K(I) \leq \dim_K K[X_1, \dots, X_n]/\sqrt{I}$$

pero que no tiene por qué darse la igualdad si K no es algebraicamente cerrado.

(11) Sea $I \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un ideal cero-dimensional con $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I) = \{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)}\}$.

- Probar que el epimorfismo Φ visto en clase de \mathbb{C} -espacios vectoriales

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I &\rightarrow \mathbb{C}^N \\ \bar{f} &\mapsto (f(\alpha^{(1)}), \dots, f(\alpha^{(N)})) \end{aligned}$$

es un morfismo de anillos (considerando en \mathbb{C}^N la estructura natural de anillo dada por el producto coordenada a coordenada $(a_1, \dots, a_N) \cdot (b_1, \dots, b_N) := (a_1b_1, \dots, a_Nb_N)$)

- Probar que \bar{f} tiene un inverso multiplicativo en $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I$ si y solo si para $1 \leq i \leq N$, se tiene $f(\alpha^{(i)}) \neq 0$.

(12) Sea $V \subset K^n$ una variedad no vacía. Una descomposición

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_r$$

donde cada V_i es irreducible se llama una *descomposición minimal* si $V_i \not\subset V_j$ para $i \neq j$. Probar que toda variedad $V \neq \emptyset$ admite una descomposición minimal y que ésta es única salvo orden.

(13) Sean $V \subset W \subset K^n$ variedades. Probar que toda componente irreducible de V está contenida en alguna componente irreducible de W .

(14) Sea K un cuerpo infinito y sea $V \subset K^n$ una variedad tal que existen polinomios en $f_1, f_2, f_3 \in K[T]$ que satisfacen

$$V = \{(f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in k\}.$$

(Este es un ejemplo de una curva definida paramétricamente.)

- Observar que si $F : K \rightarrow K^3$ está definida como $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, entonces $V = F(K)$, y probar que $\mathbf{I}_K(V) = \{g \in K[X, Y, Z] : g \circ F = 0\}$ donde $g \circ F$ es el polinomio que consiste en reemplazar en g las variables X, Y, Z por los polinomios $f_1(T), f_2(T), f_3(T)$ respectivamente.
- Probar que $\mathbf{I}_K(V)$ es un ideal primo.

Concluir que entonces V es irreducible.

(15) Sea $I = \langle XZ - Y^2, X^3 - YZ \rangle \subset \mathbb{C}[X, Y, Z]$.

- Aplicar el teorema de extensión para calcular $V := \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$ (con $Z > Y > X$).
- Probar que V es la unión de dos componentes irreducibles: $V_1 = \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ y $V_2 = \mathbf{V}_{\mathbb{C}}(XZ - Y^2, X^3 - YZ, X^2Y - Z^2)$ (Sug: para probar que V_2 es irreducible, probar que V_2 es una curva parametrizable como en el ejercicio anterior.)