ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Primer Cuatrimestre 2006– Práctica 7

Descomposición primaria y cocientes

(**1**) Sean $I, J \subset K[X_1, \dots, X_n]$ ideales. Se define el cociente de I por J como:

$$(I : J) := \{\, f \in K[X_1, \dots, X_n] : f\, g \in I, \ \forall\, g \in J \,\}.$$

Probar que:

- $(I : J)$ es un ideal que contiene a I.
- $1 \in (I : J) \iff J \subseteq I$.
- Si $I_i, J_i,\ 1 \le i \le r$, son ideales, $(\bigcap_i I_i : J) = \bigcap_i (I_i : J)$ e $(I : \sum_i J_i) = \bigcap_i (I : J_i)$.

(**2**) Sean I y $f, f_1, \dots, f_s$ un ideal y polinomios en $K[\mathbf{X}]$ respectivamente.

- Probar que si $I \cap \langle f \rangle = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$, entonces $(I : f) = \langle g_1/f, \dots, g_t/f \rangle$.
- Deducir un algoritmo para calcular un sistema de generadores de $(I : f)$.
- Deducir un algoritmo para calcular un sistema de generadores de $(I : \langle f_1, \dots, f_s \rangle)$.

(**3**) En $K[X, Y, Z]$, sea $I := \langle X, Y \rangle\, \langle X, Z \rangle$. Probar que

$$I = \langle X, Y \rangle \cap \langle X, Z \rangle \cap \langle X, Y, Z \rangle^2$$

es una descomposición primaria minimal de I. ¿Qué componentes son aisladas y cuáles son inmersas?

(**4**) Sea $I = \langle X^2, X\, Y \rangle$ en $K[X, Y]$. Probar que para todo $a \in K$, $I = \langle X \rangle \cap \langle X^2, Y - a\, X \rangle$ es una descomposición primaria minimal de I. Así, si K es infinito, I tiene infinitas descomposiciones primarias distintas.

(**5**) Probar que en $K[X_1, \dots, X_n]$ los ideales $\mathcal{P}_i := \langle X_1, \dots, X_i \rangle$ son primos y sus potencias son primarios.

(**6**) Sea $f \in K[X]$, $\mathrm{gr}\,(f) = n$. Probar que $\{\, \overline{1}\,,\, \overline{X}\,,\, \dots \overline{X}^{n-1} \,\}$ es una base del K-espacio vectorial $K[X] \,/\, \langle f \rangle$.

(**7**) Sea $f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \in K[X]$ con $\alpha_i \in K$ todos distintos. Se define $g_i := \prod_{j \ne i} (X - \alpha_j)$, $1 \le i \le n$.

- Probar que $\{\, \overline{g_1}, \dots, \overline{g_n} \,\}$ es una base de $K[X] \;/\; \langle f \rangle$.
- Dado $g \in K[X]$, determinar las coordenadas λ_i de $\overline{g} \in K[X] \,/\, \langle f \rangle$ en la base $\{\, \overline{g_1}, \dots, \overline{g_n} \,\}$, e identificarlas.

(**8**) Sea $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 \in K[X]$ con $a_n \ne 0$. Se puede escribir :

$$\begin{aligned} f(X) &= (a_n X^{n-1} + \cdots + a_1) X + a_0 \\ &= ((a_n X^{n-2} + \cdots + a_2) X + a_1) X + a_0 \\ \cdots &= ((\dots((a_n X + a_{n-1}) X + a_{n-2}) X + \dots) X + a_1) X + a_0. \end{aligned}$$

Es decir, si se define inductivamente $H_n = a_n, H_{n-1} = H_n X + a_{n-1}, H_{n-2} = H_{n-1} X + a_{n-2}, \dots, H_0 = H_1 X + a_0$, entonces, $H_0 = f$ y $\mathrm{gr}\,(H_{n-i}) = i \quad (0 \le i \le n)$.

- Probar que $\{ \overline{H_1}, \dots, \overline{H_n} \}$ es una base de $K[X] /, \langle f \rangle$. (Los polinomios H_i se llaman los polinomios de Horner, y satisfacen que calcular $H_{n-1}, \dots, H_0$ sucesivamente es la forma de evaluar un polinomio f general en 1 variable que usa la menor cantidad de productos).
- Sea $\mu_X : K[X] / \langle f \rangle \longrightarrow K[X] / \langle f \rangle$ la transformación lineal "multiplicar por X" en $K[X] / \langle f \rangle$, o sea $\mu_X(\overline{g}) = \overline{Xg}$.
  – Escribir la matriz de μ_X en la base $\{ H_n, \dots, H_1 \}$.
  – Determinar el polinomio característico de la tranformación lineal μ_X.

(**9**) Probar que $\mathbb{R}[X] / \langle X^2 \rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;\; ; \;\; \overline{f} \mapsto (f(0), f'(0))$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}-$espacios vectoriales.

(**10**) Probar que:
- $\mathbb{R}[X] / \langle X^2 + 1 \rangle$ y $\mathbb{C}$ son anillos (luego cuerpos) isomorfos.
- $K[X, Y] / \langle X \rangle$ y $K[Y]$ son anillos isomorfos.
- $K[\mathbf{X}] / \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ y K son anillos (luego cuerpos) isomorfos.

(**11**) Sea $I = \langle Y + X^2 - 1, XY - 2Y^2 + 2Y \rangle \subset \mathbb{R}[X, Y]$.
- Determinar una base del $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}[X, Y] / I$.
- Determinar un isomorfismo entre $\mathbb{R}[X, Y] / I$ y $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
- Escribir la tabla de multiplicación de los elementos de la base hallada (que determina la multiplicación del anillo $\mathbb{R}[X, Y] \; / I$) y decidir si $\mathbb{R}[X, Y] / I$ es un cuerpo.

(**12**) Sea $I = \langle X^2 + Y^5, X^3 + Y^4 \rangle \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Decidir si los siguientes pares de polinomios determinan la misma clase en $\mathbb{C}[X, Y] / I$: XY y 1, XY^5 e Y^4, Y^4 y $-X^4Y$, y $5X^2 + 7Y^2$ y $5Y^2 + 7X^2$.

(**13**) Sea $I = \langle X^4Y - Z^6, X^2 - Y^3Z, X^3Z^2 - Y^3 \rangle \subset K[X, Y, Z]$. Determinar una base del $K-$espacio vectorial $K[X, Y, Z] / I$.

(**14**) Sea $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ un ideal. Probar que si para un orden monomial $<$ dado, el número de monomios en el complemento de $\langle M_<(I) \rangle$ es finito e igual a d, entonces es también igual a d para cualquier otro orden monomial.

(**15**) Sea $I \subset K[X_1, \dots, X_n$ un ideal cero-dimensional. Probar que

$$\#\mathbf{V}_K(I) \leq \dim_K K[X_1, \dots, X_n]/\sqrt{I}$$

pero que no tiene por qué darse la igualdad si K no es algebraicamente cerrado.

(**16**) *Ejemplo de una potencia de un primo en un anillo de polinomios que no es primario.* (**Dificil, no sé si puede salir con nuestras herramientas.)**
Sea $A := K[X_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3]$ el anillo de polinomios en 9 variables.
Consideremos la matriz $G := [X_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$, su determinante $g \in A$, y $\mathcal{M} := \langle X_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3 \rangle$.
- Probar que el ideal $\mathcal{P}$ generado por todos los menores de orden 2 de G es primo. (Puede intentar probar que $\mathbf{V}(\mathcal{P})$ es irreducible.)
- Probar que la descomposición primaria de $\mathcal{P}^2$ es:

$$\mathcal{P}^2 = (\mathcal{P}^2 + \langle g \rangle) \cap \mathcal{M}^4.$$