ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Práctica 6 $*$ 1er. Cuatrimestre 2002

Resultante, Teoremas de Eliminación y Extensión

1.– Calcular $\mathrm{Res}_X(X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 7X + 6, X^4 + X^2 + 1)$ y decidir si los dos polinomios tienen un factor en común en $\mathbb{Q}[X]$.

2.– Sea $f = aX^2 + bX + c = a(X-\alpha)(X-\beta) \in \mathbb{K}[X]$ con $a \neq 0$.
(i) Verificar que el *Discriminante* $\Delta := b^2 - 4ac$ también es igual a $a^2(\alpha - \beta)^2$, y por lo tanto reencontrar "f tiene una raíz doble $\iff \Delta = 0$".
(ii) Justificar la afirmación "$\mathrm{Res}_X(f, f') = 0 \iff \Delta = 0$". Calcular $\mathrm{Res}_X(f, f')$ y comparar con Δ.

3.– Sea $f = X^3 + pX + q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \in \mathbb{K}[X]$.
Se define el *Discriminante* de f (caso f mónico) como $\Delta(f) := (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2$. Se verifica que $\Delta(f) = 0 \iff f$ tiene una raíz múltiple.
(i) Verificar que $\Delta(f) = -4p^3 - 27q^2$. (Observar en primer término que $\Delta(f)$ es simétrico en las raíces y por lo tanto es efectivamente un polinomio en los coeficientes de f.)
(ii) Calcular $\mathrm{Res}_X(f, f')$ y comparar con $\Delta(f)$.

4.– Sea $f = a_0X^n + \cdots + a_n = a_0(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n) \in \mathbb{K}[X]$, con $a_0 \neq 0$, $n \geq 2$.
Se define el *Discriminante* de f como :

$$\Delta(f) := a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Probar que $\mathrm{Res}_X(f, f') = a_0^{n-1} \prod_i f'(\alpha_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0\, \Delta(f)$.
(Sug : $f' = a_0 \sum_i (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_{i-1})(X-\alpha_{i+1})\dots(X-\alpha_n)$.)

5.– Sean $f = 2X^2 + 3X + 1$ y $g = 7X^2 + X + 3$
(i) Usar el algoritmo de Euclides para calcular $\mathrm{mcd}(f; g)$, y hallar $r, s \in \mathbb{Q}[X]$ tales que $1 = rf + sg$.
(ii) Limpiando denominadores, relacionar (i) con $\mathrm{Res}_X(f, g)$.

6.– Sean $f = XY - 1$ y $g = X^2 + Y^2 - 4$.
(i) Mirando f y g como polinomios en X a coeficientes en Y, calcular $\mathrm{Res}_X(f, g)$.
¿ Tienen f y g un factor en común en $\mathbb{Q}[X, Y]$? ¿ Y en $\mathbb{Q}(Y)[X]$?
(ii) ¿ Existe un polinomio puro en Y en $< f, g >$?
¿ Existen $r, s \in \mathbb{Q}[X, Y]$ tales que $1 = rf + sg$? ¿ Y en $\mathbb{Q}(Y)[X]$?
(iii) Describir $V_{\mathbb{C}}(f, g)$.

7.– Sean $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ polinomios que si se miran como polinomios en la variable X_1 tienen grado ≥ 1 y son mónicos.
Probar que f y g tienen un factor en común en $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ sii $\mathrm{Res}_{X_1}(f, g)$ es el polinomio nulo.

8.– Sean $f = a_nX^n + \cdots + a_0$ y $g = b_mX^m + \cdots + b_0$. En el curso para definir la resultante $\mathrm{Res}(f, g)$, se supuso que $n, m \geq 1$ y $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.
Analizar qué pasa con la definición de la resultante si $a_n = 0$ (pero $b_m \neq 0$), o sea cuando uno no conoce a priori el grado exacto del polinomio f, pudiendo ser éste incluso constante.
¿ Qué pasa si a_n y b_m son cero ?

9.– Sean $f, g \in \mathbb{C}[X,Y]$. Probar que :
$\#V(f,g) = \infty \iff f$ y g tienen un factor común no constante en $\mathbb{C}[X,Y]$.

10.– Sea $I =< X^2+2Y^2-3, X^2+XY+Y^2-3 >\subset \mathbb{C}[X,Y]$.
(i) Caracterizar los ideales $I\cap\mathbb{C}[X]$ e $I\cap\mathbb{C}[Y]$.
(ii) Determinar $V(I)\subset\mathbb{C}^2$. ¿ Cuáles de estas soluciones pertenecen a $\mathbb{Q}^2$?

11.– Sea $I =< X^2+Y^2+Z^2-4, X^2+2Y^2-5, XZ-1 >\subset \mathbb{C}[X,Y,Z]$.
(i) Caracterizar $I\cap\mathbb{C}[Y,Z]$ e $I\cap\mathbb{C}[Z]$.
(ii) ¿ Cuántas soluciones racionales hay en $V(I)$?

12.– Sea $I =< T^2+X^2+Y^2+Z^2, T^2+2X^2-XY-Z^2, T+Y^3-Z^3 >\subset \mathbb{C}[X,Y,Z,T]$.
(i) Determinar un sistema de generadores de $I\cap\mathbb{C}[X,Y,Z]$.
(ii) Calcular una Base de Gröbner del sistema de generadores hallado, con respecto al orden “grevlex”.
(iii) Calcular ahora una base de Gröbner de I con respecto al orden producto siguiente :

$$T^\alpha X^\beta Y^\gamma Z^\delta < T^{\alpha'} X^{\beta'} Y^{\gamma'} Z^{\delta'} \iff \alpha<\alpha' \text{ o } (\alpha=\alpha' \text{ y } X^\beta Y^\gamma Z^\delta <_{\text{grevlex}} X^{\beta'} Y^{\gamma'} Z^{\delta'})$$

Comparar los polinomios de $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ de la base obtenida con los de (ii), y explicar el resultado.
(iii) Tratar de enunciar condiciones sobre un orden para que valga el teorema de eliminación.

13.– Sea $I =< Y-X^2, Z-X^3 >\subset \mathbb{R}[X,Y,Z]$. Verificar que $V_{\mathbb{R}}(I) = V_{\mathbb{R}}((Y-X^2)^2+(Z-X^3)^2)$, y generalizar probando que toda variedad de $\mathbb{R}^n$ puede ser definida por medio de un solo polinomio.

14.– Se define $\Pi_k : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^{n-k}$ como la proyección $(x_1,\dots,x_n)\longmapsto(x_{k+1},\dots,x_n)$.
Sea $I\subset\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ un ideal e $I_k = I\cap\mathbb{K}[X_{k+1},\dots,X_n]$ el $k-$ésimo ideal de eliminación.
(i) Probar que $\Pi_k(V(I))\subset V(I_k)$ pero que no vale siempre la igualdad.
(ii) Probar que $\Pi_k(V(I)) = \{\,(a_{k+1},\dots,a_n)\in V(I_k) \text{ tq } \exists\, a_1,\dots,a_k\in\mathbb{K} \text{ con } (a_1,\dots,a_n)\in V(I)\,\}$.

15.– Sea el sistema de ecuaciones dado por :

$$\begin{cases} X^5 + \dfrac{1}{X^5} = Y \\ X + \dfrac{1}{X} = Y \end{cases}$$

(i) Determinar un ideal $I\subset\mathbb{C}[X,Y,Z]$ que “ayude” para resolver este sistema, y encontrar sistemas de generadores de los ideales de eliminación $I\cap\mathbb{C}[Y,Z]$ e $I\cap\mathbb{C}[Z]$.
(ii) Aplicar el teorema de extensión para decidir qué $c\in V(I\cap\mathbb{C}[Z])$ se extienden a $(a,b,c)\in V(I)$.
(iii) ¿ Qué soluciones $(b,c)\in V(I\cap\mathbb{C}[Y,Z])$ se extienden a soluciones $(a,b,c)\in V(I)$? ¿ Por qué no se contradice el teorema de extensión ?
(iv) Resolver completamente el sistema original.

16.– Sean $f_1 = X(Y-Z)+Y-1$, $f_2 = X(Y-Z)+Z-1$ e $I =< f_1, f_2 >\subset\mathbb{C}[X,Y,Z]$.
(i) Hallar a mano todas las soluciones del sistema $\{\, f_1=0, f_2=0\,\}$.
(ii) Describir $I_1 = I\cap\mathbb{C}[Y,Z]$. ¿ Se extiende todo $(b,c)\in V(I_1)$ a $(a,b,c)\in V(I)$?
(iii) Determinar otros generadores de I donde para todo $(b,c)\in V(I_1)$, existe $a\in\mathbb{C}$ tal que $(a,b,c)\in V(I)$.

17.– El *Paraguas de Whitney* es la superficie $\mathcal{W}$ dada paramétricamente, con parámetros U, V, por :

$$\begin{cases} X = UV \\ Y = V \\ Z = U^2 \end{cases}$$

(i) Usando Maple, dibujarlo en $\mathbb{R}^3$.
(ii) Hallar ecuaciones en X, Y, Z tales que la variedad V definida por ellas contenga a $\mathcal{W}$.
(iii) Mostrar que (si eligió bien las ecuaciones), en $\mathbb{C}^3$ se tiene $V_{\mathbb{C}} = \mathcal{W}_{\mathbb{C}}$, pero en $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{W}_{\mathbb{R}} \subset V_{\mathbb{R}}$, sin que valga la igualdad. ¿ Qué puntos de $V_{\mathbb{R}}$ no pertenecen a $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$?
(iv) Mostrar que los parámetros U, V no están siempre univocamente determinados por X, Y, Z. ¿ En qué puntos falla la unicidad y qué tienen que ver con el dibujo ?

18.– Sean $f_1 = YX^3 + X^2$, $f_2 = Y^3X^2 + Y^2$ y $f_3 = YX^4 + X^2 + Y^2$, e $I = < f_1, f_2, f_3 > \subset \mathbb{C}[X, Y]$.
(i) Hallar $I_1 := I \cap \mathbb{C}[Y]$.
(ii) Si h_i son los coeficientes principales de los generadores f_i de I como polinomios en X, calcular $V(I_1)$ y $V(I_1) \cap V(h_1, h_2, h_3)$ y compararlos.
(iii) Sea $J = < f_1, f_2, f_3, h_1, h_2, h_3 >$. Probar que $I \neq J$ pero $V(I) = V(J)$ y $V(I_1) = V(J_1)$.
(iv) Considerar los polinomios $g_1 = f_1 - h_1X^3$, $g_2 = f_2 - h_2X^2$, $g_3 = f_3 - h_3X^4$, y probar que $J = < g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3 >$.
Repetir (ii) para J_1. ¿ Hay algo distinto ?
(v) Verificar que si $I = < f_1, \ldots, f_s > \subset \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, vale siempre :
$V(I_1) = \Pi_1(V) \cup (V(h_1, \ldots, h_s) \cap V(I_1))$ (con h_i definidos como en (ii), y $\Pi_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto y$),
y que a veces $V(h_1, \ldots, h_s) \cap V(I_1)$ coincide con $V(I_1)$ pero a veces está estrictamente incluído.
(Se puede probar que en $\mathbb{C}$ siempre se pueden cambiar las ecuaciones que definen $V(I)$ de manera que $V(h_1, \ldots, h_s) \cap V(I_1)$ esté estrictamente contenido en $V(I_1)$.)

19.– Sea $I = < X^2 + Y^2 + Z^2 + 2, 3X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 5 > \subset \mathbb{K}[X, Y, Z]$. Sea $I_1 := I \cap \mathbb{K}[Y, Z]$ y $\Pi_1 : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$, $(x, y, z) \mapsto (y, z)$.
(i) Probar que en $\mathbb{C}$ vale : $V_{\mathbb{C}}(I_1) = \Pi_1(V_{\mathbb{C}}(I))$
(ii) Calcular en $\mathbb{R}$: $V_{\mathbb{R}}(I)$ y $V_{\mathbb{R}}(I_1)$, y mostrar que en $\mathbb{R}$ no hay modo de hallar nuevas ecuaciones para definir $V_{\mathbb{R}}(I)$ de manera que se cumpla la afirmación del ejercicio 18 (v).

20.– En el ejercicio 13, se exhibieron dos ideales de $\mathbb{R}[X, Y]$ que determinan la misma variedad de $\mathbb{R}^2$. Mostrar que uno de los ideales está contenido en el otro. ¿ Se pueden hallar dos ideales en $\mathbb{R}[X, Y]$ que determinan la misma variedad en $\mathbb{R}^2$ pero no incluído uno en otro ?