ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Práctica 3 $*$ 1er. Cuatrimestre 2002

Variedades de $\mathbb{K}^n$ y Ideales de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$

1.– Dibujar las siguientes variedades afines de $\mathbb{R}^2$:
(i) $V(X^2 + 4Y^2 + 2X - 16Y + 1)$
(ii) $V(X^2 - Y^2)$
(iii) $V(2X + Y - 1, 3X - Y + 2)$
(iv) $V(X^2 + Y^2 - 4) \cap V(XY - 1)$ y $V(X^2 + Y^2 - 4, XY - 1)$.

2.– Dibujar las siguientes variedades de $\mathbb{R}^3$:
(i) $V(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$
(ii) $V(X^2 + Y^2 - 1)$
(iii) $V(XZ^2 - XY)$
(iv) $V(X^4 - ZX, X^3 - YX)$
(v) $V((X - Z)(X^2 - Y), Y(X^2 - Y), (Z + 1)(X^2 - Y))$
(vi) $V(XY, XZ)$ y $V(XY, XZ, X + 1)$

3.– Probar que $\{ (x, x), x \in \mathbb{R} \}$ es una variedad afín de $\mathbb{R}^2$ y que $\{ (x, x), x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$ no lo es.

4.– Probar que el semiplano superior $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0 \}$ no es una variedad afín de $\mathbb{R}^2$.

5.– Dar un ejemplo para mostrar que una unión infinita de variedades afines puede no ser una variedad afín.

6.– Probar que $\mathbb{Z}^n$ no es una variedad afín de $\mathbb{R}^n$ (ni de $\mathbb{C}^n$).

7.– Sean $V \subset \mathbb{K}^n$ y $W \subset \mathbb{K}^m$ variedades afines. Probar que

$$V \times W := \{ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{K}^{n+m} \ \text{ tq } \ (x_1, \ldots, x_n) \in V, (y_1, \ldots, y_m) \in W \}$$

es una variedad afín de $\mathbb{K}^{n+m}$.

8.– Sea $I \subset \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un ideal, y sean $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Probar que :

$$f_1, \ldots, f_s \in I \Longleftrightarrow < f_1, \ldots, f_s > \subset I$$

9.– Probar que si $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t$ son tales que $< f_1, \ldots, f_s > = < g_1, \ldots, g_t >$, entonces $V(f_1, \ldots, f_s) = V(g_1, \ldots, g_t)$. Investigar la recíproca.

10.– Probar las siguientes igualdades de ideales en $\mathbb{Q}[X, Y]$:
(i) $< X + Y, X - Y > = < X, Y >$
(ii) $< aX + bY, cX + dY > = < X, Y >$ si $ad - bc \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$
(iii) $< X + XY, Y + XY, X^2, Y^2 > = < X, Y >$
(iv) $< 2X^2 + 3Y^2 - 11, X^2 - Y^2 - 3 > = < X^2 - 4, Y^2 - 1 >$

11.– Probar que las curvas de $\mathbb{R}^3$ dadas por $\{ (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R} \}$ y $\{ (t^2, t^3, t^4), t \in \mathbb{R} \}$ respectivamente son variedades afines de $\mathbb{R}^3$. (Estas son parametrizaciones de las curvas.)

12.– Algunas diferencias entre ideales y subespacios vectoriales.
(i) Probar que el ideal $< X > \subset \mathbb{K}[X]$ es un $\mathbb{K}-$subespacio vectorial de $\mathbb{K}[X]$ de dimensión infinita.
(ii) Sean $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ cualesquiera. Probar que existen infinitos pares de polinomios $g_1, g_2 \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ tales que $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 0$.
(iii) Sea $I = < f_1, \ldots, f_s > \subset \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ y $f \in I$. Probar que existen infinitas maneras de escribir $f = h_1 f_1 + \ldots + h_s f_s$ con $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$.