MAESTRIA EN ESTADISTICA – ALGEBRA LINEAL

2007– Práctica 1

(**1**) Dadas las siguientes matrices en $\mathbb{R}^{3\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

- determinar a_{31} y a_{22}.
- calcular $3A + 2B$, $A - B$, $\frac{1}{2}(A + B)$.
- hallar $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que $3A + 2B + D$ sea la matriz nula.

(**2**) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \ \text{ y } \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

calcular los siguientes productos: $C \cdot B$, $A \cdot C^t$, $C \cdot C^t$ y $C^t \cdot C$.

(**3**)
- Sean $A, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A \cdot D = A \cdot C$. ¿Debe ser $C = D$? ¿Y si $A \neq 0$?
- Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
  Calcular $(A + B)^2$, $A^2 + 2A \cdot B + B^2$, $A^2 - B^2$, $(A - B) \cdot (A + B)$, $(A + B) \cdot (A - B)$.
  ¿Qué conclusiones puede sacar?
- Hallar ejemplos de matrices $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no nulas tales que
  $A^2 = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B^2 = 0$, $C.D = D.C$ con $C \neq D$ y $E \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 0$.
- ¿Es cierto que el producto de dos matrices triangulares superiores (resp. inferiores) es triangular superior (resp. inferior)?
- Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B, $A \cdot B$ tiene una fila de ceros? (siempre que $A \cdot B$ esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?
- ¿Es cierto que si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ satisface $A \cdot P = A$ con $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces la primer y tercer columna de A son iguales? ¿Qué matrices $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ satisfacen $P \cdot B = B$?

(**4**) Para cada uno de los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 6y = 18 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

- Dibuje en el plano los gráficos de cada recta y detecte geométricamente la solución.
- Resuelva el sistema por el método de Gauss y agregue en el gráfico la recta que se obtiene después del primer paso de eliminación.

(**5**) Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss de eliminación de variables:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 3x + 3y - z = 6 \\ x - y + z = -1 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 5 \\ -3y - z = 1 \end{cases}, \quad (c) \begin{cases} u + v + w = 0 \\ u + 2v + 3w = 0 \\ 3u + 5v + 7w = 7 \end{cases},$$

y $(d)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(**6**) Describir todas las soluciones de cada uno de los sistemas

$$(a)\left\{\begin{array}{lcr} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_3 & = & -2 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad (b)\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

¿Cuáles de las soluciones halladas satisfacen además $x_3 = x_4$?

(**7**) Dado el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

- encontrar todas las soluciones,
- ¿Cuáles satisfacen además la condición $x + y + z = 3$?
- ¿Cuáles satisfacen además la condición $2x - y - 2z = 2$?

(**8**) Para cada uno de los dos sistemas siguientes

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax + 2y & = & 0 \\ x + ay + z & = & 0 \\ 2y + az & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{lcl} ax + 4y & = & 0 \\ 2x + ay + 2z & = & 2 \\ 4y + az & = & 0 \end{array}\right.,$$

Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que :
- el sistema no admita solución,
- el sistema admita solución única (y hallarla)
- el sistema admita infinitas soluciones (y hallarlas todas).

(**9**) ¿Para qué valores de c es compatible el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ c \end{pmatrix}?$$

(**10**) Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,
- hallar las soluciones de $A \cdot X = b$ para $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Hallar $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A \cdot B = I$.
- Verificar que para la matriz B hallada arriba vale que $B \cdot A = I$.

(**11**)
- Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ satisface $Ax = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, probar que $A = 0$.
- Si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ satisfacen $Ax = Bx$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, probar que $A = B$.

(**12**) Encontrar las inversas de las siguientes matrices (si existen)

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad f)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}$$

$$h)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}, \quad i)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}, \quad j)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}$$

$$k)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad l)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m)\ \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}$$

(**13**) Tres especies de colonias de bacterias coexisten en un tubo de ensayo y se alimentan con tres alimentos. Se supone que una colonia de bacterias de la especie j consume una cantidad a_{ij} del $i-$ésimo alimento por día, según la siguiente matriz de datos

$$(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, cada colonia de bacterias de la especie 3 consume por día 1 cantidad del alimento 1, 4 cantidades del alimento 2 y 6 cantidades del alimento 3.

- Si hay 1000 colonias de bacterias de la especie 1, 2000 colonias de bacterias de la especie 2 y 5000 colonias de bacterias de la especie 3, ¿cuántas cantidades del alimento 2 se consumen al día?
- Si se proveen diariamente 15000 unidades del alimento 1, 30000 del alimento 2, 44000 del alimento 3 y todo el alimento provisto se consume (y ninguna colonia "queda con hambre"), ¿puede determinarse la cantidad de colonias de bacterias de cada especie? ¿Cuál es la cantidad total de colonias de bacterias?

(**14**) Como en el ejercicio anterior, la colonia j de bacterias y la especie de alimentos i que ingiere se rige por la siguiente matriz de datos

$$(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se proveen diariamente 15000 unidades del alimento 1, 30000 del alimento 2, 45000 del alimento 3 y, como arriba, todo el alimento provisto se consume.

- ¿Puede determinarse con estos datos la cantidad de colonias de bacterias de cada especie?
- ¿Puede determinarse la cantidad total de colonias?
- ¿Es posible una población de 10000 colonias de bacterias de la primer especie? ¿Es posible una población de 20000 colonias de bacterias de la tercer especie? En caso afirmativo, hallar las cantidades de colonias de las especies restantes.

(**15**) Se tiene una pieza metálica construida con una aleación de cobre y plata que pesa $29,85$ gr y tiene un volumen de 3 cm^3. Sabiendo que el peso específico del cobre es $8,95$ gr/cm^3 y el de la plata es $10,45$ gr/cm^3, determinar qué proporción de plata y cobre contiene. (Peso específico= peso/volumen.)

(**16**) Consideremos el gráfico orientado que une los 5 puntos en el dibujo

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r] & P_2 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
P_5 \arrow[rr, leftrightarrow] & & P_3 \\
& P_4 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

- Construir una matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ tal que $a_{ij} = 1$ si existe una flecha del vértice P_i al vértice P_j que los conecta y $a_{ij} = 0$ en otro caso (en particular, $a_{ii} = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$).
- Construir una matriz $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ tal que b_{ij} = cantidad de caminos formados por 2 flechas, la primera comenzando en el vértice P_i y la segunda terminando en el vértice P_j.
- Calcular A^2 y entender su relación con B.

(**17**) Supongamos que hay tres grupos de personas, el primero formado por 3 personas, el segundo por 6 y el tercero por 7, y consideremos las siguientes matrices de 'amistad'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} = 1$ si la j-ésima persona del 2do. grupo es amiga de la i-ésima persona del 1er. grupo, y 0 en caso contrario, y donde $b_{ij} = 1$ si la j-ésima persona del 3er. grupo es amiga de la i-ésima persona del 2do. grupo, y 0 en caso contrario.

- Decidir si hay alguna persona en el segundo grupo que no tenga amigos en el primero. Decidir si hay alguna persona en el segundo grupo que no tenga amigos en el tercero. Decidir si hay alguna persona en el tercer grupo sin amigos en el segundo.
- Si el tercer integrante del primer grupo es Ricardo, ¿cuáles son las personas del segundo grupo amigas de Ricardo? ¿Cuáles son todas las personas del tercer grupo que no son amigas de ningún amigo de Ricardo?
- Si la segunda persona del primer grupo tuviera una enfermedad contagiosa y se la contagiara a sus amigos y éstos a su vez a sus amigos, ¿qué personas del tercer grupo se contagiarían?
- La matriz
$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
representa en el lugar c_{ij} el número de amigos comunes del segundo grupo que tienen entre sí el j-ésimo integrante del tercer grupo y el i-ésimo integrante del primero. Entienda por qué.

(**18**) Se tienen 2 urnas numeradas **1** y **2** con bolillas de dos tipos, numeradas **1** y **2** también, en cada una de ellas. Llamamos p_{ij} a la probabilidad de obtener una bolilla j si se extrae al azar una bolilla de la urna i. Por ejemplo: p_{12} =probabilidad de obtener una bolilla **2** al hacer una extracción de la urna **1**.

- Sea $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$. Entender por qué $p_{11} + p_{12} = 1$ y $p_{21} + p_{22} = 1$.
- Sea $P^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Encontrar la relación entre a_{ij} y p_{kl}.
- Probar que P^2 también cumple $a_{11} + a_{12} = 1$, $a_{21} + a_{22} = 1$.
- Describir un experimento con dos resultados posibles cuyas probabilidades sean los coeficientes de la primera fila de P^2. Idem con la segunda fila.