Teorema del Transporte Óptimo para el costo cuadrático

Ejercicio 1 Sea $Q = [0,1]^{n-1}$. Sea μ la medida de probabilidad uniforme en $Q \times \{0\}$ y sea ν la medida de probabilidad uniforme en $Q \times \{-1\} \cup Q \times \{1\}$.

(a) Mostrar que la única solución al problema de Kantorovich con costo cuadrático es

$$\pi = \mathcal{L}^{n-1}\delta_{\{x_n=0\}} \times \mathcal{L}^{n-1}(\delta_{\{y_n=-1\}} + \delta_{\{y_n=1\}})/2.$$

donde $\mathcal{L}^{n-1}$ es la medida de Lebesgue $(n-1)-$dimensional.

(b) Concluir que el problema de Monge no tiene solución.

Ejercicio 2 Probar la siguiente variante del criterio de optimalidad de Knott-Smith:

Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ con segundo momento finito, sea $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ y sea φ una función convexa, semi continua inferiormente en $\mathbb{R}^n$ no idénticamente $+\infty$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} (\varphi(x) + \varphi^*(y) - x\cdot y)\, d\pi(x,y) \leq \varepsilon.$$

Entonces

$$I[\pi] := \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|x-y|^2}{2}\, d\pi(x,y) \leq \left(\inf_{\Pi(\mu,\nu)} I\right) + \varepsilon.$$

Ejercicio 3 Sea $\mathcal{P}_{ac,2}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de las medidas de probabilidad absolutamente continuas con segundo momento finito.

Sea $\sigma \in \mathcal{P}_{ac,2}(\mathbb{R}^n)$ y sea $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_{ac,2}(\mathbb{R}^n)$ una suceción tal que $\rho_k \rightharpoonup \rho \in \mathcal{P}_{ac,2}(\mathbb{R}^n)$.

Sean $\nabla\varphi_k$ (resp. $\nabla\varphi$) el mapa óptimo en el problema de Monge con costo cuadrático entre σ y ρ_k (resp. ρ), y sea π_k (resp. π) el plan de transporte óptimo asociado.

(a) Probar que $\pi_k \rightharpoonup \pi$.

(b) Asumir que $\nabla\varphi$ es continuo y probar que $\nabla\varphi_k \xrightarrow{\sigma} \nabla\varphi$, i.e.

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \sigma[|\nabla\varphi_k - \nabla\varphi| \geq \varepsilon] = 0.$$

(c) Usar el Teorema de Lusin para concluir $\nabla\varphi_k \xrightarrow{\sigma} \nabla\varphi$ sin asumir la continuidad de $\nabla\varphi_k$.

Sugerencia: Para (a), usar que el plan de transferencia óptimo es único. Para (b), usar que si $\nabla\varphi$ es continuo, entonces $A_\varepsilon = \{(x,y)\colon |y - \nabla\varphi(x)| < \varepsilon\}$ es abierto (¿Por qué?). Para (c), encontrar primero M_ε tal que $\sigma[|\nabla\varphi| \geq M_\varepsilon] < \frac{\varepsilon}{3}$, después R_ε tal que $\sigma[|x| \geq R_\varepsilon] < \frac{\varepsilon}{3}$ y luego aplicar el Teorema de Lusin en el compacto $B_{R_\varepsilon}(0)$ a una truncación de $\nabla\varphi$.

Ejercicio 4 Sea $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función monótona y continua a derecha en cada variable tal que

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} H(x,y) = 1, \qquad \lim_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} H(x,y) = 0.$$

Probar que H define de manera única una medida de probabilidad $\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ por la fórmula

$$\pi((-\infty,x] \times (-\infty,y]) = H(x,y).$$

Ejercicio 5 Probar el *Teorema de Hoeffding-Fréchet*: Una función H en las hipótesis del ejercicio anterior define una probabilidad $\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ con marginales $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ si y sólo si

$$F(x) + G(y) - 1 \leq H(x, y) \leq \min[F(x), G(y)], \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

donde F y G son las funciones de distribución de μ y ν respectivamente, i.e.

$$F(x) := \mu((-\infty, x]) \quad \text{y} \quad G(y) := \nu((-\infty, y]).$$

Ejercicio 6 *El caso discreto*: Sean $x_1, \ldots, x_N$ y $y_1, \ldots, y_N$ puntos de $\mathbb{R}^N$ (no necesariamente distintos). Sea $\mu = (1/N) \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$, $\nu = (1/N) \sum_{j=1}^N \delta_{y_j}$ y $\pi = (1/N) \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i, y_i)}$. Notamos por $\mathcal{S}_N$ en conjunto de permutaciones de $\{1, \ldots, N\}$.

(a) Mostrar que π es óptima en el problema de Kantorovich para transportar μ a ν con costo cuadrático si y sólo si para todas las permutaciones $\sigma \in \mathcal{S}_N$ se tiene

$$\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^N |x_i - y_{\sigma(i)}|^2.$$

(b) Mostrar que la condición dada en (a) es equivalente a que para todo $m \leq N$ y para todo $\{i_1, \ldots, i_m\} \subset \{1, \ldots, N\}$,

$$\sum_{k=1}^m |x_{i_k} - y_{i_k}|^2 \leq \sum_{k=1}^m |x_{i_k} - y_{i_{k-1}}|^2,$$

donde, por convención, $i_0 = i_m$.

(c) Mostrar que la condición de (b) es equivalente a

$$\sum_{k=1}^m y_{i_k} \cdot (x_{i_{k+1}} - x_{i_k}) \leq 0,$$

donde, por convención, $i_{m+1} = i_1$.

Sugerencia: Para (a), recordar que vimos que todo plan de transferencia se escribe como un promedio de permutaciones, i.e. $\Pi(\mu, \nu) = \{(1/N) \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i, y_{\sigma(i)})} \colon \sigma \in \mathcal{S}_N\}$ (ver Ejercicio 5 de la práctica 0). Para (b) usar que una permutación puede descomponerse como composición de ciclos de soportes disjuntos.

Definición 1 *Un subconjunto* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *se dice* cíclicamente monótono *si verifica que, para todo* $m \geq 1$ *y para todo* $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in \Gamma$,

$$\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^2 \leq \sum_{k=1}^m |x_i - y_{i-1}|^2,$$

con la convención $y_0 = y_m$. *Equivalentemente*

$$\sum_{i=1}^m y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq 0,$$

con la convención $x_{m+1} = x_m$.

Ejercicio 7 *Teorema de Rockafellar*: Un conjunto no vacío $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es cíclicamente monótono si y sólo si está contenido en el subdiferencial de una función convexa semi continua inferiormente φ en $\mathbb{R}^n$. Más aún, conjuntos cíclicamente monótonos maximales (con respecto a la inclusión) son exactamente los subdiferenciales de funciones convexas semi continuas inferiormente en $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia: Para la recíproca, observar que todo subconjunto de uno cíclicamente monótono es cíclicamente monótono, luego alcanza con ver que $\partial\varphi$ es cíclicamente monótono. Tomar entonces $(x_i, y_i) \in \partial\varphi$ (i.e. $y_i \in \partial\varphi(x_i)$), $i = 1, \ldots, m$, y usando la definición de subdiferencial "cíclicamente", concluir el resultado.

Para la ida, tomar $(x_0, y_0) \in \Gamma$ y definir φ como

$$\varphi(x) = \sup\left\{y_m \cdot (x - x_m) + \cdots + y_0 \cdot (x_1 - x_0) \colon m \in \mathbb{N},\ (x_i, y_i) \in \Gamma\right\}$$

y probar que φ verifica lo pedido (la monotonía cíclica de Γ se usa para ver que $\varphi(x_0) \leq 0$, luego φ no es idénticamente $+\infty$).

Ejercicio 8 Usar el ejercicio anterior para dar una demostración alternativa del siguiente teorema: *Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Si $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ es un plan de transferencia óptimo para el problema de Kantorovich con costo cuadrático, entonces π tiene su soporte contenido en el subdiferencial de una función convexa semi continua inferiormente.*

Sugerencia: Usar (sin demostrar) el siguiente resutado de W. Gangbo y R. McCann (1996): Si $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ es un plan de transferencia óptimo para el problema de Kantorovich con costo cuadrático, entonces el soporte de π es cíclicamente monótono. (Para una indicación de la prueba, ver la Proposición 2.24 del libro de C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*).

Concluir la siguiente versión refinada del teorema de Brenier: *Si $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y μ no da masa a conjuntos chicos, entonces existe una función convexa φ en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\nabla\varphi \# \mu = \nu.$$

Notar que no se hace la hipótesis de segundo momento finito.