Funciones Convexas de nuevo.

Definición 1 *A lo largo de esta guía notaremos por $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ a una función convexa. Por eso nos referimos que, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $t \in [0,1]$ se verifica*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Usaremos también la notación

$$Dom(\varphi) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varphi(x) < +\infty\},$$

que se lo denomina el dominio *de φ. Siempre asumiremos que $Dom(\varphi) \neq \emptyset$.*

Ejercicio 1 Probar que $\mathrm{Dom}(\varphi)$ es convexo. Concluir que $|\partial\mathrm{Dom}(\varphi)| = 0$ ($|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$).

Ejercicio 2 Probar que φ es continua en $(\mathrm{Dom}(\varphi))^\circ$.

Ejercicio 3 Probar que si ψ es otra función convexa tal que $(\mathrm{Dom}(\varphi))^\circ = (\mathrm{Dom}(\psi))^\circ$ y $\phi = \psi$ en $(\mathrm{Dom}(\varphi))^\circ$, entonces

$$\varphi = \psi,$$

si se asume que ambas son semi continuas inferiormente.

Dar un contraejemplo que muestre que la semicontinuidad inferior es necesaria.

Definición 2 *Definimos el subdiferencial de ϕ en $x \in \mathbb{R}^n$ al conjunto*

$$\partial\varphi(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \colon \varphi(x) \geq \varphi(x) + y \cdot (z - x),\ \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ejercicio 4 Probar que si $x \in (\mathrm{Dom}(\varphi))^\circ$, entonces $\partial\varphi(x) \neq \emptyset$.

Ejercicio 5 Probar que φ es diferenciable en x_0 si y sólo si $\partial\varphi(x_0) = \{y_0\}$. Ver que en ese caso se tiene $y_0 = \nabla\varphi(x_0)$.

Ejercicio 6 Probar que si φ es semi continua inferiormente, entonces $\partial\varphi$ es continuo, i.e.

$$x_k \to x \text{ y } \partial\varphi(x_k) \ni y_k \to y \Rightarrow y \in \partial\varphi(x).$$

Ejercicio 7 Concluir del ejercicio anterior que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si φ es diferenciable en x y $\nabla\varphi(x) = y$, entonces

$$\nabla\varphi(B_\delta(x)) \subset \partial\varphi(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(y).$$

Definición 3 *La transformada de Legendre de φ se define como*

$$\varphi^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [x \cdot y - \varphi(x)].$$

Ejercicio 8 Probar que φ^* es convexa y semi continua inferiormente.

Definición 4 *Dadas φ y ψ convexas se define la* convolución por ínfimo *como*

$$\varphi \Box \psi(x) := \inf_{x + x' = z} [\varphi(x) + \psi(x')].$$

Ejercicio 9 Probar que

$$(\varphi \Box \psi)^* = \varphi^* + \psi^*.$$

Ejercicio 10 Sea $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}|x|^2$ y definimos $\varphi_\varepsilon := \varphi \Box \psi_\varepsilon$.

Probar que si φ es semi continua inferiormente, entonces $\mathrm{Dom}(\varphi_\varepsilon) = \mathbb{R}^n$ y

$$\varphi_\varepsilon(x) \to \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$