Funciones Convexas.

Ejercicio 1 Sea E un espacio de Banach y notamos por E^* el espacio dual. Sea $\theta\colon E \to (-\infty, +\infty]$ una función convexa. Se define la *transformada de Legendre* de θ como

$$\theta^*\colon E^* \to (-\infty, +\infty], \qquad \theta^*(z^*) = \sup_{z \in E} \Big[\langle z^*, z\rangle - \theta(z)\Big].$$

Verificar que θ^* resulta convexa.

Ejercicio 2 Si consideramos $\theta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\theta(x) = \frac{|x|^p}{p}$ con $1 < p < +\infty$, calcular $\theta^*(y)$, con $y \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 3 Dada $\theta\colon E \to (-\infty, +\infty]$ convexa, se define el *epi–grafo* de θ como

$$C_\theta = \{(z, \lambda) \in E \times \mathbb{R}\colon \theta(z) < \lambda\}.$$

(a) Chequear que C_θ es convexo. Más aún, verificar que si θ es arbitraria y C_θ resulta convexo, entonces θ es convexa.

(b) Verificar que si θ es continua en $z_0 \in E$, entones C_θ tiene interior no vacío.

Sugerencia: Chequear que $(z_0, \theta(z_0) + 1) \in \operatorname{int}(C_\theta)$.

Ejercicio 4 Verificar que si $C \subset E$ es un conjunto convexo tal que $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$, entonces $\overline{\operatorname{int}(C)} = \overline{C}$.

Espacios Polacos.

Definición 1 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es un espacio* Polaco *si es completo y separable.*

Ejercicio 5 Sean X e Y dos espacios Polacos. Probar que $X \times Y$ resulta polaco con la métrica "natural".

Ejercicio 6 Verificar que si X es un espacio métrico localmente compacto, entonces toda medida de probabilidad es *regular*. Es decir, para todo $A \subset X$ conjunto de Borel, se tiene

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup \Big\{\mu(K)\colon K \subset A,\ \text{compacto}\Big\} \\ &= \inf \Big\{\mu(U)\colon A \subset U,\ \text{abierto}\Big\}. \end{aligned}$$

Sugerencia: Usar que el conjunto de las medidas de Radon coincide con el dual de $C_0(X)$ (las funciones continuas que tienden a cero en el "infinito").

El resultado es cierto si se reemplaza "localmente compacto" por "polaco" (i.e. completo y separable). Pero la prueba es diferente. ¿Sale?

Ejercicio 7 Verificar que si X es localmente compacto, entonces toda medida de probabilidad es *tight*. Es decir, dado $\epsilon > 0$, existe un compacto K_ϵ tal que $\mu(X \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$.

Si se reemplaza "localmente compacto" por "polaco" esto se conoce como el *Teorema de Ulam.* ¿Sale?

Ejercicio 8 Una famila $\mathcal{B}$ de medidas de probabilidad en X se dice *tight* si para todo $\epsilon > 0$, existe un compacto K_ϵ tal que

$$\sup_{\mu \in \mathcal{B}} \mu(X \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon.$$

El *Teorema de Prokhorov* dice que si X es polaco y $\mathcal{B}$ es tight, entonces es secuencialmente precompacta, i.e. para cualquier sucesión $\{\mu_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$, existe una subsucesión $\{\mu_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y una medida de probabilidad μ_* tal que

$$\lim_{j\to\infty} \int_X \phi \, d\mu_{k_j} = \int_X \phi \, d\mu_*, \qquad \forall\, \phi \in C_b(X).$$

Probar que si X es compacto, este resultado es una consecuencia directa del Teorema de Banach–Alaoglu. (En particular, si X es compacto, cualquier familia $\mathcal{B}$ es tight).

Ejercicio 9 Sea X un espacio métrico y $F\colon X \to \mathbb{R}$ una función no negativa y semicontinua inferiormente. Se define

$$F_n(x) := \inf_{y\in X} \Big[F(y) + n \operatorname{dist}(x,y)\Big].$$

Verificar que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones no negativas y uniformemente continuas tales que

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x).$$

Ejercicio Adicional de Medidas.

Ejercicio 10 Sean (X,Σ,μ) e (Y,Σ',ν) dos espacios de probabilidad y sea $\Pi(\mu,\nu)$ el conjunto de medidas π definidas en $X \times Y$ que tienen marginales μ y ν (la definición precisa fue dada en el ejercicio 3 de la práctica 0).

Consideremos $X_0 \subset X$ e $Y_0 \subset Y$ medibles de medida positiva y se definimos

$$\pi_{*0} = \frac{1_{X_0\times Y_0}}{\pi_*(X_0\times Y_0)}\pi_*,$$

$$\mu_0(A) = \pi_{*0}(A\times Y_0),\ A\subset X_0, \qquad \nu_0(B) = \pi_{*0}(X_0\times B),\ B\subset Y_0.$$

Sea $\pi_0 \in \Pi(\mu_0,\nu_0)$ y definimos $\pi = \pi_*(X_0\times Y_0)\pi_0 + 1_{(X_0\times Y_0)^c}\pi_*$.

Probar que $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$.