Ejercicios de precalentamiento.

Ejercicio 1 Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea Y un conjunto no vacío. Dada una aplicación $T\colon X \to Y$, mostrar que se puede definir una $\sigma-$álgebra Σ' en Y lo más grande posible tal que T resulte medible.

Verificar que si se define $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ para $B \in \Sigma'$, entonces ν resulta una medida en Y.

La medida ν así definida se denota por $\nu = T\#\mu$ y se la llama la medida "push–forward".

Observar que si μ es una medida de probabilidad sobre X, entonces ν es una medida de probabilidad sobre Y.

Ejercicio 2 Chequear que si X, Y son abiertos de $\mathbb{R}^n$, $T\colon X \to Y$ es de clase C^1 y biyectiva, $d\mu = f dx$, $d\nu = g dy$ donde $f \in L^1(X)$, $g \in L^1(Y)$, entonces $\nu = T\#\mu$ si y sólo si

$$f(x) = g(T(x))|\det DT(x)|.$$

Dar un ejemplo donde la fórmula de arriba no se verifique porque, o bien T no es de clase C^1, o bien T no es biyectiva.

Ejercicio 3 Dados (X, Σ, μ) y (Y, Σ', ν) dos espacios de probabilidad, denotamos

$$\Pi(\mu, \nu) := \{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)\colon \pi(A \times Y) = \mu(A)\ \forall A \in \Sigma \text{ y } \pi(X \times B) = \nu(B)\ \forall B \in \Sigma'\},$$

donde $\mathcal{P}(X \times Y)$ denota el conjunto de las medidas de probabilidad en $X \times Y$ con la sigma álgebra generada por $\Sigma \times \Sigma'$.

(a) Probar que $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$.

(b) Probar que si existe $T\colon X \to Y$ tal que $\nu = T\#\mu$, entonces $d\pi(x, y) = d\mu(x) d\delta_{T(x)}(y)$ verifica $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.

Ejercicio 4 Sea K un conjunto compacto y convexo de un espacio de Banach E. Dados $x_1, x_2 \in E$ notamos por $[x_1, x_2]$ el segmento que une x_1 y x_2, es decir $[x_1, x_2] := \{tx_1 + (1-t)x_2\colon 0 \leq t \leq 1\}$. Se nota

$$\mathcal{E}(K) := \{x \in K\colon x \in [x_1, x_2], \text{ con } x_1, x_2 \in K, \text{ implica que } x = x_1 \text{ o } x = x_2\}.$$

$\mathcal{E}(K)$ se llama el conjunto de los puntos extremales de K.

Sea $\ell \in E^*$ un elemento del dual.

(a) Probar que existe $x \in K$ tal que $\ell(x) = \inf_K \ell$.

(b) Usar el Teorema de Krein-Milman para mostrar que existe $x_0 \in \mathcal{E}(K)$ tal que $\ell(x_0) = \inf_K \ell$.

El Teorema de Krein-Milman dice que si $K \subset E$ es compacto y convexo, entonces

$$K = \overline{\text{Co}(\mathcal{E}(K))},$$

donde $\text{Co}(A)$ es la cápsula convexa de A y es el conjunto formado por todas las combinaciones convexas finitas de elementos de A.

En particular, el Teorema de Krein-Milman dice que $\mathcal{E}(K)$ no es vacío.

Ejercicio 5 Sea $\mathcal{B}_n$ el conjunto de las matrices bi-estocásticas de $n \times n$, es decir

$$\mathcal{B}_n := \Big\{\pi = (\pi_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \sum_{i=1}^{n} \pi_{ij} = 1 \ \forall 1 \le j \le n \text{ y } \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} = 1 \ \forall 1 \le i \le n\Big\}.$$

(a) Probar que $\mathcal{B}_n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ es convexo y compacto.

(b) Se define el conjunto de las permutaciones como $S_n := \{\sigma \colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \colon \sigma \text{ es biyectiva}\}$. Dado $\sigma \in S_n$ se define la matriz de permutación π^σ como $\pi^\sigma_{ij} = \delta_{j\sigma(i)}$.

Mostrar que cada matriz de permutación es un punto extremal de $\mathcal{B}_n$.

(c) Mostrar que si se asume que toda matriz extremal de $\mathcal{B}_n$ verifica que sus entradas son 0 o 1, entones $\mathcal{E}(\mathcal{B}_n)$ consiste exactamente en las matrices de permutación.

(d) Mostrar que si una matriz $\pi \in \mathcal{B}_n$ tiene un coeficiente entre 0 y 1, entonces no es un extremal.

Sugerencia: Supongamos que $\pi_{i_0j_0} \in (0,1)$. Construir entonces una familia $\pi_{i_0j_1}, \pi_{i_1j_1}, \pi_{i_1j_2}, \pi_{i_2j_2}$, etc, de entradas distintas de la matriz, todos entre 0 y 1 y repetir el proceso hasta que $j_k = j_0$ o $i_k = i_0$. Suprimiendo de la lista, eventualmente, $a_{i_0j_0}$ ver que siempre se puede suponer que $j_k = j_0$. Mostrar que es posible perturbar sólo estos coeficientes de manera que la nueva matriz perturbada siga perteneciendo a $\mathcal{B}_n$. Con esto, mostrar finalmente que π es el punto intermedio de dos elementos distintos de $\mathcal{B}_n$.

Ejercicio 6 Mostrar que si $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ y $(\phi,\psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$, entonces $\phi(x) + \psi(y) \in L^1(d\pi)$ y se tiene

$$\int_{X\times Y} [\phi(x) + \psi(y)]\, d\pi(x,y) = \int_X \phi(x)\, d\mu(x) + \int_Y \psi(y)\, d\nu(y).$$

Mostrar si π verifica la igualdad de arriba entonces se tiene que $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$.

Ejercicio 7 Sea $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ y sean $c \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ $\pi-$medible, $\phi \colon X \to \mathbb{R}$ $\mu-$medible y $\psi \colon Y \to \mathbb{R}$ $\nu-$medible.

Supongamos que para $\mu-$casi todo $x \in X$ y para $\nu-$casi todo $y \in Y$ se tiene

$$\phi(x) + \psi(y) \le c(x,y).$$

Probar que entonces la misma desigualdad se verifica $\pi-$casi todo $(x,y) \in X \times Y$.