Un problema de autovalores relacionado con la inmersión de trazas de Sobolev

J. Fernández Bonder.
Colaboradores: S. Martínez y J.D. Rossi.

Univ. de Buenos Aires
Diciembre 2002

La inmersión de traza de Sobolev dice:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega).$$

En consecuencia se verifica la desigualdad

$$S\|u\|^p_{L^q(\partial\Omega)} \le \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}, \qquad 1 \le q \le p_* = \frac{p(N-1)}{N-p}.$$

La mejor constante para esta desigualdad es

$$S = S_{p,q}(\Omega) = \inf_{u \in W^{1,p}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\left(\displaystyle\int_{\partial\Omega} |u|^q \, d\sigma\right)^{p/q}}$$

Para $1 \leq q < p_*$ la inmersión es compacta, entonces existen *extremales*. Estos extremales resultan ser soluciones débiles de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda |u|^{q-2}u & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el $p-$laplaciano y $\partial/\partial\nu$ es la derivada normal unitaria.

En el caso $p = q$ el problema se vuelve homogéneo (si u es solución $\Rightarrow ku$ también) y entonces estamos en presencia de un problema de autovalores no lineal.

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = 0 & \text{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda |u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

En el caso $p = 2$ (caso lineal) este problema se denomina el *problema de Steklov*.

Llamaremos a este problema el *Problema de Steklov no lineal*.

Observación: El primer autovalor (autovalor principal) λ_1 coincide con la mejor constante de traza de Sobolev (y los extremales con las autofunciones).

Este problema presenta similitudes con el siguiente

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u \quad \text{en } \Omega$$
$$u = 0 \qquad\qquad \text{en } \partial\Omega$$

que fuera estudiado por varios autores (Anane - Cuesta - de Figueiredo - Gossez - etc.)

Llamaremos a este problema el *Problema de Dirichlet*.

Al aplicar la teoría de Ljusternik-Schnirelman en el problema de Steklov no lineal, se tiene:

- Existe una sucesión de autovalores *variacionales* $\{\lambda_k\}$ con $\lambda_k \nearrow \infty$ (FB - Rossi, JMAA '01).

- El primer autovalor λ_1 es aislado y simple (Martínez - Rossi, Abst. Appl. Anal. '02).

- El segundo autovalor $\lambda_2 = \inf\{\lambda > \lambda_1\}$ coincide con el segundo autovalor variacional (FB - Rossi, Pub. Mat. '02).

Estas propiedades son comunes entre el problema de Steklov no lineal y el problema Dirichlet.

Primer diferencia entre estos problemas:

Problema Dirichlet: $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ es monótono con respecto a Ω. Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, tenemos $W_0^{1,p}(\Omega_1) \subset W_0^{1,p}(\Omega_2)$ y entonces

$$\lambda_1(\Omega_1) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega_1)} \frac{\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega_1)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega_1)}}$$

$$\geq \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega_2)} \frac{\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega_2)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega_2)}} = \lambda_1(\Omega_2)$$

Steklov no lineal: Si consideramos dilataciones del dominio original, $\mu\Omega$ y llamamos $v(x) = u(\mu x)$, se tiene

$$\frac{\displaystyle\int_{\mu\Omega} |\nabla u|^p + |u|^p \, dx}{\displaystyle\int_{\partial(\mu\Omega)} |u|^p \, d\sigma} = \mu \ \frac{\displaystyle\int_{\Omega} \mu^{-p} |\nabla v|^p + |v|^p \, dx}{\displaystyle\int_{\partial\Omega} |v|^p \, d\sigma}$$

Esto implica que $\lambda_1(\mu\Omega) \to 0$ si $\mu \to 0$.

¿Qué sucede con los demás autovalores? ¿y con las autofunciones?

Teorema 1 (FB - Rossi, CPAA '02) *Los autovalores (variacionales o no) y autofunciones del problema de Steklov no lineal convergen (adecuadamente "normalizados") a autovalores y autofunciones de*

$$\begin{array}{ll} \Delta_p u = 0 & \textit{en } \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \bar{\lambda}|u|^{p-2}u & \textit{en } \partial\Omega \end{array}$$

<u>Observación</u>: $\bar{\lambda}_1 = 0$ y $u_1 = cte.$

¿Qué sucede si consideramos otras familias de dominios? Por ejemplo: $\Omega \subset R^N = R^{n+k}$; $\Omega_\mu = \{(\mu x, y) \mid (x, y) \in \Omega\}$ (dominios "chatos").

En este caso tenemos:

Teorema 2 (FB - Martínez - Rossi, '02) *Los autovalores (variacionales o no) y autofunciones del problema de Steklov no lineal convergen (adecuadamente "normalizados") a autovalores y autofunciones de*

$$-\mathit{div}(\alpha|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \alpha|u|^{p-2}u = \bar{\lambda}_k \beta|u|^{p-2}u \qquad \text{en } P(\Omega)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{en } \partial P(\Omega)$$

donde $P(\Omega)$ es la proyección de Ω sobre la variable y y α, β son pesos acotados que dependen de la "geometría" del dominio.

Corolario 3 *Si $\Omega_{\mu,\nu} = \{(\mu x, \nu y) \mid (x,y) \in \Omega\}$, tenemos*

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{\mu\to 0}\lambda_1(\Omega_{\mu,\nu}) \neq \lim_{\mu\to 0}\lim_{\nu\to 0}\lambda_1(\Omega_{\mu,\nu})$$

$$\neq \lim_{\mu\to 0}\lambda_1(\Omega_{\mu,\mu})$$