Sobre la existencia de extremales para la inmersión de trazas de Sobolev con exponente crítico

J. Fernández Bonder y J.D. Rossi

Univ. de Buenos Aires

Septiembre 2003

Desigualdades de Sobolev:

$$S\|u\|^2_{L^q(\partial\Omega)} \le \|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad 1 \le q \le 2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$$

Teorema de trazas de Sobolev

$$\bar{S}\|u\|^2_{L^p(\Omega)} \le \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}, \quad 1 \le p \le 2^* = \frac{2N}{N-2}$$

Teorema de inmersión de Sobolev

Las mejores constantes para estas igualdades son

$$S_q(\Omega) = \inf_{u \in H^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2\,dx}{\left(\int_{\partial\Omega} |u|^q\,d\sigma\right)^{2/q}}$$

y

$$\bar{S}_p(\Omega) = \inf_{u \in H^1_0(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{2/p}}$$

Una de las mayores diferencias entre estas cantidades es el hecho de que la primera no es homogénea con respecto a dilataciones del dominio, mientras que la segunda si lo es:

$$S_q(\mu\Omega) = \mu^{\beta} \inf_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega \mu^{-2}|\nabla v|^2 + |v|^2\, dx}{(\int_{\partial\Omega} |v|^q\, d\sigma)^{2/q}}$$

donde $\beta = (Nq - 2N + 2)/q$

pero

$$\bar{S}_p(\mu\Omega) = \mu^{\alpha} \bar{S}_p(\Omega)$$

donde $\alpha = (pN - 2p - 2N)/p$

Para $1 \leq q < 2_*$ y $1 \leq p < 2^*$ las inmersiones son compactas, en consecuencia existen *extremales*. Estos extremales son soluciones débiles de

$$\begin{cases} \Delta u = u & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda |u|^{q-2} u & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

respectivamente.

Problema: Estudiar la dependencia de la mejor constante de trazas de Sobolev con respecto al dominio.

Consideremos la familia de dominios

$$\Omega_\mu = \mu\Omega = \{\mu x \mid x \in \Omega\}$$

Flores - del Pino probaron (Comm. PDE's, 2001) que para dominios que se expanden ($\mu \to \infty$)

$$S_q(\Omega_\mu) \to S_q(\mathbb{R}^N_+) \qquad \text{cuando } \mu \to \infty$$

Para dominios que se contraen ($\mu \to 0$), FB - Rossi (CPAA, 2002) mostraron

$$\frac{S_q(\Omega_\mu)}{\mu^\beta} \to \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|^{2/q}} \qquad \text{cuando } \mu \to 0$$

Recientemente, FB - Martínez - Rossi (JDE, en prensa) consideraron diferentes familias de dominios (dominios "angostos").

Comportamiento de los extremales:

Flores - del Pino: En dominios que se expanden, los extremales desarrollan un "pico" cerca del punto donde la curvatura media del borde es máxima.

FB - Rossi: En dominios que se contraen, los extremales, cuando se los escala al dominio original de la forma $v(x) = u(\mu x)$ y debidamente normalizados, convergen a una constante en $H^1(\Omega)$.

Otra diferencia importante entre el Teorema de trazas de Sobolev y el Teorema de inmersión de Sobolev aparece en el comportamiento de los extremales:

Si Ω es una bola, $\Omega = B(0, \mu)$.

- Extremales para $\bar{S}_p(B(0, \mu))$ son funciones radiales.

- Extremales para $S_q(B(0, \mu))$ no son radiales, al menos para valores grandes de μ (esto es una consecuencia de Flores - del Pino).

Pregunta: Es cierto que para valores pequeños de μ los extremales para $S_q(B(0,\mu))$ son funciones radiales?

Respuesta: Si! (FB - Lami Dozo - Rossi, Ann. Inst. H. Poincaré, en prensa).

Otra diferencia entre estos problemas es el rol del exponente crítico.

Es un hecho bien conocido que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{en } B(0,\mu) \\ \\ u = 0 & \text{en } \partial B(0,\mu) \end{cases}$$

no tiene solución si $p \geq 2^*$.

Sin embargo, para

$$\begin{cases} \Delta u = u & \text{en } B(0,\mu) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda |u|^{q-2} u & \text{en } \partial B(0,\mu) \end{cases}$$

soluciones radiales se calculan explícitamente para todo q.

Para entender el rol que juega el exponente crítico $2_* = 2(N-1)/(N-2)$ hay que mirar, no las soluciones de la ecuación diferencial, sino la existencia de extremales para $S_q(\Omega)$.

En FB - Lami Dozo - Rossi, se muestra que existen $\mu_1 > \mu_2 > 0$ tales que, para todo $\mu < \mu_2$ existe un extremal radial para la inmersión

$$H^1(B(0,\mu)) \hookrightarrow L^{2_*}(\partial B(0,\mu))$$

y para $\mu > \mu_1$ no existen extremales para la inmersión.

- La parte de no existencia es válida para dominios Ω generales.

<u>Pregunta:</u> ¿Sigue siendo válida la parte de la existencia para dominios Ω generales?

Respuesta: Si!

Teorema 1 *Sea* Ω *un dominio suave y acotado en* $\mathbb{R}^N$ *tal que*

$$\frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|^{2/2_*}} < \frac{N-2}{2}\,\omega_N^{1/(N-1)},$$

donde ω_N *es la medida de la bola unitaria. Entonces existe un extremal para la inmersión* $H^1(\Omega) \to L^{2_*}(\partial\Omega)$.

Remark 2 *Sea* Ω *un dominio suave y acotado en* $\mathbb{R}^N$ *y sea*

$$\Omega_\mu = \mu\Omega = \{\mu x \mid x \in \Omega\},$$

donde $\mu > 0$. *Observamos que si* μ *es pequeño,*

$$\mu < \left(\frac{(N-2)\omega_N^{1/(N-1)}}{2}\right)^{1/2} \frac{|\partial\Omega|^{1/2_*}}{|\Omega|^{1/2}},$$

entonces Ω_μ *verifica las hipótesis del Teorema 1 y luego existe un extremal para la inmersión* $H^1(\Omega_\mu) \to L^{2_*}(\partial\Omega_\mu)$.